수리논리학 첫걸음

이슬비 · leaf1094@gmail.com · https://iseulbee.com

이 노트[1)]는 수리논리학을 공부하기에 앞서 개괄적인 내용을 파악하는 데에 도움을 주고자 만든 자료로서, 입문 수준에서 핵심 개념과 중요한 내용을 개괄적으로 소개합니다. Peter J. Cameron의 저서 『Sets, Logic and Categories』를 기반으로 작성되었으며, 상세한 증명보다는 주요 개념을 파악할 수 있도록 구성되어 있습니다.

수리논리학에 관심 있는 분들께 이 노트가 도움이 되기를 기대합니다.

2025년 5월 10일.

내용 순서

1. 형식논리의 개념

형식논리는 수학적 추론을 엄밀하게 정의하고 기호를 통해 표현하는 체계이다. 일상 언어의 모호함을 배제하고 명확한 규칙에 따라 논리적 사고를 전개할 수 있도록 한다. 형식논리는 수학의 기초를 확립하는 데 중요한 역할을 하며, 컴퓨터 과학, 인공지능, 논리 프로그래밍 등 다양한 분야에서 활용된다.

형식계(formal system)는 다음 네 가지로 구성된 체계이다.

- 알파벳 A: 기호의 집합이다.
- 논리식(formula)의 집합: 각 논리식은 A에 속한 기호로 이루어진 문자열이다. 주어진 문자열이 논리식인지 여부를 판별하는 형식적 절차[2)]가 존재한다.
- 공리(axiom)의 집합: 각 공리는 논리식이다. 모든 논리식이 공리인 것은 아니며, 주어진 논리식이 공리인지 여부를 판별하는 형식적 절차가 존재한다.

1) 수학교사를 대상으로 하는 2025년 수리논리학 세미나 강의노트
2) 의미를 따지지 않고 규칙만을 유한 번 적용하는 절차

- 추론규칙(rule of inference): 각 추론규칙은 유한 개의 논리식을 입력받아 하나의 논리식을 출력한다. 추론규칙을 적용하는 형식적인 절차가 존재한다.

형식계에서 증명(proof)이란 논리식의 열로, 각 논리식은 공리이거나 이전 항에 등장한 논리식에 추론규칙을 적용하여 얻어진 것이다. 증명의 마지막 항을 정리(theorem)라고 부른다.

하나의 형식계에서 모든 정리는 형식적인 절차에 의하여 얻어질 수 있다. 그러나 일반적으로 주어진 논리식이 정리인지 아닌지를 판별하는 절차는 존재하지 않는다. 형식계가 가진 특성에 따라 주어진 논리식이 정리인지를 밝혀내는 것이 가능할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.

형식계 자체를 수학적 대상으로 다루면 상위수학정리(metatheorem)[3]를 얻을 수 있다. 이는 형식계 자체의 특성에 대한 정리로서, 형식계 내에서 얻어지는 정리와는 다른 개념이다.

형식계의 예로 호프스태터의 MU-계(MU-system)를 살펴보자.

MU-계에서 알파벳은 집합 {M, I, U} 이며 논리식은 비어있지 않은 문자열이다. 공리는 단 하나 존재한다:

$$\mathrm{MI}$$

추론규칙은 네 개가 존재한다:

- 규칙 1. I로 끝나는 문자열에는 끝에 U를 추가할 수 있다.
- 규칙 2. M으로 시작하는 문자열 Mx에 대하여 M 뒤에 이어지는 문자열을 복제하여 Mxx를 얻을 수 있다.
- 규칙 3. 문자열에 I 세 개가 연달아 나타나면 그 세 개의 문자를 U로 바꿀 수 있다.
- 규칙 4. 문자열에 U 두 개가 연달아 나타나면 그 두 개의 문자를 없앨 수 있다.

MU-계에서의 증명의 예로서 다음과 같은 것을 들 수 있다:

$$\mathrm{MI},\quad \mathrm{MII},\quad \mathrm{MIIII},\quad \mathrm{MUI},\quad \mathrm{MUIU}.$$

이 증명은 공리 MI로부터 시작하여 규칙 2를 두 번 적용하고 규칙 3과 규칙 1을 이어서 적용한 것이다.

이제 다음과 같은 질문을 생각해 보자.

"MU는 정리인가?"

이 질문에 답하기 위해 다음과 같은 상위수학정리를 도입하자.

정리 1.1

MU-계의 정리에서 I가 나타나는 횟수는 3의 배수가 아니다.

증명 증명 길이에 대한 수학적 귀납법을 사용한다.

기본 단계: 가장 짧은 증명은 공리 MI로만 이루어져 있다. MI에는 I가 1개 포함되어 있고, 1은 3의 배수가 아니므로 주장이 성립한다.

귀납 단계: 증명 길이가 n인 정리 t에 대해, t는 증명 길이가 $n-1$인 정리 s에 추론 규칙을 적용하여 얻어진 것이다. s에 나타나는 I의 개수를 x라고 하자. 귀납적 가정에 의하여 x는 3의 배수가 아니다. t에 나타나는 I의 개수를 y라고 하자. 각 추론 규칙을 적용했을 때 x와 y의 관계를 등식으로 나타내면 다음과 같다.

3) '초수학정리' 또는 '수학외적정리'라고도 부른다.

- 규칙 1: $y = x$
- 규칙 2: $y = 2x$
- 규칙 3: $y = x - 3$
- 규칙 4: $y = x$

각 경우에 y는 3의 배수가 아니다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 정리가 증명되었다. ■

위 정리에 의하면, MU에는 I가 없으므로 MU는 MU-계의 정리가 아니다.

2. 명제논리의 개념

명제논리(propositional logic)란 간단히 말하면 명제변수와 기본 결합자(부정, 명제합, 명제곱, 함의), 그리고 몇 가지 공리와 추론규칙으로 이루어진 논리계를 뜻한다. 명제논리는 수리논리를 공부하기 위해 기본으로 거쳐야 할 관문이다.

2.1 구문론

구문론(syntactics)이란 주어진 기호를 사용하여 규칙에 따라 논리식을 만들어내거나, 기호로 이루어진 문자열이 논리식인지 아닌지를 밝히는 법칙이다. 구문론에서는 문자열의 의미를 따지지 않고 오직 기호 사이의 형식적 관계에만 관심을 가진다.

명제논리의 구문론을 다루기 위해 먼저 가산 개의 명제변수(propositional variable)의 집합

$$\{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$$

가 주어졌다고 본다. 명제논리에서는 결합자(connective)라고 불리는 기호

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$$

를 사용한다. 이 결합자는 순서대로 '부정', '논리곱', '논리합', '함의', '양방향 함의'라고 불린다. 또한 왼쪽 괄호와 오른쪽 괄호(여는 소괄호와 닫는 소괄호)도 기호로 사용한다.

명제논리에서 논리식(formula)이란 다음 두 가지 규칙을 유한 번 사용하여 얻어지는 문자열이다.

- 명제변수는 논리식이다.
- ϕ가 논리식이면 $(\neg\phi)$도 논리식이다. ϕ와 ψ가 논리식이면 다음 문자열도 모두 논리식이다.

$$(\phi \vee \psi), \quad (\phi \wedge \psi), \quad (\phi \rightarrow \psi), \quad (\phi \leftrightarrow \psi)$$

논리식은 위 규칙을 한 번 또는 여러 번 적용하여 얻어지는 것 외에는 없다.[4] 어떠한 문자열이 논리식인지 여부는 형식적인 절차에 의하여 판별된다.

예를 들어, 다음과 같은 문자열이 주어졌다고 하자.

$$(((\neg p_1) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)) \vee (p_1 \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)))$$

잘 정의된 논리식을 분석하는 과정을 트리(tree)로 시각화할 수 있다(그림 1 참조). 트리의 잎사귀에는 명제변수가 새겨지며, 마디에는 부정이나 결합자가 새겨진다. 부정이 새겨진 마디는 자녀를 하나만 가지며, 결합자가 새겨진 마디는 자녀를 둘 가진다.

4) 이와 같은 방법으로 얻어진 논리식을 'well-formed formula'(줄여서 'wff')라고 부르기도 한다.

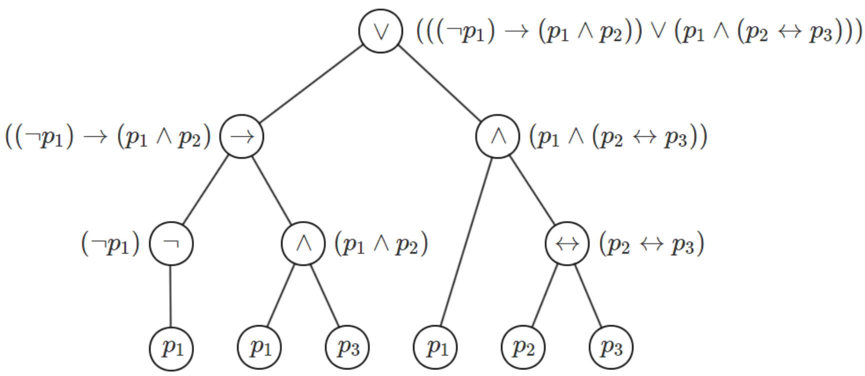


그림 1. 트리로 나타낸 논리식의 구조

2.2 의미론

명제변수 p_i가 참인지 거짓인지 알고 있다면, 이들 명제변수를 결합하여 만든 논리식이 참인지 거짓인지 판별할 수 있다. 이러한 판별 과정을 다루는 것이 의미론(semantics)이다.

이러한 의미 부여 과정을 명확하게 하기 위하여 값매김(valuation)을 모든 논리식의 집합으로부터 집합 {T, F}로의 함수 v로 정의한다. 명제논리에서 값매김은 표 1의 진리표와 같이 정의한다.

<table>
<tr><th>ϕ</th><th>ψ</th><th>$(\phi \wedge \psi)$</th><th>$(\phi \vee \psi)$</th><th>$(\phi \to \psi)$</th><th>$(\phi \leftrightarrow \psi)$</th><th>$(\neg \phi)$</th></tr>
<tr><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>T</td><td>F</td><td>F</td><td>T</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>T</td><td>F</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>T</td><td>T</td></tr>
</table>

표 1. 진리표로 나타낸 값매김

임의의 값매김 v에 대하여 $v(\phi) = \mathrm{T}$일 때 ϕ를 항진(tautology)이라고 부르며, 임의의 값매김 v에 대하여 $v(\phi) = \mathrm{F}$일 때 ϕ를 모순(contradiction)이라고 부른다.

Σ가 논리식의 집합이라고 하자. 임의의 $\sigma \in \Sigma$에 대하여 $v(\sigma) = \mathrm{T}$인 모든 값매김 v에 대하여 $v(\phi) = \mathrm{T}$가 성립하면 ϕ를 Σ의 논리적 귀결(logical consequence)이라고 부르고

$$\Sigma \models \phi$$

로 나타낸다. 만약 Σ가 공집합이면 ϕ는 항진이 되는데, 이것을

$$\models \phi$$

로 나타낸다.

2.3 형식추론계

이제 명제논리의 형식추론계(formal deduction system)를 살펴보자. 추론계의 첫 번째 요소로서 명제논리의 공리틀(schemes of axioms)을 도입한다.

(A1) $(\phi \to (\psi \to \phi))$

(A2) $((\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)))$

(A3) $(((\neg \phi) \to (\neg \psi)) \to (\psi \to \phi))$

여기서 ϕ, ψ, θ는 임의의 논리식을 나타낸다. 공리틀이란 공리들의 모임을 이르는데, 공리틀을 간단히 공리라고 부르기도 한다.

다음으로 추론규칙(rule of inference)을 도입한다. 추론규칙은 다음과 같은 규칙 하나 뿐이다.

$$p\text{와 } (p \to q)\text{로부터 } q\text{를 추론한다.}$$

이 추론규칙을 'Modus Ponens'라고 부르며 간단히 'MP'로 나타낸다.

증명이란 논리식의 열인데, 열의 각 논리식은 공리이거나 이전 항에 등장한 논리식에 추론규칙을 적용하여 얻어지는 논리식으로 이루어진다. 또한 증명의 마지막 항을 정리라고 부른다.

Σ가 논리식의 집합이고 ϕ가 논리식이라고 하자. 'Σ로부터의 ϕ의 증명'이란 논리식의 유한열인데, 열의 각 논리식은 공리이거나 Σ에 속한 논리식이거나 이전 항에 등장한 논리식에 추론규칙을 적용하여 얻어지며, 열의 마지막 항은 ϕ이다. 이때 ϕ를 Σ의 정리라고 부르고 Σ를 가정 집합이라고 부르며 Σ의 원소를 가정이라고 부른다. ϕ가 Σ의 정리인 것을

$$\Sigma \vdash \phi$$

로 나타낸다. 만약 Σ가 공집합이면 ϕ를 '명제논리의 정리' 또는 간단하게 '정리'라고 부르며, 이 상황을

$$\vdash \phi$$

로 나타낸다.

2.4 증명 예제

증명과 정리의 간단한 예를 살펴보자.

정리 2.1

임의의 논리식 p에 대하여 $(p \to p)$는 명제논리의 정리이다.

이 정리의 증명은 다음과 같이 길이가 5인(다섯 개의 항을 가진) 논리식의 열이다.

$$\begin{aligned}
&\vdash \quad ((p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))) \\
&\vdash \quad (p \to ((p \to p) \to p)) \\
&\vdash \quad ((p \to (p \to p)) \to (p \to p)) \\
&\vdash \quad (p \to (p \to p)) \\
&\vdash \quad (p \to p)
\end{aligned}$$

첫 항은 (A2)의 ϕ, ψ, θ에 각각 p, $(p \to p)$, p를 대입하여 얻은 것이다. 둘째 항은 (A1)의 ϕ, ψ 에 각각 p, $(p \to p)$ 를 대입하여 얻은 것이다. 셋째 항은 앞의 두 항에 MP를 적용하여 얻은 것이다. 넷째 항은 (A1)의 ϕ, ψ에 모두 p를 대입하여 얻은 것이다. 다섯 째 항은 앞의 두 항에 MP를 적용하여 얻은 것이다.

간단한 정리조차도 그것을 증명하려면 여러 개의 논리식이 필요하다. 하지만 다음과 같은 명제논리의 상위수학정리를 사용하면 증명을 더 간단하게 할 수 있다.

정리 2.2 (추론 정리)

ϕ가 $\Sigma \cup \{\psi\}$의 정리이면 $(\psi \to \phi)$는 Σ의 정리이다.

증명(개요) 증명은 $\Sigma \cup \{\psi\}$로부터의 ϕ의 증명 길이에 대한 수학적 귀납법을 사용한다.[5)]

기본 단계: $\Sigma \cup \{\psi\}$로부터 ϕ의 한 줄 짜리 증명이 존재한다면 ϕ는 공리이거나 Σ에 속하거나 ψ와 같은데, 세 가지 경우 모두 $(\psi \to \phi)$가 Σ의 정리가 된다.

귀납 단계: $\Sigma \cup \{\psi\}$로부터의 ϕ의 증명 길이 n이 2 이상이라고 하고, 증명 길이가 n 미만인 경우 정리가 성립한다고 가정하자. 이때 귀납적 가정과 MP 및 (A1)~(A3)을 거듭 적용하면 $(\psi \to \phi)$를 얻는다. ■

추론 정리를 사용하여 증명을 하는 예로, 논리식

$$((\neg\phi) \to (\phi \to \psi))$$

가 명제논리의 정리임을 보일 수 있다. 추론 정리에 의하여 $(\phi \to \psi)$가 $\{(\neg\phi)\}$로부터 추론될 수 있음을 보이면 된다. 그 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\{(\neg\phi)\} &\vdash ((\neg\phi) \to ((\neg\psi) \to (\neg\phi))) \\
\{(\neg\phi)\} &\vdash (\neg\phi) \\
\{(\neg\phi)\} &\vdash ((\neg\psi) \to (\neg\phi)) \\
\{(\neg\phi)\} &\vdash (((\neg\psi) \to (\neg\phi)) \to (\phi \to \psi)) \\
\{(\neg\phi)\} &\vdash (\phi \to \psi) \\
&\vdash ((\neg\phi) \to (\phi \to \psi))
\end{aligned}$$

증명에서 첫째 항은 (A1)이며 둘째 항은 가정이고 셋째 항은 MP에 의해 얻어진 것이다. 넷째 항은 (A3)이며 다섯째 항은 넷째 항에 MP를 적용한 것이고 여섯째 항은 추론 정리에 의해 얻어진 것이다.

3. 명제논리의 건전성과 완전성

명제논리를 논할 때는 두 가지 관점에서 접근할 수 있다. 하나는 구문론적 관점이며 다른 하나는 의미론적 관점이다. 구문론적 관점에서는 문자열의 의미를 고려하지 않고 오직 기호 사이의 형식적 관계에만 관심을 가진다. 반면 의미론적 관점에서는 논리변수의 진릿값 배정에 따른 논리식의 진릿값과 논리식 사이의 논리적 귀결에 관심을 가진다.

이 두 관점은 상당히 다른 것처럼 보이지만, 실제로는 밀접하게 연관되어 있다. 주어진 가정 하에서 구문론적 관점에서 형식적으로 증명 가능한 논리식은 가정의 논리적 귀결이 되며, 그 역도 성립한다. 이러한 두 관점의 연결은 명제논리의 건전성과 완전성 정리를 통해 확립된다.

3.1 건전성과 완전성의 의미

건전성(soundness)은 형식계에서의 정리가 논리적 귀결이 되는 성질이다. 즉, 형식적 추론을 통해 얻어진 결론은 의미론적으로도 타당하다는 것을 의미한다. 반면, 완전성(completeness)은 논리적 귀결이 되는 논리식은 형식적으로도 추론 가능하다는 성질이다.

5) 논리는 보통 수학의 체계를 다지는 기초 이론으로 여겨진다. 그렇다면 추론 정리를 증명할 때 논리식의 길이에 대한 '수학적 귀납법'을 사용하는 것이 타당할까?

명제논리는 건전성과 완전성을 모두 갖추고 있다. 즉, Σ가 논리식의 집합이고 σ가 논리식일 때 다음이 성립한다:

$$\Sigma \models \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma \vdash \sigma$$

여기서 $\Sigma \models \sigma$는 "σ는 Σ의 논리적 귀결이다"라는 의미론적 주장이고, $\Sigma \vdash \sigma$는 "σ는 Σ로부터 형식적으로 추론될 수 있다"라는 구문론적 주장이다. 이 동치관계에서 순방향($\Rightarrow$)이 완전성이며, 역방향($\Leftarrow$)이 건전성이다.

3.2 건전성 정리와 완전성 정리

건전성과 완전성을 증명하기 위해 먼저 몇 가지 용어를 정의하자. Σ가 논리식의 집합일 때, 만약 논리식 ψ가 존재하여 ψ와 $(\neg\psi)$가 모두 Σ로부터 추론 가능하면 Σ는 결함이 있다(inconsistent)라고 한다. 그렇지 않은 경우 Σ는 무모순이다(consistent) 또는 무결하다라고 한다.

다음은 명제논리의 건전성과 완전성 정리이다:

정리 3.1 (명제논리의 건전성과 완전성)

임의의 논리식 집합 Σ에 대하여, Σ가 무모순일 필요충분조건은 값매김 v가 존재하여 임의의 $\sigma \in \Sigma$에 대하여 $v(\sigma) = \mathrm{T}$를 만족시키는 것이다.

이 정리로부터 다음과 같은 중요한 결과를 얻을 수 있다:

(1) 논리식이 항진일 필요충분조건은 정리인 것이다.

(2) Σ가 논리식의 집합이고 σ가 논리식일 때, σ가 Σ의 논리적 귀결일 필요충분조건은 σ가 Σ로부터 추론 가능한 것이다.

건전성 정리의 증명 개요

건전성 정리의 증명은 다음 두 가지 사실을 바탕으로 한다:

1. 모든 공리는 항진이다.
2. 추론규칙 MP는 진릿값을 보존한다. 즉, $v(\phi) = \mathrm{T}$이고 $v((\phi \to \psi)) = \mathrm{T}$이면 $v(\psi) = \mathrm{T}$이다.

이 두 가지 사실을 바탕으로, 증명 길이에 대한 수학적 귀납법을 적용하여 모든 정리가 항진임을 증명할 수 있다. 이로써 형식적으로 추론 가능한 모든 명제는 의미론적으로도 타당하다는 건전성이 증명된다.

완전성 정리의 증명 개요

완전성 정리의 증명은 다음과 같은 단계로 진행된다:

1. 먼저 Σ가 무모순일 때, 임의의 논리식 ϕ에 대하여 $\Sigma \cup \{\phi\}$와 $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ 중 하나는 무모순임을 보인다.
2. 이 사실을 활용하여 Σ를 무모순인 극대 집합 Σ^+로 확장한다. 이 과정에서 모든 논리식 ϕ에 대해 ϕ와 $(\neg\phi)$ 중 정확히 하나만 Σ^+에 속하도록 한다.

3. 값매김 함수 v를 다음과 같이 정의한다:

$$v(p_i) := \begin{cases} \mathrm{T} & (p_i \in \Sigma^+\text{일 때}) \\ \mathrm{F} & (p_i \notin \Sigma^+\text{일 때}) \end{cases}$$

4. 수학적 귀납법을 사용하여 임의의 논리식 ϕ에 대해 $v(\phi) = \mathrm{T}$일 필요충분조건이 $\phi \in \Sigma^+$ 임을 증명한다.
5. 이로써 Σ에 속하는 모든 논리식이 참이 되도록 하는 값매김이 존재하고, 따라서 의미론적으로 타당한 모든 명제는 형식적으로도 추론 가능하다는 완전성이 증명된다.

3.3 명제논리의 콤팩트성

명제논리의 건전성과 완전성으로부터 중요한 결과인 콤팩트성이 도출된다. 콤팩트성은 다음과 같이 정의된다:

정리 3.2 (명제논리의 콤팩트성)

Σ가 논리식의 집합일 때, 만약 Σ의 임의의 유한부분집합이 만족될 수 있다면(satisfiable) Σ 자체도 만족될 수 있다.

여기서 집합이 '만족될 수 있다'(satisfiable)는 것은 값매김 함수 v가 존재하여 해당 집합의 모든 논리식에 대해 $v(\sigma) = \mathrm{T}$를 만족시킨다는 의미이다.

콤팩트성 정리는 건전성과 완전성을 활용하여 증명할 수 있다. 그 핵심은 모순이 도출되려면 반드시 유한 개의 논리식만이 필요하다는 사실에 있다. 따라서 모든 유한부분집합이 만족될 수 있다면, 모순이 도출될 수 없고 전체 집합 역시 만족될 수 있다.

3.4 콤팩트성의 응용: 평면지도의 사색 정리

명제논리의 콤팩트성은 수학의 여러 분야에 활용된다. 특히 주목할 만한 응용 중 하나는 유한평면지도의 사색 정리를 무한평면지도로 확장하는 것이다.

정리 3.3 (유한평면지도의 사색 정리)

임의의 유한평면지도를 채색하는 데에는 4가지 색이면 충분하다.

이 정리는 1976년 아펠(Kenneth Appel)과 하켄(Wolfgang Haken)이 컴퓨터의 도움을 받아 증명한 것으로 유명하다. 명제논리의 콤팩트성을 활용하면 이 정리를 무한평면지도로 확장할 수 있다:

정리 3.4 (평면지도의 사색 정리)

임의의 평면지도(유한 또는 무한)를 채색하는 데에는 4가지 색이면 충분하다.

이 확장의 핵심 아이디어는 다음과 같다:

1. 무한평면지도의 각 국가에 대응하는 명제변수를 도입한다.
2. 각 국가가 정확히 하나의 색을 가지도록 하는 논리식과, 인접한 국가가 서로 다른 색을 가지도록 하는 논리식을 정의한다.
3. 이 논리식들의 집합의 임의의 유한부분집합은 유한평면지도에 대응되므로, 유한평면지도의 사색 정리에 의해 만족될 수 있다.
4. 콤팩트성 정리에 의해 전체 논리식 집합도 만족될 수 있으므로, 무한평면지도 역시 4색으로 채색 가능하다.

3.5 일반적인 명제논리의 건전성과 완전성

지금까지 살펴본 건전성 정리와 완전성 정리, 그리고 콤팩트성 정리는 주로 명제논리의 변수 집합이 가산일 때를 가정했다. 그러나 이러한 결과들은 더 일반적인 상황으로 확장될 수 있다.

실제로, 명제논리의 변수 집합이 정렬집합(well-ordered set)일 때도 명제논리는 건전성과 완전성, 그리고 콤팩트성을 갖는다는 것이 알려져 있다. 이 경우 증명의 기본 아이디어는 비슷하지만, 무모순인 극대 집합 Σ^+를 구성하는 과정에서 초한 귀납법(transfinite induction)을 사용해야 한다.

ZFC 공리계(체르멜로-프렝켈 집합론에 선택 공리를 추가한 것)에서는 모든 집합이 정렬 가능하므로, ZFC 하에서는 명제변수의 집합이 임의의 크기를 가질 때도 명제논리는 건전성, 완전성, 그리고 콤팩트성을 갖는다.

4. 일계논리의 구문론

일계논리(first-order logic)는 명제논리의 단점을 보완한 논리 체계로, 수학에서 다루는 대부분의 대상을 형식적으로 표현할 수 있게 해준다.

일계논리의 두 가지 중요한 특징은 다음과 같다:

- 관계, 함수, 상수 등을 다루는 수학적 구조에 관한 진술이 기본단위가 될 수 있다. 예를 들어 두 함수가 같을 조건이나 특정 관계를 만족시키는 원소들에 대해 논할 수 있다.
- 한정사(quantifier)를 사용할 수 있다. 주어진 범위의 모든 대상에 대한 진술(전칭 한정사)이나 범위의 일부 원소에 대한 진술(존재 한정사)을 다룰 수 있다.

일계논리의 언어는 적용 분야에 따라 달라지지만, 모든 일계논리 언어는 다음 요소들을 포함한다:

- 함수기호(function symbol): 함수를 나타내는 형식적 기호
- 관계기호(relation symbol): 관계를 나타내는 형식적 기호
- 상수기호(constant symbol): 특정 원소를 나타내는 형식적 기호
- 변수(variable): 논리구조에서 임의의 원소를 가리키는 기호
- 논리기호: 등호(=), 결합자($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), 한정기호($\exists$, $\forall$), 괄호와 쉼표

명제논리에서는 명제변수와 결합자, 괄호만을 사용했던 것에 비해, 일계논리는 더 풍부한 표현이 가능하다.

일계논리에서는 먼저 항(term)을 정의한다:

- 하나의 변수는 항이다.
- 하나의 상수기호는 항이다.
- f가 n항함수기호이고 $t_1, t_2, \ldots, t_n$이 항이면 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$은 항이다.

다음으로 아톰논리식(atomic formula)을 정의한다:

- R이 n항관계기호이고 $t_1, t_2, \ldots, t_n$이 항이면 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$은 아톰논리식이다.
- t_1과 t_2가 항이면 $(t_1 = t_2)$는 아톰논리식이다.

마지막으로 논리식(formula)을 정의한다:

- 아톰논리식은 논리식이다.

- ϕ와 ψ가 논리식이면 $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\neg\phi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$는 모두 논리식이다.
- ϕ가 논리식이고 x가 변수이면 $(\exists x)\phi$와 $(\forall x)\phi$는 모두 논리식이다.

한정기호와 관련하여 자유변수(free variable)와 묶인변수(bounded variable)라는 개념이 중요하다. 변수 x가 $(\forall x)\phi$ 또는 $(\exists x)\phi$의 유효범위 내에 있을 때 x는 묶인변수이며, 그렇지 않은 변수는 자유변수이다. 자유변수가 없는 논리식을 문장(sentence)이라고 부른다.

일계논리를 실제 수학에 적용하는 예를 살펴보자. 군론에서는 다음과 같은 문장들로 군을 정의할 수 있다:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mu(\mu(x\,, y),\, z) = \mu(x,\, \mu(y,\, z)))$$

$$(\forall x)((\mu(x,\, \epsilon) = x) \wedge (\mu(\epsilon,\, x) = x))$$

$$(\forall x)((\mu(x,\, \iota(x)) = \epsilon) \wedge (\mu(\iota(x),\, x) = \epsilon))$$

이 문장들은 각각 연산의 결합법칙, 항등원의 존재성, 역원의 존재성을 나타낸다. 명제논리로는 이러한 복잡한 수학적 구조와 관계를 표현할 수 없으므로, 일계논리가 수학의 형식화에 중요한 역할을 한다.

5. 일계논리의 의미론

일계논리의 의미론은 구문론에서 정의한 기호들에 '의미'(진릿값)를 부여하는 방법을 다룬다. 명제논리에서는 명제변수에 진릿값을 배정하는 것으로 충분했지만, 일계논리에서는 더 복잡한 구조가 필요하다.

$\mathcal{L}$이 일계논리언어라고 하자. $\mathcal{L}$-구조(L-structure)란 다음 요소들로 이루어진 구조이다:

- 공집합이 아닌 집합 V (논리식의 해석 영역)
- $\mathcal{L}$의 각 관계기호에 대응하는 V에서의 관계
- $\mathcal{L}$의 각 함수기호에 대응하는 V에서의 함수
- $\mathcal{L}$의 각 상수기호에 대응하는 V의 원소

명제논리에서 값매김(valuation)이 명제변수에 진릿값을 할당하는 함수였다면, 일계논리에서는 변수에 V의 원소를 할당하는 함수로 확장된다. 즉, 값매김 v는 변수들의 집합으로부터 V로의 함수이다.

값매김 v를 확장하여 항의 값과 논리식의 진릿값을 다음과 같이 정의한다.

항에 대한 값매김:

- 변수 x에 대해 $v(x)$는 이미 정의되어 있다.
- 상수기호 c에 대해 $v(c)$는 c에 대응되는 V의 원소이다.
- 함수기호 f와 항 $t_1, t_2, \ldots, t_n$에 대해 $v(f(t_1, t_2, \ldots, t_n))$은 V의 원소 $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_n)$을 인수로 갖는 함수 f의 값이다.

논리식에 대한 값매김(명제논리의 결합자에 대한 부분은 생략):

- 관계기호 R과 항 $t_1, t_2, \ldots, t_n$에 대해 $v(R(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \mathrm{T}$일 필요충분조건은 V의 원소 $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_n)$이 R에 대응되는 관계를 만족하는 것이다.
- $v((t_1 = t_2)) = \mathrm{T}$일 필요충분조건은 $v(t_1) = v(t_2)$인 것이다.
- $v((\forall x_i)\phi) = \mathrm{T}$일 필요충분조건은 v에 대하여 i-인접한 임의의 값매김 v'에 대하여 $v'(\phi) = \mathrm{T}$인 것이다. (v와 v'이 i-인접하다는 것은 $j \neq i$인 임의의 j에 대하여 $v(x_j) = v'(x_j)$임을 의미한다.)

- $v((\exists x_i)\phi) = \mathrm{T}$일 필요충분조건은 v에 대하여 i-인접한 값매김 v'이 존재하여 $v'(\phi) = \mathrm{T}$인 것이다.

문장 ϕ가 구조 M에서 참일 때 $M \models \phi$로 나타내고, "M은 ϕ의 모델이다"라고 읽는다. 구조 M에서 참인 모든 문장들의 모임을 M의 이론(theory)이라고 부르고 $\mathrm{Th}(M)$으로 나타낸다.

예를 들어, 군론에서 모델 M이 군의 공리를 만족한다면 M은 군이다.

6. 일계논리의 추론규칙

일계논리의 형식계는 명제논리와 마찬가지로 알파벳, 공리, 추론규칙으로 구성된다. 그러나 일계논리의 공리와 추론규칙은 명제논리보다 더 복잡하다.

일계논리에서는 결합자와 한정기호를 다음 세 개의 기호로 표현할 수 있다:

$$\neg, \ \to, \ \forall$$

일계논리의 공리는 다음과 같은 아홉 개의 공리틀로 이루어져 있다:

(A1) $(\phi \to (\psi \to \phi))$
(A2) $((\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)))$
(A3) $((((\neg\phi) \to (\neg\phi)) \to (\psi \to \phi)))$
(A4) $((\forall x)\phi \to \phi[t/x])$
(A5) x가 ϕ에서 자유변수가 아닐 때 $((\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to (\forall x)\psi))$
(E1) t가 항일 때 $(t = t)$
(E2) t, u가 항일 때 $((t = u) \to (u = t))$
(E3) t, u, v가 항일 때 $((t = u) \to ((u = v) \to (t = v)))$
(E4) $((t = u) \to (\phi[t/x, t/y] \to \phi[t/x, u/y]))$

위 공리에서 $\phi[t/x]$는 논리식 ϕ에 나타나는 자유변수 x를 t로 치환하는 것을 의미한다.

첫 세 공리(A1-A3)는 명제논리의 공리와 동일하다. A4와 A5는 한정기호를 다루기 위한 것이며, E1-E4는 등호의 성질을 정의한다.

일계논리의 추론규칙은 다음 두 가지가 있다:

(R1) Modus Ponens: ϕ와 $\phi \to \psi$로부터 ψ를 추론한다.
(R2) 일반화: x가 변수일 때, ϕ로부터 $(\forall x)\phi$를 추론한다.

이러한 공리와 추론규칙을 바탕으로 일계논리에서 중요한 두 정리를 소개한다:

정리 6.1 (건전성 정리)

논리식 ϕ가 정리이면 ϕ는 논리적으로 유효하다. 더 일반적으로, Σ가 논리식의 집합이고 ϕ가 논리식일 때, ϕ가 Σ로부터 추론될 수 있으면 ϕ는 Σ의 논리적 귀결이다.

증명(개요) 건전성 정리는 공리가 모두 논리적으로 유효하고, 추론규칙이 논리적 유효성을 보존한다는 사실에 기초한다. 증명은 Σ로부터의 ϕ의 증명 길이에 대한 수학적 귀납법을 사용한다.

기본 단계: ϕ가 공리이거나 Σ에 속하는 경우, ϕ의 논리적 유효성은 자명하다.

귀납 단계: ϕ가 추론규칙을 통해 얻어진 경우, 귀납적 가정에 의해 추론에 사용된 논리식들이 논리적으로 유효하므로 ϕ 역시 논리적으로 유효하다. ■

정리 6.2 (완전성 정리)

가산 개의 함수기호, 관계기호, 상수기호를 가진 일계논리언어 $\mathcal{L}$에 대해, 논리식 ϕ가 논리적으로 유효하면 ϕ는 정리이다. 더 일반적으로, Σ가 논리식의 집합이고 ϕ가 논리식일 때, ϕ가 Σ의 논리적 귀결이면 ϕ는 Σ로부터 추론될 수 있다.

증명(개요) 완전성 정리는 더 강한 결과인 "논리식의 집합 Σ가 무모순일 필요충분조건은 Σ가 모델을 가지는 것이다"를 증명함으로써 얻을 수 있다. 증명은 다음 단계로 진행된다:

1. $\mathcal{L}$에 새로운 상수들을 추가하여 확장한다.
2. Σ가 무모순이면 Σ를 포함하는 완전하고 무모순인 집합 Σ^+가 존재함을 보인다.
3. Σ^+를 사용하여 모델을 구성한다.
4. 이 모델이 Σ의 모델임을 증명한다.

이러한 방법을 통해 무모순인 논리식 집합이 모델을 가짐을 보이고, 이를 사용하여 완전성 정리를 증명한다. ■

이 정리들은 일계논리의 구문론과 의미론 사이의 관계를 설명한다. 즉, 논리적으로 유효한 것과 형식적으로 증명 가능한 것이 일치한다는 것을 보여준다.

7. 일계논리의 콤팩트성

일계논리의 중요한 특성 중 하나는 콤팩트성이다. 이는 명제논리에서와 마찬가지로 유한성과 관련된 중요한 성질이다.

정리 7.1 (일계논리의 콤팩트성)

Σ가 가산인 일계논리언어의 문장의 모임이고 Σ의 임의의 유한부분집합이 모델을 가지면 Σ 자체도 모델을 가진다.

증명(개요) 완전성 정리에 의하면, Σ가 모델을 가질 필요충분조건은 Σ가 무모순인 것이다. 만약 Σ가 모순을 포함한다면, 그 모순은 유한한 증명에 의해 도출되므로 Σ의 유한부분집합으로부터 모순이 도출된다. 그러나 가정에 의해 모든 유한부분집합은 모델을 가지므로 모순을 포함할 수 없다. 따라서 Σ는 무모순이고, 완전성 정리에 의해 모델을 가진다. ■

콤팩트성 정리는 수학의 다양한 상황에서 활용된다. 예를 들어, 유한 평면지도의 사색 정리로부터 임의의 평면지도(무한 포함)에 대한 사색 정리를 증명하는 데 사용된다.

일계논리의 또 다른 중요한 특성은 뢰벤하임-스콜렘 정리이다.

정리 7.2 (뢰벤하임-스콜렘 정리)

Σ가 가산인 일계논리언어의 문장의 모임이고 모델을 가지면 Σ는 유한이거나 가산인 모델을 가진다.

증명(개요) Σ가 무모순이라면, 완전성 정리의 증명에서 사용한 방법으로 Σ의 모델을 구성할 수 있다:

1. Σ에 가산 개의 새로운 상수기호를 추가하여 완전한 집합 T를 구성한다.
2. 언어의 닫힌항들로 구성된 구조 N을 구성한다.
3. N에서 적절한 동치관계를 정의하고 상집합을 취하여 최종 구조를 만든다.

이렇게 구성된 모델은 가산이며 Σ의 모델이 된다. ■

위 정리는 다음과 같은 직관적 결과를 준다: 일계논리언어로 표현 가능한 이론이 무한 모델을 가진다면, 그 이론은 가산 무한 모델도 가진다.

뢰벤하임-스콜렘 정리의 확장으로 다음 정리도 알려져 있다.

정리 7.3 (위방향 뢰벤하임-스콜렘 정리)

Σ가 문장의 집합이고 무한 모델을 가진다면, Σ는 임의의 무한 기수보다 큰 모델을 가진다.

이 정리들은 일계논리의 독특한 성질을 보여준다. 예를 들어, 실수체 $\mathbb{R}$만을 유일한 모델로 가지는 일계논리 공리 체계는 존재할 수 없다. 왜냐하면 뢰벤하임-스콜렘 정리에 의해 그러한 공리 체계는 가산 모델도 가져야 하기 때문이다.

8. 페아노 산술

일계논리 문장의 집합 Σ가 완전하다(complete)는 것은 임의의 문장 α에 대하여 α 또는 $(\neg\alpha)$ 중 하나가 Σ의 논리적 귀결인 것이다. 일계논리의 완전성 정리에서는 형식계의 완전성을 말하기 때문에 용어의 사용이 약간 다르지만, 두 개념은 깊은 연관이 있다. Σ가 완전할 때는 임의의 문장 α에 대하여 α 또는 $(\neg\alpha)$가 Σ로부터 증명될 수 있기 때문이다.

M이 구조일 때, $M \models \sigma$인 모든 σ들의 모임, 즉 M에서 성립하는 모든 일계논리 문장 σ들의 모임을 M의 이론(theory)이라고 부른다. M의 이론은 완전성을 가진다.

문장들의 모임 Σ가 무한 모델을 가지면 Σ는 여러 개의 모델을 가진다. 그러나 만약 Σ가 완전성을 가지면 Σ의 모델은 모두 동일한 일계논리 이론을 가진다.

수학의 특정 분야를 공리화한다고 할 때, 그 분야가 군론과 같이 다양한 모델을 가지는 경우에는 완전한 하나의 집합을 정하려고 하지는 않는다. 반면, 하나의 모델만을 갖는 분야를 공리화한다면 일계논리의 문장을 적절히 구성하여 그 문장들이 모델을 완전히 결정하도록 해야 한다.

일계논리를 사용하여 공리화할 때 흥미로운 분야가 바로 자연수계이다. 여기서는 자연수 집합 $\mathbb{N}$ 대신 0 이상의 정수의 집합인 ω를 대상으로 하자.

집합론을 구성하지 않고 ω의 구조를 일계논리로 직접 공리화하는 것이 가능할까? 일계논리를 사용한 ω의 공리는 0으로부터 출발하여 따름수(successor)[6]를 취함으로써 ω의 모든 원소를 얻을 수 있어야 한다. 그러나

6) 따름수를 '후자' 또는 '직후자'라고 부르기도 한다.

일계논리만으로는 '임의의 유한 번의 반복'에 대하여 논할 수 없다. 이는 그러한 표현이 일계논리에서 허용되지 않기 때문이다.

ω는 자기동형사상을 갖지 않는다. 왜냐하면 ω의 자기동형사상은 0을 부동점으로 갖고, 그에 따라 $1, 2, 3, \cdots$ 도 부동점으로 갖기 때문이다. 따라서 ω를 공리화할 때에는 ω의 성질을 모두 끌어낼 수 있는 완전성을 갖는 단순한 공리계를 구성하는 것이 최선이다.

따름수 원리(succession principle)는 수학적 귀납법의 근거가 되며, 이것을 구현하는 방법은 수학적 귀납법의 원리(principle of induction)를 허용하는 것이다. 성질 P가 0에 대하여 성립하고, P가 n에 대하여 성립할 때마다 $n+1$에 대해서도 성립하면, P는 임의의 $n \in \omega$에 대하여 성립해야 한다. 그러나 일계논리에서는 일계논리식으로 표현 가능한 성질만 다룰 수 있다.

ω를 공리화하기 위하여 먼저 따름수 함수(successor function)와 관련된 공리를 도입하자. 우리의 언어는 상수기호 0과 일항함수 s를 가지는 것으로 약속한다. 여기서 s는 따름수 함수를 나타낸다.

(P1) 0을 제외한 임의의 원소 x는 유일한 y의 따름수이다.
(P2) 0은 어떠한 원소의 따름수도 아니다.

이들 공리는 일계논리의 문장으로 표현된다. 예를 들어 (P2)는 $(\forall x)(\neg(s(x) = 0))$으로 표현된다. (P1)과 (P2)는 서로 동형이 아닌 가산 모델을 무한히 많이 가진다.

이제 덧셈과 곱셈을 다룰 수 있는 공리를 추가하자:

(P3) $(\forall x)(x + 0 = x)$
(P4) $(\forall x)(\forall y)(x + s(y) = s(x + y))$
(P5) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$
(P6) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$

끝으로 수학적 귀납법의 원리를 위한 공리를 도입하자. 이 공리는 하나의 공리가 아닌 공리틀이다. 즉 하나의 자유변수 x를 가진 언어의 각 논리식 ϕ에 대하여 공리가 하나씩 대응된다:

(P7) $((\phi[0/x] \wedge (\forall x)(\phi \to \phi[s(x)/x])) \to (\forall x)\phi)$

(P1)~(P7)로 이루어진 공리계를 페아노 산술(Peano arithmetic)이라고 부른다. 참고로 페아노 산술은 ω 뿐만 아니라 ω와는 다른 모델도 가진다. (이러한 모델을 '비표준 모델'이라고 부른다.)

9. 불완전성 정리

페아노 산술이 완전성을 가질까? 그렇지 않다는 것이 1930년 괴델에 의하여 밝혀졌다. 즉 ω에서 참이지만 페아노의 공리를 사용하여 증명할 수 없는 문장이 존재한다.

괴델의 불완전성 정리는 20세기에 손꼽히는 위대한 지적 업적 중 하나이다. 여기서는 불완전성 정리의 핵심적인 아이디어와 증명의 개요를 살펴보자.

$\neg$	$\rightarrow$	$\forall$	(	)	$=$	s	$+$	$\cdot$	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

표 2. 기호 변환표

9.1 괴델 수매김

괴델의 아이디어는 각 논리식을 0 이상의 정수에 대응시키는 것이다. 이것을 괴델 수매김(Gödel numbering)이라고 부른다. 십진법으로 나타낸 정수는 숫자 기호들로 구성된 문자열이며, 논리식 역시 여러 기호들로 구성된 문자열이므로 논리식을 자연수에 대응시키는 것이 가능하다.

간단한 예로, 언어를 구성하는 기호에 표 2와 같이 숫자를 배정할 수 있다.

여기에 두 개의 기호가 더 필요하다. 즉 '변수 표시 기호'와 '논리식 표시 기호'가 필요하다. 이들 두 기호를 각각 A, B로 나타내자. 이로써 논리식을 정수로 나타내는 데에는 10진법이 아니라 12진법을 사용해야 한다.

이 방식으로 모든 기호에 수를 할당하고, 변수도 적절히 처리한 후, 논리식을 이 숫자들의 나열로 표현할 수 있다. 이렇게 얻은 정수를 해당 논리식의 괴델 수(Gödel number)라고 부른다.

예를 들어, 페아노 공리 중 하나인 논리식 $(\forall x_0)(\neg(s(x_0) = 0))$을 괴델 수로 나타내면 다음과 같다.

$$43A0A541474A0A56055$$

이러한 방식으로 논리식뿐만 아니라 증명 전체도 괴델 수로 나타낼 수 있다. 논리식 ϕ의 괴델 수를 $G(\phi)$로 나타내자.

9.2 불완전성 정리의 핵심 아이디어

괴델의 불완전성 정리를 증명하기 위한 핵심 아이디어는 다음과 같다:

(a) 두 개의 변수 x_0, x_1을 가진 일계논리 산술의 논리식 π가 존재하여 다음을 만족시킨다:
- $\omega \models \pi[n/x_0, m/x_1]$ ($m = G(\phi)$이고 n이 페아노 산술에서 ϕ의 증명의 괴델 수일 때)
- $\omega \models (\neg\pi[n/x_0, m/x_1])$ (그 외의 경우)

(b) 두 개의 변수 x_0, x_1을 가진 일계논리 산술의 논리식 τ가 존재하여 다음을 만족시킨다:
- $\omega \models \tau[m/x_0, n/x_1]$ (변수 x_0가 자유변수로서 나타나는 적당한 논리식 ϕ와 페아노 산술에서의 $\phi[m/x_0]$의 증명의 괴델 수 n에 대하여 $m = G(\phi)$일 때)
- $\omega \models (\neg\tau[m/x_0, n/x_1])$ (그 외의 경우)

이런 논리식 π와 τ가 존재한다는 것은 괴델 수매김을 통해 논리식의 구문적 성질을 산술적 성질로 표현할 수 있다는 것을 의미한다. 즉, "이 문장은 증명할 수 없다"와 같은 메타언어적 진술을 일계논리 내에서 형식화할 수 있게 된다.

9.3 괴델의 불완전성 정리

이제 괴델의 불완전성 정리를 살펴보자. 핵심 아이디어를 바탕으로, p가 논리식 $(\forall x_1)(\neg\pi)$의 괴델 수라고 하자. 여기서 π는 자유변수 x_0와 x_1을 가지고 있다. 이 논리식에서 x_0를 p로 치환한 논리식을 ζ라고 하자.

ζ는 자기 자신의 증명 불가능성을 주장하는 문장이다. 즉, ζ가 참이라면 ζ는 증명 불가능하다는 것을 의미한다.

정리 9.1 (괴델의 불완전성 정리)

페아노 산술이 무모순적이면 페아노 산술에서 증명도 불가능하고 반증도 불가능한 문장이 존재한다.

이 정리의 증명은 다음과 같이 진행된다:

1. 페아노 산술이 무모순적이라고 가정하자.
2. ζ가 증명 가능하다고 가정하고, 그 증명의 괴델 수를 q라고 하자.
3. 그러면 $\pi[p/x_0, q/x_1]$이 증명 가능하다.
4. 그러나 ζ의 정의에 의해 $(\forall x_1)(\neg\pi[p/x_0])$도 증명 가능하다.
5. 이로부터 $(\neg\pi[p/x_0, q/x_1])$이 증명 가능하다.
6. 이는 모순이므로, ζ는 증명 불가능하다.
7. 유사한 방법으로 $(\neg\zeta)$도 증명 불가능함을 보일 수 있다.

따라서 ζ는 페아노 산술에서 증명도 불가능하고 반증도 불가능한 문장이다.

9.4 관련된 정리들

괴델의 불완전성 정리로부터 타르스키(Tarski)의 정리를 얻을 수 있다:

정리 9.2 (타르스키의 정리)

페아노 산술이 무모순적이면 ω에서는 참이지만 페아노 산술에서는 증명 가능하지 않은 문장이 존재한다.

이는 앞서 살펴본 ζ가 ω에서는 참이지만 페아노 산술에서는 증명 불가능하다는 사실에서 비롯된다.

이 결과는 따름수, 자연수의 합, 곱을 다룰 수 있는 모든 형식계가 동일한 불완전성을 갖는다는 것을 보여준다. 또한 산술의 새로운 공리로서 어떤 문장을 추가하더라도, 괴델의 정리를 다시 적용하면 또 다른 증명 불가능한 문장이 생긴다.

괴델의 불완전성 정리에서 사용된 자기 참조적 문장 외에도, 더 자연스러운 수학적 문장 중에 페아노 산술에서 증명할 수 없는 것들이 있다. 그 중 하나가 패리스(Jeff Paris)와 해링스턴(Leo Harrington)이 발견한 램지 이론과 관련된 정리이다.

정리 9.3 (유한 램지 정리)

k, l, r이 양의 정수라고 하자. 그러면 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n이 존재한다: 만약 $n = \{0, \cdots, n-1\}$의 부분집합 중 원소가 k개인 것들이 모두 r개의 색으로 채색된다면 크기가 l인 단색(monochromatic) 부분집합, 즉 k개의 원소를 가진 모든 부분집합이 동일한 색상을 갖는 부분집합이 존재한다.

패리스와 해링스턴은 이 정리의 변형인 '특대집합'(large set)에 관한 정리를 고안했다:

정리 9.4 (패리스-해링스턴의 정리)

k, l, r이 양의 정수라고 하자. 그러면 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n이 존재한다: 만약 $n = \{0, \cdots, n-1\}$의 부분집합 중 원소가 k개인 것들이 r개의 색으로 채색되면 적어도 크기가 l인 특대 단색 부분집합이 존재한다.

여기서 '특대집합' 이란 ω의 유한부분집합 X 중에서 $|X| > \min(X)$가 성립하는 집합을 말한다.

패리스와 해링스턴은 이 정리가 ω에서는 참이지만 페아노 산술에서 증명 불가능함을 보였다. 이 결과는 무한 램지 정리를 활용하여 증명된다:

정리 9.5 (무한 램지 정리)

k, r이 양의 정수라고 하자. 만약 ω의 부분집합 중 원소가 k인 것들이 r개의 색으로 채색된다면 ω의 무한 단색 부분집합이 존재한다.

이러한 불완전성 정리들은 형식적 시스템의 한계를 보여주며, 단일 형식계에서 모든 수학의 진리를 형식적으로 증명할 수는 없음을 시사한다.

불완전성 정리는 수학의 불완전성을 의미하는 것이 아니며, PA를 포함한 공리계의 특성을 나타낼 뿐이다. 오히려, 불완전성 정리는 단일 형식계를 통해 '수학의 세계'를 완성할 수 없다는 점을 시사하므로, 수학의 세계에서 인간의 유의미한 역할에 대한 긍정적인 통찰을 가져다 준다고 할 수 있다.

9.5 제 2 불완전성 정리

괴델의 제 2 불완전성 정리는 페아노 산술이 자신의 무모순성을 증명할 수 없다는 것을 보여준다:

정리 9.6 (제 2 불완전성 정리)

만약 페아노 산술 PA가 무모순적이면, PA의 무모순성을 나타내는 논리식은 증명 불가능하다.

한편, 자연수계는 집합론을 사용하여 페아노 공리계를 만족시키도록 구성될 수 있다. 그러므로 집합론의 ZF 공리계는 페아노 공리계의 무모순성을 증명하기에 충분하다. 즉 페아노 산술은 스스로의 무모순성을 증명할 수 없지만 그보다 더 큰 체계에서 페아노 산술의 무모순성을 증명할 수 있다. 그러나 이 경우 더 큰 체계의 무모순성과 관련된 문제가 남게 된다.

10. 집합론의 공리

집합에 관한 모든 문장은 원소 관계를 사용하여 나타낼 수 있다. 집합론의 공리를 일계논리언어로 표현할 때는 하나의 이항관계를 사용하며, 이 관계가 원소 관계 $\in$을 나타낸다.

집합론의 체르멜로-프랭켈(Zermelo-Fraenkel) 공리계는 다음과 같은 열 개의 공리로 이루어져 있다:

(1) 외연 공리(Extension Axiom): 두 집합이 동일한 원소를 가지고 있으면 두 집합은 서로 같다.
(2) 공집합 공리(Empty Set Axiom): 어떠한 원소도 가지고 있지 않은 집합, 즉 공집합 $\varnothing$이 존재한다.
(3) 짝 공리(Pair Set Axiom): x와 y가 집합이면 이 두 집합만을 원소로 갖는 집합 $\{x, y\}$가 존재한다.
(4) 합집합 공리(Union Axiom): x가 집합이면 x의 원소들의 원소들로 이루어진 집합 $\cup x$가 존재한다.
(5) 멱집합 공리(Power Set Axiom): x가 집합이면 x의 부분집합들로 이루어진 집합 $\mathcal{P}(x)$가 존재한다.
(6) 무한 공리(Axiom of Infinity): 두 조건 $\varnothing \in a$와 $(x \in a) \Rightarrow (\{x\} \in a)$를 모두 만족시키는 집합 a가 존재한다.
(7) 분류 공리(Selection Axiom): ϕ가 집합론의 언어에서 일계논리식이고 하나의 자유변수 x를 가지고 있으며 a가 집합이라고 하자. 그러면 a의 원소 중에서 $\phi(x)$를 만족시키는 것들만을 원소로 갖는 집합 b가 존재한다. 이 집합을 $b = \{x \,|\, \phi(x)\}$로 나타낸다.
(8) 치환 공리(Replacement Axiom): ψ가 일계논리식이고 부분함수를 정의하는 두 변수 x, y를 가진다고 하자. 즉 임의의 x에 대하여 ψ를 만족시키는 y가 많아야 하나 존재한다고 하자. 그러면 적당한 $x \in a$에 대하여 $\psi(x, y)$를 만족시키는 y들로만 구성된 집합 b가 존재한다. 이 집합을 $b = \{f(x) \,|\, x \in a\}$로 나타낼 수 있으며, 여기서 f는 ψ에 의하여 정의된 함수가 된다.
(9) 정칙성 공리(Foundation Axiom): x가 공집합이 아니면 $y \in x$가 존재하여 $x \cap y = \varnothing$을 만족시킨다.
(10) 선택 공리(Axiom of Choice): $F : X \to Y$가 함수이고 임의의 $x \in X$에 대하여 $F(x) \neq \varnothing$이면 함수 $f : X \to \cup Y$가 존재하여 임의의 $x \in X$에 대하여 $f(x) \in F(x)$를 만족시킨다.

위 열 개의 공리를 통틀어 ZFC로 나타내며, 선택 공리를 제외한 1번부터 9번까지의 공리를 통틀어 ZF로 나타낸다.

위 공리들은 비형식적인 문장으로 표현되어 있지만, 각 문장은 일계논리언어의 문장으로 표현할 수 있다. 예를 들어 외연 공리는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$(\forall x)(\forall y)((x = y) \leftrightarrow (\forall z)((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)))$$

ZFC 공리계의 중요한 특징들을 살펴보자:

(1) 외연 공리는 다른 공리들을 사용하여 만들어진 집합의 유일성을 보장한다. 이로 인해 공집합, 합집합, 멱집합 등을 기호로 나타낼 수 있다.
(2) 공집합 공리를 '집합이 존재한다'라는 공리로 약화시켜도 된다. 왜냐하면 a가 집합일 때 분류 공리에 의하여 $\{x \in a \,|\, \neg(x = x)\}$로서 공집합을 정의할 수 있기 때문이다.
(3) 짝 공리는 치환 공리와 이원집합의 존재성으로부터 얻어질 수 있다. 또한 치환 공리로부터 분류 공리를 얻을 수 있다.
(4) 분류 공리와 치환 공리는 각각 하나의 논리식이 아니라 무한히 많은 공리로 이루어진 공리틀이다.
(5) 정칙성 공리는 원소 관계에 의한 무한감소열 $\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$이 존재하지 않는다는 것과 동치이다. 이는 상위수학정리로, 일계논리식으로 표현될 수 없다.
(6) 선택 공리를 제외한 ZF 공리는 체르멜로의 집합위계로부터 비형식적으로 얻어질 수 있다. 외연 공리는 모든 것이 집합이라는 것을 의미하고, 공집합 공리와 무한 공리는 각각 제1계층과 $\omega + 1$ 계층에서 나타나는 집합의 존재성을 나타낸다. 짝 공리, 합집합 공리, 멱집합 공리, 치환 공리는 주어진 집합으로부터 새로운 집합을 만들 수 있게 해준다.
(7) 정칙성 공리는 집합위계의 각 계층에서 나타나는 집합이 모든 집합을 빠짐없이 나타낸다는 것을 보장한다.
(8) ZFC 공리계에서는 러셀의 역설을 피할 수 있다. 정칙성 공리에 의해 자기 자신을 원소로 갖는 집합은 존재하지 않기 때문이다.

지금까지 체르멜로의 구성 방법이 수학의 다양한 분야에서 이론을 전개하는 데 충분한 것으로 인정받으므로, ZFC 공리계를 집합론의 공리로 받아들인다.

11. 선택 공리

선택 공리는 체르멜로-프랭켈 집합론의 공리 중에서 가장 논란이 많았던 공리이다. 공리적 집합론이 발달하기 시작한 20세기 초, 선택 공리를 다른 공리로부터 유도하기 위하여 많은 수학자들이 노력하였으나, 결국 선택 공리는 ZF와 독립적임이 밝혀졌다. 오늘날 선택 공리는 수학의 여러 분야에서 필수적인 것으로 받아들여지고 있다.

11.1 선택 공리와 동치인 명제들

선택 공리와 동치인 중요한 두 가지 정리를 소개한다:

정렬 원리 (WO: Well-Ordering Principle)
임의의 집합은 정렬 가능하다.

여기서 집합이 정렬 가능하다는 것은 그 집합에 순서관계를 부여하여 정렬집합(공집합이 아닌 임의의 부분집합이 최소원소를 가지는 순서집합)으로 만들 수 있다는 의미이다.

초른의 보조정리 (ZL: Zorn's Lemma)
$(X, <)$가 순서집합이고 X의 임의의 사슬이 상계를 가지면 X는 극대원소를 가진다.

여기서 사슬(chain)이란 임의의 두 원소가 비교 가능한 부분집합을 말하며, 상계(upper bound)란 사슬의 모든 원소보다 크거나 같은 원소를 의미한다.

정리 11.1
(AC), (WO), (ZL)은 서로 동치이다.

증명(개요) (WO) $\Rightarrow$ (AC): 정렬 원리가 성립하면, 임의의 비공집합에 정렬을 부여하고 각 집합의 최소원소를 선택하여 선택 함수를 구성할 수 있다.

(AC) $\Rightarrow$ (ZL): 선택 공리를 사용하여 극대원소가 없다고 가정하고, 순서수들을 순서집합의 원소에 대응시키는 함수를 구성한다. 이 함수가 모든 순서수를 순서집합의 원소에 대응시키게 되면 모순이 발생한다.

(ZL) $\Rightarrow$ (WO): 초른의 보조정리를 사용하여 집합과 순서수 사이의 일대일 대응의 존재를 증명한다. 이를 통해 임의의 집합이 정렬 가능함을 보인다. ■

11.2 선택 공리를 활용하여 증명하는 정리들

선택 공리를 활용하는 중요한 정리들을 살펴보자:

정리 11.2

ZFC에서 단위원을 갖는 임의의 환은 극대아이디얼을 가진다.

증명(개요) 초른의 보조정리를 사용하여 환의 아이디얼들 중 환의 진부분집합인 것들의 모임에 포함순서관계를 부여한다. 이 순서집합의 사슬이 상계를 가짐을 보인 후, 초른의 보조정리에 의해 극대원소의 존재를 증명한다. 이 극대원소가 바로 극대아이디얼이 된다. ■

정리 11.3

ZFC에서 임의의 벡터공간은 기저를 가진다.

증명(개요) 정렬 원리를 사용하여 벡터공간에 정렬을 부여한다. 그런 다음 순서수를 따라 귀납적으로 기저를 구성한다. 각 단계에서 이미 선택된 벡터들의 선형결합으로 표현되지 않는 벡터를 추가하여 기저를 완성한다. ■

정리 11.4

ZFC에서 유계이고 비가측인 집합이 존재한다.

증명(개요) 구간 $[0, 1]$에서 동치관계를 정의하여 $x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Q}$로 두고, 선택 공리를 사용하여 각 동치류에서 원소를 하나씩 선택한 집합 S를 구성한다. 이 집합을 유리수만큼 평행이동시킨 집합들이 서로소이면서 $[0, 1]$을 덮는다는 성질을 활용하여 S가 비가측임을 증명한다. ■

이 마지막 정리는 바나흐-타르스키 역설(Banach-Tarski paradox)로 이어진다. 이 역설은 단위구면을 유한 개의 조각으로 나눈 뒤 그 조각을 다시 조립하여 두 개의 단위구면을 만들거나 반지름이 두 배인 구면을 만들 수 있다는 것이다. 이러한 직관적이지 않은 결과로 인해 선택 공리를 받아들이기 어렵게 느껴질 수도 있다.

앞서 일계논리의 콤팩트성 정리를 살펴보았는데, 이 정리는 선택 공리와 관련이 있다:

따름정리. ZFC에서 임의 개수의 명제변수가 주어졌을 때 명제논리는 콤팩트성을 가진다.

이는 ZFC에서 변수들의 집합이 정렬 가능하므로 명제논리가 건전성과 완전성을 가지고, 따라서 콤팩트성도 가짐을 의미한다.

무한 지도에 대한 사색 정리나 정렬 정리와 같은 다양한 수학적 사실들이 명제논리의 콤팩트성으로부터 얻어질 수 있으므로, 이러한 사실들은 선택 공리의 결과이기도 하다. 하지만 명제논리의 콤팩트성은 선택 공리보다 약한 조건으로, 콤팩트성은 갖지만 선택 공리는 거짓이 되는 집합론의 모델을 구성할 수 있다.

12. 스콜렘 역설

ZFC 집합론이 가지고 있는 독특하고 놀라운 성질 중 하나가 바로 스콜렘 역설(Skolem's paradox)이다.

정리 12.1 (스콜렘 역설)

ZFC는 가부번(가산) 모델을 가진다.

증명 ZFC 집합론의 공리는 일계논리의 언어로 표현되고, 일계논리의 언어는 가산이므로 뢰벤하임-스콜렘 정리에 의하여 ZFC 집합론은 가부번 모델을 가진다. ■

칸토어의 정리에 의하면 S가 집합일 때 $|S| < |\mathcal{P}(S)|$이다. 즉, ZFC 집합론에는 비가산집합이 존재한다. 그런데 ZFC 집합론의 모델이 가산이라면, 비가산집합을 어떻게 다룰 수 있을까? 바로 이 지점에서 역설이 발생한다.

그러나 ZFC 집합론의 모델이 무엇을 의미하는지 자세히 살펴보면 이 역설은 모순이 아님을 알 수 있다. ZFC 집합론의 모델은 ZFC 공리계가 모두 유효하게 하는 하나의 이항관계를 가진 집합이다. 모델의 원소는 모델의 원소일 뿐 그 자체가 집합인 것은 아니다.

모델에서 함수는 순서쌍들의 집합으로 표현되고, 칸토어의 정리는 모델 내에 특정한 두 원소가 존재하여 어떠한 함수도 이 두 원소를 연결할 수 없음을 의미한다. 즉, 모델 내부에서 비가산 집합은 실제로 비가산이지만, 모델 외부에서 보면 모델 자체는 가산일 수 있다.

스콜렘은 1922년에 뢰벤하임-스콜렘 정리로부터 이 역설을 발견했는데, 이는 괴델의 불완전성 정리가 발표되기 전이었다. 따라서 스콜렘 역설은 당시 일계논리를 연구하던 수학자들에게 큰 충격을 안겨주었다.

공리적 집합론에서 '집합'이라고 말할 때는 '상상할 수 있는 임의의 집합'이 아니라 '모델에서 다루는 임의의 집합'을 의미한다. 따라서 ZFC 집합론의 가산 모델에서 비가산집합을 다룰 수 없는 것이 아니라, 모델 내부의 관점에서는 비가산으로 취급되는 집합이 모델 외부의 관점에서는 가산일 수 있다는 의미이다.

오늘날 ZFC 집합론의 가산 모델은 집합론을 연구하는 도구로서 유용하게 사용된다. 예를 들어, 코언(Paul Cohen)은 연속체 가설의 독립성을 증명할 때 집합론의 가산 모델을 사용하였다. 또한 1947년 헨킨(Leon Henkin)에 의하여 개선된 괴델의 완전성 정리의 증명은 무모순인 일계논리 이론의 가산 모델을 구성하는 전형적인 방법으로 인정받고 있다.

스콜렘 역설은 일계논리언어의 고유한 성질로 볼 수도 있다. 집합론을 이계논리언어로 다루면 스콜렘 역설은 발생하지 않는다. 그러나 이계논리는 일계논리와 달리 완전한 증명 체계를 갖지 못하며, 콤팩트성 정리나 뢰벤하임-스콜렘 정리와 같은 유용한 성질이 성립하지 않는다.

더 살펴보기를 권하는 주제

- 집합의 순서수(ordinal number)와 기수(cardinal number)
- 멱집합에 대한 칸토어의 정리와 연속체가설(continuum hypothesis)
- 카테고리 이론(category theory)

이 노트는 참고문헌 [1]을 기반으로 작성되었으므로, 이 노트에서 생략한 내용을 온전하게 살펴보고 싶으면 [1]을 참조하기 바란다. 수리논리학과 관련하여 [1]보다 더 깊은 내용을 살펴보고 싶다면 [2]와 [3]을 추천한다.

카테고리 이론의 자료를 검색하면 다양한 강의노트를 찾을 수 있다. 카테고리 이론의 교과서로 인정받는 노트[7)]가 많이 있지만, 초심자는 Ana Agore 교수님의 강의노트[8)]를 보는 편을 권장한다.

7) Saunders Mac Lane 교수님이나 Tom Leinster 교수님의 강의노트 등.
8) https://sites.google.com/view/ana-agore/teaching

참고문헌

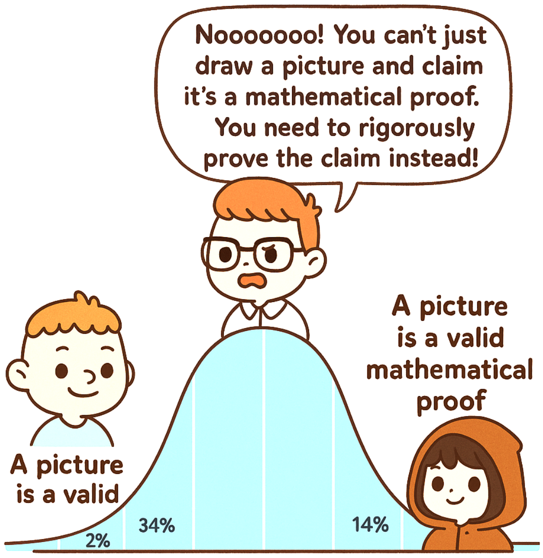
[1] Cameron, Peter J., *Sets, Logic and Categories*, Springer, 1998. (번역서: 이예찬, 신지수 역, *수리논리학입문*, 신한출판미디어, 2019.)

[2] Smullyan, Raymond M., *A Beginner's Guide to Mathematical Logic*, Dover, 2014.

[3] Enderton, Herbert B., *A Mathematical Introduction to Logic*, 2nd ed., Academic Press, 2001.

[4] 정주희, *수리논리와 집합론 입문*, 경문사, 2014.

[5] 정주희, *수리논리학*, 1997-1998년도 세미나 강의노트.



Category Theory