미적분학 첫걸음 2022년판 5단원

“연속의 엄밀한 정의” 연습문제 해설

(2022년 9월 29일 수정)

문제 1. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 실수 전체 구간에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\in\mathbb{Q}$가 성립한다고 하자. 이때 f가 상수함수임을 보이시오.

풀이 결론과는 반대로 f가 상수함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $f(a)\neq f(b)$인 두 점 a와 b가 존재한다. 여기서 $a<b$라고 해도 된다. (만약 $b<a$라면, 두 값의 이름을 바꾸어 붙이면 되기 때문이다.) 무리수의 조밀성에 의하여 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 무리수 r가 존재한다. 연속함수의 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=r$인 점 c가 a와 b 사이에 존재한다. 이것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 유리수라는 문제의 가정에 모순이다. 그러므로 f는 상수함수일 수밖에 없다. □

문제 2. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $\{a_n\}$의 부분수열 $\{a_{n_k}\}$도 L에 수렴함을 보이시오.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

“$n>N$인 임의의 n에 대하여 $|a_n-L|<\epsilon$이다.”

$\{n_k\}$는 증가하는 자연수열이므로, $k>N$일 때 $n_k>N$이다. 그러므로

“$k>N$인 임의의 k에 대하여 $|a_{n_k}-L|<\epsilon$”

이 성립한다. 즉 $\{a_{n_k}\}$가 L에 수렴한다.

[참고: 수열의 첫째항의 항번호가 1보다 작은 정수일 수 있다. 하지만 여기서는 항번호가 자연수인 경우만 증명하였다. 수열의 첫째항의 항번호가 1보다 작은 경우라도, 첫째항의 항번호를 1로 바꾸기만 하면 이 증명이 유효하다.] □

문제 3. I가 길이가 양수인 열린구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 $c\in I$이고 f가 c에서 불연속이라고 하자. 만약 c에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 존재하면 c를 f의 **단순불연속점**(simple discontinuity)이라고 부른다.

(1) 최대정수함수가 불연속인 점은 모두 단순불연속점임을 보이시오.

(2) 단순불연속점이 아닌 불연속점을 갖는 함수의 예를 드시오.

풀이 (1) 최대정수함수는 정수인 점에서만 불연속이다. n이 정수일 때

$$\lim_{x\to n-}[x]=n-1,\quad \lim_{x\to n+}[x]=n$$

으로서, n에서 최대정수함수의 좌극한과 우극한이 모두 존재한다. 그러므로 최대정수함수가 불연속인 점은 모두 단순불연속인 점이다.

(2) 함수 f를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

그리고 c를 임의의 실수라고 하자. 그러면 $c\to 0+$일 때나 $c\to 0-$일 때나 모두 $f(x)$는 수렴하지 않는다. 그러므로 f는 모든 점에서 불연속이며, 어느 점에서도 단순불연속이 아니다. □

문제 4. I가 길이가 양수인 열린구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 $c \in I$이고 f가 c에서 불연속이라고 하자. 만약 c에서 f의 함숫값 $f(c)$를 다시 정의하여 f가 c에서 연속이 되도록 할 수 있으면, c를 f의 **제거 가능한 불연속점**(removable discontinuity)이라고 부른다.
(1) 점 c가 함수 f의 제거 가능한 불연속점일 때, c에서 f의 극한이 존재함을 보이시오.
(2) 제거 가능한 불연속점은 모두 단순불연속점임을 보이시오.

풀이 (1) c가 함수 f의 제거 가능한 불연속점이라고 하자. 그러면 c에서 함숫값 $f(c)$를 다시 정의하여 f가 c에서 연속이 되도록 할 수 있다.
$f(c) = y_0$이라고 정의하면 f가 c에서 연속이 된다고 하자. 연속의 정의에 의하여 $x \to c$일 때 $f(x)$는 y_0에 수렴한다. 그러므로 c에서 f의 극한이 존재한다.

(2) 앞의 (1)에서 보다시피 c가 함수 f의 제거 가능한 불연속점이면 c에서 f의 좌극한과 우극한이 존재한다. 그러므로 c는 단순불연속점이다. □

문제 5. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

이때 모든 점에서 f가 불연속임을 보이시오.

풀이 결론과는 반대로 함수 f가 어떤 점 c에서 연속이라고 가정하자.
c에 수렴하는 유리수열 중 하나를 $\{r_n\}$이라고 하고, c에 수렴하는 무리수열 중 하나를 $\{s_n\}$이라고 하자. 그러면 점열연속 성질에 의하여

$$1 = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = f(c) = \lim_{n \to \infty} f(s_n) = 0$$

이므로 모순이다. 그러므로 f는 c에서 연속일 수 없다. □

문제 6. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

이때 f가 1에서만 연속이고 다른 모든 점에서는 불연속임을 보이시오.

풀이 우선 함수 f가 1에서 연속임을 보이자.
양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \epsilon$이라고 하자. 그리고 $|x-1| < \delta$라고 하자.
만약 x가 유리수라면

$$|f(x) - f(1)| = |x - 1| < \delta = \epsilon$$

이며, 만약 x가 무리수라면

$$|f(x) - f(1)| = |(2-x) - 1| = |1 - x| < \delta = \epsilon$$

이다. 즉 $|x-1| < \delta$인 모든 x에 대하여 $|f(x) - f(1)| < \epsilon$이므로, f는 1에서 연속이다.

다음으로 $c \neq 1$이라고 하고, f가 c에서 불연속임을 보이자. 결론과는 반대로 f가 c에서 연속이라고 가정하자. c에 수렴하는 유리수열 중 하나를 $\{r_n\}$이라고 하고, c에 수렴하는 무리수열 중 하나를 $\{s_n\}$이라고 하자. 그러

면 점열연속 성질에 의하여

$$c = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty}(2-s_n) = 2-c$$

이므로 $c = 2-c$이다. 그런데 $c \neq 1$이므로, 이와 같은 등식은 성립할 수 없다.
그러므로 f는 c에서 불연속이다. □

문제 7. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

이때 f가 0에서만 연속이고 다른 모든 점에서는 불연속임을 보이시오.

풀이 우선 f가 0에서 연속임을 보이자.
양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\{1, \epsilon\}$이라고 하자. 그리고 $|x-0| < \delta$라고 하자.
만약 x가 유리수라면

$$|f(x)-f(0)| = x^2 \leq |x| < \delta \leq \epsilon$$

이며, 만약 x가 무리수라면

$$|f(x)-f(0)| = |0-0| = 0 < \epsilon$$

이다. 즉 $|x-0| < \delta$인 모든 x에 대하여 $|f(x)-f(0)| < \epsilon$이므로, f는 0에서 연속이다.

다음으로 $c \neq 0$이라고 하고, f가 c에서 불연속임을 보이자. 결론과는 반대로 f가 c에서 연속이라고 가정하자. c에 수렴하는 유리수열 중 하나를 $\{r_n\}$이라고 하고, c에 수렴하는 무리수열 중 하나를 $\{s_n\}$이라고 하자. 그러면 점열연속 성질에 의하여

$$c^2 = \lim_{n\to\infty}(r_n)^2 = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

이므로 $c^2 = 0$이다. 그런데 $c \neq 0$이므로, 이와 같은 등식은 성립할 수 없다.
그러므로 f는 c에서 불연속이다. □

문제 8. 함수 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$가 0에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 1)$의 모든 점 x에서 $f(x) = f(x^2)$을 만족시킨다. 이때 함수 f가 구간 $(-1, 1)$에서 상수함수임을 보이시오.

풀이 x가 구간 $(-1, 1)$의 임의의 점이라고 하자. 그리고 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = x\text{이고, 모든 } n\text{에 대하여 } a_{n+1} = (a_n)^2.$$

그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n = x^{2^{n-1}}$이고 $f(x) = f(a_1) = f(a_n)$이다. (수학적 귀납법을 이용하면 이 사실을 더 논리적으로 증명할 수 있다.) 또한 $|x| < 1$이므로 $a_n \to 0$이다. 그리고 f가 0에서 연속이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(0)$$

이다. 따라서 $(-1, 1)$의 모든 점 x에서 함숫값 $f(x)$는 $f(0)$과 같다. 그러므로 f는 $(-1, 1)$에서 상수함수이다. □

문제 9. 함수 f가 $f(x)=[\,x\,]\sin(\pi x)$라고 정의되어 있다. 이때 f가 모든 실수에서 연속임을 보이시오. (단, $[\,\cdot\,]$는 최대정수함수를 나타낸다.)

풀이 c가 정수가 아닌 실수라고 하자. 그러면 최대정수함수 $[\,x\,]$와 $\sin(\pi x)$가 c에서 연속이므로, 두 함수의 곱 $[\,x\,]\sin(\pi x)$도 c에서 연속이다.

다음으로 n이 정수라고 하자.

$$\lim_{x\to n-}[\,x\,]=n-1,\quad \lim_{x\to n-}\sin(\pi x)=\sin(n\pi)=0$$

이므로

$$\lim_{x\to n-}[\,x\,]\sin(n\pi)=(n-1)\times 0=0=\sin(n\pi)$$

이다. 즉 n에서 f의 좌극한과 함숫값이 일치한다. 마찬가지로 n에서 f의 우극한과 함숫값 모두 0으로서 일치한다. 그러므로 f는 n에서 연속이다. □

문제 10. I가 열린구간이고 $c\in I$이며 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 만약 f가 c에서 연속이면, c를 원소로 갖는 열린구간 J가 존재하여 f가 J에서 유계가 됨을 보이시오.

풀이 함수 f가 c에서 연속이라고 하자. 그리고 $\epsilon=1$이라고 하자. 그러면 다음을 만족시키는 양수 δ가 존재한다.

"$|x-c|<\delta$인 모든 $x\in I$에 대하여 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$이다."

$J=I\cap(c-\delta,\ c+\delta)$라고 하자. 그러면 J는 두 열린구간의 교집합이므로 열린구간이다. 또한 J의 임의의 원소 x에 대하여 $|f(x)-f(c)|<\epsilon=1$이므로

$$|f(x)|<|f(c)|+1$$

이 성립한다. 만약 $B=|f(c)|+1$이라고 하면, J의 임의의 원소 x에 대하여 $|f(x)|<B$가 성립한다. 즉 f는 J에서 유계이다. □

문제 11. $\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 이때 $\{a_n\}$이 L에 수렴하기 위한 필요충분조건은 L을 원소로 갖는 임의의 열린구간 I에 대하여 [$a_n\notin I$인 n의 개수가 유한]인 것임을 보이시오.

풀이 [$\Rightarrow$ 증명] $\{a_n\}$이 L에 수렴한다고 가정하자. 그리고 I가 L을 원소로 갖는 열린구간이라고 하자. $I=(a,\ b)$와 같이 나타내자. L이 I의 원소이므로, $a<L<b$이다. 그러므로 실수의 조밀성에 의하여

$$a<L-\epsilon<L+\epsilon<b$$

를 만족시키는 양수 ϵ이 존재한다. $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

"$n>N$인 임의의 n에 대하여 $|a_n-L|<\epsilon$이다."

즉 $n>N$일 때는 $a_n\in I$이므로, $a_n\notin I$는 $n\le N$일 때만 가능하다. 따라서 $a_n\notin I$인 n의 개수가 유한이다.

[$\Leftarrow$ 증명] L을 원소로 갖는 임의의 열린구간 I에 대하여 [$a_n\notin I$인 n의 개수가 유한]이라고 가정하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $I=(L-\epsilon,\ L+\epsilon)$은 열린구간이다. 따라서 문제의 가정에 의하여 $a_n\notin I$인 항번호 n의 개수가 유한이다. $a_n\notin I$인 항번호 n 중에서 가장 큰 값을 N이라고 하자. 그러면 $n>N$일 때 $a_n\in I$이므로 $|a_n-L|<\epsilon$이다. 따라서 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다. □

문제 12. 임의의 실수열은 단조인 부분수열을 가짐을 보이시오.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 임의로 주어진 실수열이라고 하자.

(ⅰ) $\{a_n\}$이 위로 유계가 아닌 경우를 살펴보자.

우선 $a_{n_1} > 1$인 항번호 n_1이 존재한다. 만약 그러한 항번호 n_1이 존재하지 않는다면 $\{a_n\}$이 위로 유계가 되기 때문이다. 다음으로 $a_{n_2} > a_{n_1}$이면서 $n_2 > n_1$인 항번호 n_2가 존재한다. 왜냐하면, 만약 그러한 항번호 n_2가 존재하지 않는다면 $\{a_n\}$이 위로 유계가 되기 때문이다. 이 과정을 반복하면

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$$

이면서

$$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < a_{n_4} < \cdots$$

인 항 a_{n_k}를 계속하여 택할 수 있다. 이때 부분수열 $\{a_{n_k}\}$는 증가수열이 된다.

(ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 아래로 유계가 아닌 경우에도 (ⅰ)과 마찬가지로 감소하는 부분수열을 구성할 수 있다.

(ⅲ) 수열 $\{a_n\}$의 부분수열 중에 상수수열이 존재한다면, 바로 그 상수수열이 단조인 부분수열이 된다.

(ⅳ) 이제 수열 $\{a_n\}$이 유계이고, $\{a_n\}$의 부분수열 중에 상수수열이 존재하지 않는다고 가정하자.

$\{a_n\}$이 유계이므로 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재한다. $\{a_{n_k}\}$의 극한을 L이라고 하자. $\{a_n\}$의 부분수열 중에서 상수수열이 존재하지 않으므로, $\{a_{n_k}\}$의 항 중에서 L보다 큰 것이 무한히 많이 존재하거나, $\{a_{n_k}\}$의 항 중에서 L보다 작은 것이 무한히 많이 존재한다. 왜냐하면, 만약 $\{a_{n_k}\}$의 항 중에서 L보다 큰 것과 L보다 작은 것의 개수가 모두 유한이라면 L과 일치하는 항이 무한히 많으므로 $\{a_n\}$의 부분수열 중에 상수수열이 존재하게 되기 때문이다.

(ⅳ)-(a) $\{a_{n_k}\}$의 항 중에서 L보다 큰 것이 무한히 많이 존재하는 경우를 살펴보자. 보기 편하게 첨자가 여러 개 겹쳐 있는 경우 쉼표로 구분하자. 예컨대 a_{n_k}를 $a_{n,k}$로 나타내자.

우선 $L < a_{n,k,1} < L+1$인 항 $a_{n,k,1}$이 존재한다. 왜냐하면 $\{a_{n_k}\}$가 L에 수렴하기 때문이다.

또한 $n_{k_1} < n_{k_2}$이면서 $L < a_{n,k,2} < a_{n,k,1}$인 항 $a_{n,k,2}$가 존재한다.

다음으로 $n_{k_2} < n_{k_3}$이면서 $L < a_{n,k,3} < a_{n,k,2}$인 항 $a_{n,k,3}$이 존재한다.

이 과정을 반복하면

$$n_{k_1} < n_{k_2} < n_{k_3} < n_{k_4} < \cdots$$

이면서

$$a_{n,k,1} > a_{n,k,2} > a_{n,k,3} > a_{n,k,4} > \cdots$$

인 항 $a_{n,k,i}$를 계속하여 택할 수 있다. 이때 수열 $\{a_{n,k,i}\}$는 항번호를 나타내는 문자가 i인 수열이고, $\{a_n\}$의 부분수열의 부분수열이므로 $\{a_n\}$의 부분수열이며, 감소하는 수열이다.

(ⅳ)-(b) $\{a_{n_k}\}$의 항 중에서 L보다 작은 것이 무한히 많이 존재하는 경우에도, (ⅳ)-(a)와 마찬가지로 $\{a_n\}$의 부분수열 중에서 증가하는 수열이 존재한다. □

문제 13. 함수 f를 다음과 같이 정의한다.

x가 유리수이고 $x=\dfrac{p}{q}$이며 $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$이고 p와 q가 서로소일 때 $f(x)=\dfrac{1}{q}$;

x가 무리수일 때 $f(x)=0$.

이와 같이 정의된 함수 f를 **토마에 함수**(Thomae's function) 또는 **팝콘 함수**(popcorn function)라고 부른다. 다음 물음에 답하시오.

(1) f가 주기가 1인 주기함수임을 보이시오.

(2) 유리수인 점에서 f가 불연속임을 보이시오.

(3) 무리수인 점에서 f가 연속임을 보이시오.

풀이 (1) x가 임의의 실수라고 하자. 만약 x가 무리수라면 $x+1$도 무리수이므로 $f(x+1)=0=f(x)$이다. 만약 x가 유리수이고 $x=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$이라면 $x+1=\dfrac{p+q}{q}$, $p+q\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$이며 $p+q$와 q가 서로소이므로 $f(x+1)=\dfrac{1}{q}=f(x)$이다. [참고: 0과 서로소인 자연수는 1 뿐이다.]

그러므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이다.

또한 $f(x)=1$인 것은 x가 정수일 때뿐이다. 그러므로 f의 주기는 1보다 작을 수 없다.

따라서 f는 주기가 1인 주기함수이다.

(2) r가 유리수이고 $r=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$이며 p와 q가 서로소라고 하자.

함수 f가 r에서 불연속임을 보이자.

$\epsilon=\dfrac{1}{q}$이라고 하자. 그리고 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자.

그러면 무리수의 조밀성에 의하여 $|x-r|<\delta$인 무리수 x가 존재한다.

이때 $|f(x)-f(r)|=\left|0-\dfrac{1}{q}\right|=\dfrac{1}{q}\geq\epsilon$이므로 f는 r에서 불연속이다.

(3) s가 무리수라고 하자. f가 주기가 1인 함수이므로 $0<s<1$이라고 해도 된다.

함수 f가 s에서 연속임을 보이자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\dfrac{1}{q}\geq\epsilon$인 자연수 q의 개수는 유한이다.

그러므로 두 부등식 $0\leq p\leq q$와 $\dfrac{1}{q}\geq\epsilon$을 모두 만족시키는 자연수 쌍 p, q의 개수도 유한이다.

즉 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 유리수 x 중에서 $f(x)\geq\epsilon$을 만족시키는 x의 개수는 유한이다. 그러한 유리수 x 중에서 s와 가장 가까운 것을 택하고, 그 유리수 x와 s의 거리를 δ라고 하자. 즉

$$\delta=\min\{|x-s| \mid x\in\mathbb{Q},\ 0<x<1,\ f(x)\geq\epsilon\}$$

이라고 하자. s가 무리수이므로 δ는 양수이다.

이제 $|x-s|<\delta$인 임의의 x에 대하여, x가 유리수든 무리수든 상관없이 $|f(x)-f(s)|<\epsilon$이 성립한다. 그러므로 f는 s에서 연속이다. □