미적분학 첫걸음 2022년판 3단원

“극한의 엄밀한 정의” 연습문제 해설

(2022년 10월 10일 수정)

정의 1. $\{a_n\}$이 수열이고 L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립하면, “수열 $\{a_n\}$이 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

정의 2. $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) 만약 임의의 실수 B에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n > B$가 성립하면, “수열 $\{a_n\}$이 **양의 무한대로 발산한다**.”라고 말한다.

(ii) 만약 임의의 실수 B에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n < B$가 성립하면, “수열 $\{a_n\}$이 **음의 무한대로 발산한다**.”라고 말한다.

정의 3. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 모든 점에서 정의된 함수라고 하자. 또한 L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, “$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

정의 4. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 점에서 정의된 함수라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) 만약 임의의 실수 B에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $f(x) > B$가 성립하면, “$x \to a$일 때 $f(x)$가 **양의 무한대로 발산한다**.”라고 말한다.

(ii) 만약 임의의 실수 B에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $f(x) < B$가 성립하면, “$x \to a$일 때 $f(x)$가 **음의 무한대로 발산한다**.”라고 말한다.

정의 5. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 점에서 정의된 함수라고 하자. 또한 L이 실수라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) a가 I의 내부의 점이거나 I의 왼쪽 끝점이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < x - a < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, “$x \to a+$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

(ii) a가 I의 내부의 점이거나 I의 오른쪽 끝점이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < a - x < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, “$x \to a-$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

(iii) I가 위로 유계가 아니라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, “$x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

(iv) I가 아래로 유계가 아니라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x < X$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, “$x \to -\infty$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다**.”라고 말한다.

문제 1. x가 양수인 상수일 때, 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 단조수렴 정리를 사용하여 보이시오.

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

풀이 $n > x$인 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!} \times \frac{x}{n+1} = a_n \times \frac{x}{n+1} < a_n$$

이므로, $n > x$일 때 $\{a_n\}$은 감소하는 수열이다. 또한 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{x^n}{n!} > 0$$

이므로, $\{a_n\}$은 아래로 유계이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다. □

한 걸음 더 수열 $\{a_n\}$의 극한을 구해 보자. $\{a_n\}$의 극한을 L이라고 하자. 그러면 $\{a_{n+1}\}$도 L에 수렴하므로

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \times \frac{x}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = L \times 0 = 0$$

이다. □

다른 방법 단조수렴 정리를 사용한 방법은 아니지만, 다음과 같은 방법으로 수렴성을 보일 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0$$

이므로, 비 판정법에 의하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대수렴한다. 그러므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다. □

문제 2. r가 양수일 때 수열 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 수렴함을 단조수렴 정리를 사용하여 보이시오.

풀이 $r = 1$일 때는 임의의 자연수 n에 대하여 $r^{\frac{1}{n}} = 1$이므로, $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$은 1에 수렴한다.
$r > 1$일 때는 $r^{\frac{1}{n+1}} < r^{\frac{1}{n}}$이므로 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 감소수열이고, $0 \le r^{\frac{1}{n}} \le r$이므로 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 유계이다.
$r < 1$일 때는 $r^{\frac{1}{n+1}} > r^{\frac{1}{n}}$이므로 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 증가수열이고, $0 \le r^{\frac{1}{n}} \le 1$이므로 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 유계이다.
그러므로 단조수렴 정리에 의하여 수열 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 수렴한다. □

한 걸음 더 수열 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$의 극한을 구해 보자. $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$의 극한을 L이라고 하자. 그러면 $\left\{r^{\frac{1}{2n}}\right\}$도 L에 수렴한다. 그러므로

$$L = \lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{r^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{L}$$

이므로 $L = \sqrt{L}$이다. 이 등식을 풀면 $L = 0$ 또는 $L = 1$이다.

$r > 1$일 때는 $r^{\frac{1}{n}} \ge 1$이므로, $L \ge 1$이다. 따라서 $L = 1$이다.

$0 < r < 1$일 때는 $\left\{ r^{\frac{1}{n}} \right\}$이 증가수열이고 $r^{\frac{1}{n}} > r^{\frac{1}{1}} > 0$이므로 $L \geq r$이다. 따라서 $L = 1$이다.

그러므로 $\left\{ r^{\frac{1}{n}} \right\}$은 1에 수렴한다. □

문제 3. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_1 = 3, \text{ 임의의 자연수 } n\text{에 대하여 } a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6).$$

이때 $\{a_n\}$의 극한이 수렴함을 보이시오.

풀이 1단계. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 6$임을 보이자. 수학적 귀납법을 사용하자.

먼저 $a_1 = 3 < 6$이다.

다음으로 $a_k < 6$이라고 가정하자. 그러면

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(6 + 6) = 6$$

이므로 $a_{k+1} < 6$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n < 6$이다.

2단계. $\{a_n\}$이 증가수열임을 보이자. 임의의 n에 대하여 $a_n < 6$이므로 $-\frac{1}{2}a_n > -3$이다. 따라서

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + 6) - a_n = -\frac{1}{2}a_n + 3 > -3 + 3 = 0$$

이므로 $a_{n+1} > a_n$, 즉 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

3단계. 1단계와 2단계에 의하여 $\{a_n\}$은 위로 유계이면서 증가수열이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다. □

한 걸음 더 수열 $\{a_n\}$의 극한을 구해 보자. $\{a_n\}$의 극한을 L이라고 하자. 그러면 $\{a_{n+1}\}$도 L에 수렴한다. 따라서

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}(L + 6)$$

이다. 이 등식을 풀면 $L = 6$이다. 따라서 $\{a_n\}$은 6에 수렴한다. □

문제 4. 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 발산함을 보이시오.

$$a_n = \frac{n!}{2^n}$$

풀이 $n \geq 4$일 때

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2^n} \times \frac{n+1}{2} > a_n \times 2$$

이다.

그러므로 임의의 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned} a_5 &> a_4 \times 2, \\ a_6 &> a_5 \times 2 > a_4 \times 2^2, \\ a_7 &> a_6 \times 2 > a_4 \times 2^3, \\ a_8 &> a_7 \times 2 > a_4 \times 2^4, \\ &\vdots \\ a_{4+k} &= a_4 \times 2^k \end{aligned}$$

이다. 그런데 $a_4 > 0$이므로, $k \to \infty$인 극한을 취하면 $a_4 \times 2^k$은 양의 무한대로 발산한다.
그러므로 $\{a_n\}$은 발산한다. □

> **문제 5.** 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여, 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하고 수열 $\{|b_n - a_n|\}$이 0에 수렴한다고 하자. 이때 수열 $\{b_n\}$이 L에 수렴함을 보이시오.

풀이 임의의 자연수 n에 대하여

$$-|b_n - a_n| \le b_n - a_n \le |b_n - a_n|$$

이므로

$$a_n - |b_n - a_n| \le b_n \le a_n + |b_n - a_n|$$

이다. 그런데

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - |b_n - a_n|) = L - 0 = L$$

그리고

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + |b_n - a_n|) = L + 0 = L$$

이므로, 조임 정리에 의하여 $\{b_n\}$도 L에 수렴한다. □

다른 풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\frac{\epsilon}{2}$도 양수이다.
$\{a_n\}$이 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 자연수 N_1이 존재한다:

"$n > N_1$일 때 $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$\{|b_n - a_n|\}$이 0에 수렴하므로 다음을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다:

"$n > N_2$일 때 $||b_n - a_n| - 0| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$인 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L| \le |b_n - a_n| + |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

그러므로 $\{b_n\}$은 L에 수렴한다. □

문제 6. 수열의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $a_n = \dfrac{4}{n}$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > \dfrac{4}{\epsilon}$인 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 하자. 그러면

$$|a_n - 0| = \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{a_n\}$이 0에 수렴한다. □

참고 수열의 극한의 증명을 서술한 과정에서 N을 정하는 방법은 한 가지만 있는 것이 아니다. 예컨대 위 증명에서 N의 값은 $\dfrac{10}{\epsilon}$보다 큰 값으로 두어도 된다. □

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > \dfrac{1}{\epsilon}$인 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 하자. 그러면

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{a_n\}$이 0에 수렴한다. □

(3) $a_n = \dfrac{n+2}{3n}$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > \dfrac{2}{3\epsilon}$인 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 하자. 그러면

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n+2}{3n} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3n} < \frac{2}{3N} < \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{a_n\}$이 $\dfrac{1}{3}$에 수렴한다. □

문제 7. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $f(x) = 4x - 3$일 때 $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-2| < \delta$라고 가정하자. 그러면

$$|f(x)-5| = |(4x-3)-5| = |4x-8| = 4|x-2| < 4\delta = 4 \times \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

이다. 그러므로 $x \to 2$일 때 $f(x)$가 5에 수렴한다. □

> (2) $f(x) = -3x+5$일 때 $\lim_{x \to 4} f(x) = -7$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-4| < \delta$라고 가정하자. 그러면

$$|f(x)-(-7)| = |(-3x+5)-(-7)| = |-3x+12| = 3|x-4| < 3\delta = 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

이다. 그러므로 $x \to 4$일 때 $f(x)$가 -7에 수렴한다. □

> (3) $f(x) = 2x+8$일 때 $\lim_{x \to -1} f(x) = 6$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-(-1)| < \delta$라고 가정하자. 그러면

$$|f(x)-6| = |(2x+8)-6| = |2x+2| = 2|x+1| < 2\delta = 2 \times \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이다. 그러므로 $x \to -1$일 때 $f(x)$가 6에 수렴한다. □

> **문제 8.** 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하고 $b_n = |a_n|$이면 수열 $\{b_n\}$이 $|L|$에 수렴함을 보이시오.

풀이 1단계. 임의의 실수 x, y에 대하여 다음이 성립한다.

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \le |x-y|$$

이 부등식을 증명해 보자. 삼각부등식을 이용하면 다음을 얻는다.

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y| \text{이므로 } |x| - |y| \le |x-y|,$$
$$|y| = |(y-x)+x| \le |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \text{이므로 } -|x-y| \le |x| - |y|.$$

두 부등식을 결합하면

$$-|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y|$$

이므로

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \le |x-y|$$

가 성립한다. 이 부등식을 **역삼각부등식**이라고 부른다.

2단계. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로,

"$n > N$인 모든 n에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$"

을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 가정하자. 역삼각부등식에 $x = a_n$, $y = L$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$||a_n| - |L|| \le |a_n - L|$$

즉

$$|b_n - |L|| \le |a_n - L| < \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{b_n\}$은 $|L|$에 수렴한다. □

문제 9. $\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 만약 두 수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$이 모두 L에 수렴하면 $\{a_n\}$도 L에 수렴함을 보이시오.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

수열 $\{a_{2n}\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_1이 존재한다:

"$n > N_1$인 임의의 자연수 n에 대하여 $|a_{2n} - L| < \epsilon$이다."

또한 수열 $\{a_{2n+1}\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다:

"$n > N_2$인 임의의 자연수 n에 대하여 $|a_{2n+1} - L| < \epsilon$이다."

$N = 2N_1 + 2N_2 + 1$이라고 하자. 그리고 $n > N$이라고 하자.

n이 짝수이고 $n = 2k$이면, $k > N_1$이므로 $|a_n - L| = |a_{2k} - L| < \epsilon$이 성립한다.
n이 홀수이고 $n = 2k+1$이면, $k > N_2$이므로 $|a_n - L| = |a_{2k+1} - L| < \epsilon$이 성립한다.

$n > N$일 때, 어느 경우에나 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립하므로, $\{a_n\}$은 L에 수렴한다. □

문제 10. 수렴하는 수열은 유계임을 보이시오. 즉 $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이면, [임의의 항번호 n에 대하여 $|a_n| \le M$]을 만족시키는 양수 M이 존재함을 보이시오.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 L이라고 하자. 그리고 $\epsilon = 1$이라고 두자. (다른 양수로 두어도 된다.) 수열의 극한의 정의에 의하여, 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

"$n > N$인 임의의 n에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$이다."

즉 $n > N$일 때 $|a_n| - |L| \le |a_n - L| < \epsilon$이므로 $|a_n| < |L| + \epsilon$이다.

이제 $N+1$개의 값

$$|a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ \cdots,\ |a_N|,\ |L|+1$$

중에서 가장 큰 값을 M이라고 하자.

그러면 $n \le N$일 때는 당연히 $|a_n| \le M$이고, $n > N$일 때는 $|a_n| \le |L| + \epsilon = |L| + 1 \le M$이다.

즉 임의의 n에 대하여 $|a_n| \le M$이므로, $\{a_n\}$은 유계이다. □

문제 11. I가 닫힌구간이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 I에 속한다고 하자. 만약 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $L \in I$임을 보이시오.

풀이 $I = [a,\ b]$라고 하자. 그리고 결론과는 반대로 L이 I에 속하지 않는다고 가정하자. 그러면 $L < a$이거나 $b < L$이다.

$L < a$인 경우를 생각하자. $\epsilon = a - L$이라고 두자. 그러면 ϵ은 양수이다.

$\{a_n\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

"$n > N$인 임의의 n에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$이다."

위 부등식에 $n = N+1$을 대입하고 $\epsilon = a - L$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$|a_{N+1} - L| < a - L$$

즉 다음이 성립한다.

$$-(a-L) < a_{N+1} - L < a - L.$$

이 부등식으로부터 $a_{N+1} < a$를 얻는다. 이것은 항 a_{N+1}이 구간 $[a,\ b]$에 속하지 않는다는 것을 의미하므로, $\{a_n\}$의 모든 항이 $[a,\ b]$에 속한다는 문제의 가정에 모순이다. 그러므로 $L < a$일 수 없다.

마찬가지로, $b < L$이라고 가정하면 $\{a_n\}$의 항 중에서 b보다 더 큰 것이 존재하게 되어 모순이다. 그러므로 $a \le L \le b$이므로 L은 구간 $[a,\ b]$에 속한다. □

문제 12. I가 닫힌구간이고 함수 $f : D \to I$의 함숫값이 모두 I에 속한다고 하자. 만약 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$이면 $L \in I$임을 보이시오.

풀이 $I = [a,\ b]$라고 하자. 그리고 결론과는 반대로 L이 I에 속하지 않는다고 가정하자. 그러면 $L < a$이거나 $b < L$이다.

$b < L$인 경우를 생각하자. $\epsilon = L - b$라고 하자. 그러면 ϵ은 양수이다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ가 존재한다.

"$0 < |x - a| < \delta$인 임의의 x에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이다."

집합 D에서 $0 < |x_0 - a| < \delta$인 점 x_0을 하나 택하자. 그러면 $|f(x_0) - L| < \epsilon$이므로

$$L - \epsilon < f(x_0) < L + \epsilon$$

즉

$$L - (L - b) < f(x_0) < L + (L - b)$$

가 성립한다. 이 부등식으로부터 $b < f(x_0)$을 얻는다. 이것은 x_0에서 f의 함숫값이 $[a,\ b]$에 속하지 않는다는 것을 의미하므로, f의 함숫값이 모두 $[a,\ b]$에 속한다는 문제의 조건에 모순이다. 그러므로 $b < L$일 수 없다.

마찬가지로 $L < a$라고 가정하면 f의 함숫값 중에서 a보다 작은 것이 존재하게 되어 모순이다. 그러므로 $a \le L \le b$이며, L은 구간 $[a,\ b]$에 속한다. □

문제 13. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_1 = 2,\ \text{임의의 자연수 } n\text{에 대하여 } a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

이때 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오.

풀이 1단계. $\{a_n\}$의 모든 항이 $\sqrt{2}$보다 크다는 사실을 증명하자. 수학적 귀납법을 사용하자.

우선 $a_1 = 2 > \sqrt{2}$이다.

다음으로 $a_k > \sqrt{2}$라고 가정하자. 그러면

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 2}{2a_k} = \frac{\left(a_k^2 - 2\sqrt{2}\,a_k + 2\right) + 2\sqrt{2}\,a_k}{2a_n} = \frac{\left(a_k - \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}\,a_k}{2a_k} = \frac{\left(a_k - \sqrt{2}\right)^2}{2a_k} + \sqrt{2} > \sqrt{2}$$

이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n > \sqrt{2}$이다.

2단계. $\{a_n\}$이 감소수열임을 보이자. n이 자연수일 때

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = a_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} > \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2}{2a_n} = 0$$

이므로 $a_n > a_{n+1}$이다. 즉 $\{a_n\}$은 감소수열이다.

3단계. $\{a_n\}$이 아래로 유계이고 감소하는 수열이므로, 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다. □

문제 14. $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 실수열이고 $0 < x_1 < y_1$이며, 임의의 자연수 n에 대하여

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}\,,\quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

을 만족시킨다. 이때 두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 모두 수렴하고 그 극한이 일치함을 보이시오.

풀이 1단계. 임의의 n에 대하여 $0 < x_n < y_n$임을 보이자. 수학적 귀납법을 사용하자.
우선 $0 < x_1 < y_1$이라는 사실은 문제에서 주어진 가정이므로 참이다.
이제 $0 < x_k < y_k$라고 가정하자. 그러면 기하평균과 산술평균의 대소관계게 의하여 다음 부등식을 얻는다.

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k y_k} < \frac{x_k + y_k}{2} = y_{k+1}$$

특히 $\sqrt{x_k y_k} > 0$이므로, 위 부등식으로부터 $0 < x_{k+1} < y_{k+1}$을 얻는다.
그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $0 < x_n < y_n$이 성립한다.

2단계. 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

그러므로 $\{x_n\}$은 증가수열이고 $\{y_n\}$은 감소수열이다. 그런데 $\{x_n\}$의 항이 항상 $\{y_n\}$의 항보다 작으므로, $\{x_n\}$은 위로 유계이고 $\{y_n\}$은 아래로 유계이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 모두 수렴한다.

3단계. $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$의 극한값을 각각 A, B라고 하자. 그러면 $\{y_{n+1}\}$도 B에 수렴하므로

$$B = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{A+B}{2}$$

가 성립한다. 이 등식을 A에 대하여 풀면 $A = B$를 얻는다. □

문제 15. 단조수렴 정리를 사용하여 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오.

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}$$

풀이 a_n은 분모와 분자가 모두 자연수의 곱으로 이루어진 분수이므로 양수이다.
또한 임의의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n < a_n$$

이므로, $\{a_n\}$은 감소수열이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다. □

문제 16. 수열의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $a_n = \dfrac{3n^2+n}{n^2+1}$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N_1 > \dfrac{1}{\epsilon}$인 자연수 N_1이 존재한다. $N = \max\{3,\ N_1\}$이라고 하자. 그러면 $n > N$인 임의의 n에 대하여

$$|a_n - 3| = \left| \frac{3n^2+n}{n^2+1} - 3 \right| = \frac{n-3}{n^2+1} < \frac{n-3}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이 성립한다. □

(2) $b_n = n^2$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > |B|$인 자연수 N이 존재한다. $n > N$인 임의의 n에 대하여

$$b_n = n^2 \ge n > N > |B| \ge B$$

가 성립한다. □

(3) $b_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > 2|B|$인 자연수 N이 존재한다. $n > N$인 임의의 n에 대하여, 베르누이 부등식에 의하여 다음이 성립한다.

$$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \ge 1 + \frac{1}{2}n > \frac{1}{2}n > \frac{1}{2}N > |B| \ge B$$ □

(4) $c_n = -n^2+4$일 때 $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > |B|+4$인 자연수 N이 존재한다. $n>N$인 임의의 n에 대하여

$$c_n = -n^2+4 \le -n+4 < -N+4 < -|B| \le B$$

가 성립한다. □

(5) $c_n = -n^2+3n+7$일 때 $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > |B|+13$인 자연수 N이 존재한다. $n>N$인 임의의 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} c_n &= -n^2+3n+7 < -n^2+4n+7 \\ &= -(n-2)^2+11 \le -(n-2)+11 \\ &= -n+13 < -N+13 < -|B| \le B \end{aligned}$$

□

(6) $c_n = n-\sqrt{n}$일 때 $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N_1 > B^2$인 자연수 N_1이 존재한다. $N = \max\{4,\ N_1\}$이라고 하자. 그러면 $n>N$인 임의의 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$c_n = n-\sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \ge \sqrt{n} > \sqrt{N} > |B| \ge B$$

□

문제 17. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.
(1) $f(x) = x^2+x+1$일 때 $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{1,\ \frac{\epsilon}{4}\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.
$0<|x-1|<\delta$라고 하자. 그러면 $|x-1|<1$이므로 $|x+2|<4$이다.
따라서 $0<|x-1|<\delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|f(x)-3| = \left|(x^2+x+1)-3\right| = \left|x^2+x-2\right| = |x+2|\,|x-1| \le 4|x-1| < 4\delta \le \epsilon$$

□

(2) $f(x) = -2x^2+3x-4$일 때 $\lim_{x\to 2} f(x) = -6$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{1,\ \frac{\epsilon}{7}\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.
$0<|x-2|<\delta$라고 하자. 그러면 $|x-2|<1$이므로 $|2x+1|<7$이다.

따라서 $0<|x-2|<\delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|f(x)-(-6)| &= |(-2x^2+3x-4)-(-6)| \\ &= |-2x^2+3x+2| = |2x^2-3x-2| \\ &= |2x+1||x-2| \le 7|x-2| < 7\delta \le \epsilon.\end{aligned}$$

□

(3) $g(x)=\dfrac{1}{x}$일 때 $\lim\limits_{x\to3} g(x)=\dfrac{1}{3}$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\{1,\ 6\epsilon\}$이라고 하면 δ는 양수이다. $0<|x-3|<\delta$라고 하자. 그러면 $|x-3|<1$이므로 $2<x<4$이며

$$\frac{1}{12}<\frac{1}{3x}<\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 $0<|x-3|<\delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|g(x)-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| = \frac{|x-3|}{|3x|} \le \frac{1}{6}|x-3| < \frac{1}{6}\delta \le \epsilon.$$

□

(4) $g(x)=\dfrac{1}{2x-5}$일 때 $\lim\limits_{x\to2} g(x)=-1$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\epsilon}{6}\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0<|x-2|<\delta$라고 하자. 그러면 $|x-2|<\dfrac{1}{3}$이며, 이 부등식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}<x-2<\frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{5}{3}<x<\frac{7}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{3}<2x<\frac{14}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{3}<2x-5<-\frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow -3<\frac{1}{2x-5}<-\frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow -6<\frac{2}{2x-5}<-\frac{10}{3} \\ &\Rightarrow \left|\frac{2}{2x-5}\right|<6.\end{aligned}$$

따라서 $0<|x-2|<\delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|g(x)-(-1)| = \left|\frac{2x-4}{2x-5}\right| = \left|\frac{2}{2x-5}\right||x-2| \le 6|x-2| < 6\delta \le \epsilon.$$

□

(5) $g(x)=\dfrac{x+9}{x^2+3}$일 때 $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=2$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{1,\ \frac{3}{7}\epsilon\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-(-1)| < \delta$라고 하자. 그러면 $|x+1| < 1$이며, 이 부등식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |x+1| < 1 \ &\Leftrightarrow\ -2 < x < 0 \\ &\Leftrightarrow\ -4 < 2x < 0 \\ &\Leftrightarrow\ -7 < 2x-3 < -3 \\ &\Rightarrow\ |2x-3| < 7. \end{aligned}$$

또한, 부등식 $|x+1| < 1$을 다른 방법으로 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |x+1| < 1 \ &\Leftrightarrow\ -2 < x < 0 \\ &\Rightarrow\ 0 < x^2 < 4 \\ &\Leftrightarrow\ 3 < x^2+3 < 7 \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{7} < \frac{1}{x^2+3} < \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow\ \left|\frac{1}{x^2+3}\right| < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

따라서 $0 < |x-(-1)| < \delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |g(x)-2| &= \left|\frac{x+9}{x^2+3} - 2\right| = \left|\frac{2x^2-x-3}{x^2+3}\right| \\ &= |2x-3|\left|\frac{1}{x^2+3}\right||x+1| \\ &< 7 \times \frac{1}{3} \times \delta \le \epsilon. \end{aligned}$$

□

(6) $g(x) = \dfrac{7-x^2}{x+3}$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{3}{2}$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{1,\ \frac{2}{9}\epsilon\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-1| < \delta$라고 하자. 그러면 $|x-1| < 1$이며, 이 부등식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |x-1| < 1 \ &\Leftrightarrow\ 0 < x < 2 \\ &\Leftrightarrow\ -3 < x-3 < -1 \\ &\Leftrightarrow\ -1 < \frac{1}{x-3} < -\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow\ \left|\frac{1}{x-3}\right| < 1. \end{aligned}$$

또한, 부등식 $|x-1| < 1$을 다른 방법으로 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |x-1| < 1 \ &\Leftrightarrow\ 0 < x < 2 \\ &\Leftrightarrow\ 0 < 2x < 4 \\ &\Leftrightarrow\ 5 < 2x+5 < 9 \\ &\Rightarrow\ |2x+5| < 9. \end{aligned}$$

따라서 $0<|x-1|<\delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\left|g(x)-\frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{7-x^2}{x+3}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{14-2x^2}{2x+6}-\frac{3x+9}{2x+6}\right| \\ &= \left|\frac{-2x^2-3x+5}{2x-6}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x-3}\right|\,|2x+5|\,|x-1| \\ &< \frac{1}{2}\times 1\times 9\times \delta \le \epsilon.\end{aligned}$$

□

문제 18. 함수 f의 정의역이 I이고 a가 실수일 때, 다음 극한의 엄밀한 정의를 기술하시오.

(1) $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$

(2) $\lim_{x\to a+} f(x)=-\infty$

(3) $\lim_{x\to a-} f(x)=\infty$

(4) $\lim_{x\to a-} f(x)=-\infty$

(5) $\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty$

(6) $\lim_{x\to \infty} f(x)=-\infty$

(7) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

(8) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

※ 다음 정의에서 x는 모두 I의 원소를 나타낸다.

(1) $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 양수 δ가 존재한다:

"$0<x-a<\delta$인 모든 x에 대하여 $f(x)>B$이다."

(a보다 크면서 a에 임의로 가까운 I의 원소 x가 존재할 때만 이 극한이 정의된다.)

(2) $\lim_{x\to a+} f(x)=-\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 양수 δ가 존재한다:

"$0<x-a<\delta$인 모든 x에 대하여 $f(x)<B$이다."

(a보다 크면서 a에 임의로 가까운 I의 원소 x가 존재할 때만 이 극한이 정의된다.)

(3) $\lim_{x\to a-} f(x)=\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 양수 δ가 존재한다:

"$0<a-x<\delta$인 모든 x에 대하여 $f(x)>B$이다."

(a보다 작으면서 a에 임의로 가까운 I의 원소 x가 존재할 때만 이 극한이 정의된다.)

(4) $\lim_{x\to a-} f(x)=-\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 양수 δ가 존재한다:

"$0<a-x<\delta$인 모든 x에 대하여 $f(x)<B$이다."

(a보다 작으면서 a에 임의로 가까운 I의 원소 x가 존재할 때만 이 극한이 정의된다.)

(5) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 실수 X가 존재한다:

"$x > X$인 모든 x에 대하여 $f(x) > B$이다."

(I가 위로 유계가 아닐 때만 이 극한이 정의된다.)

(6) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 실수 X가 존재한다:

"$x > X$인 모든 x에 대하여 $f(x) < B$이다."

(I가 위로 유계가 아닐 때만 이 극한이 정의된다.)

(7) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 실수 X가 존재한다:

"$x < X$인 모든 x에 대하여 $f(x) > B$이다."

(I가 아래로 유계가 아닐 때만 이 극한이 정의된다.)

(8) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

정의 임의의 실수 B에 대하여, 다음이 참이 되도록 하는 실수 X가 존재한다:

"$x < X$인 모든 x에 대하여 $f(x) < B$이다."

(I가 아래로 유계가 아닐 때만 이 극한이 정의된다.)

참고 위 극한을 논리기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

(1) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : (0 < x - a < \delta \to f(x) > B)$

(2) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : (0 < x - a < \delta \to f(x) < B)$

(3) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : (0 < a - x < \delta \to f(x) > B)$

(4) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : (0 < a - x < \delta \to f(x) < B)$

(5) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : (x > X \to f(x) > B)$

(6) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : (x > X \to f(x) < B)$

(7) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : (x < X \to f(x) > B)$

(8) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : (x < X \to f(x) < B)$

문제 19. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$일 때 $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \dfrac{1}{|B|+1}$이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x - 0| < \delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = |B| + 1 > |B| \geq B. \qquad \square$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ 일 때 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ 이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{|B|+1}}$ 이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < |x-1| < \delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta^2} = |B|+1 > |B| \geq B. \qquad \square$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 일 때 $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$ 이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \dfrac{1}{|B|+1}$ 이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < x - 0 < \delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = |B|+1 > |B| \geq B. \qquad \square$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{2x-6}$ 일 때 $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = -\infty$ 이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \dfrac{1}{2(|B|+1)}$ 이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < 3 - x < \delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{2(x-3)} < \frac{1}{2 \times (-\delta)} = -|B|-1 < -|B| \leq B. \qquad \square$$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-5)}$ 일 때 $\lim\limits_{x \to 5+} f(x) = \infty$ 이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{1,\ \dfrac{1}{9(|B|+1)}\right\}$ 이라고 하면 δ는 양수이다.

$0 < x-5 < \delta$인 x는 $0 < x-5 < 1$을 만족시키며, 이 부등식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$0 < x-5 < 1 \iff 8 < x+3 < 9 \iff \frac{1}{9} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{8}.$$

그러므로 $0 < x-5 < \delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)(x-5)} > \frac{1}{9(x-5)} > \frac{1}{9\delta} \geq |B|+1 \geq |B| \geq B. \qquad \square$$

(6) $f(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-5)}$ 일 때 $\lim\limits_{x \to 5-} f(x) = -\infty$ 이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{1}{2(|B|+1)}\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다. $0<5-x<\delta$인 x는 $0<5-x<1$을 만족시키며, 이 부등식을 변형하면 다음 부등식을 얻는다.

$$0<5-x<1 \iff -1<x-5<0 \iff 7<x+3<8 \iff \frac{1}{8}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{7}.$$

또한 부등식 $0<5-x<1$을 다른 방법으로 변형하면 다음 부등식을 얻는다.

$$0<5-x<1 \iff -1<x-5<0 \iff 4<x<5$$

그러므로 $0<5-x<\delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다. ($x-5$가 음수라는 점 주의!)

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x}{(x+3)(x-5)}=x\times\frac{1}{x+3}\times\frac{1}{x-5} \\ &<4\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{-\delta}=-\frac{1}{2\delta}\le-|B|-1<-|B|\le B. \end{aligned}$$ □

(7) $f(x)=\dfrac{x}{(x+3)(x-5)}$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to-3+}f(x)=\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{1}{4(|B|+1)}\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다. $0<x-(-3)<\delta$인 x는 $0<x-(-3)<1$을 만족시키며, 이 부등식을 변형하면 다음 부등식을 얻는다.

$$0<x+3<1 \iff -3<x<-2 \iff -8<x-5<-7 \iff -\frac{1}{7}<\frac{1}{x-5}<-\frac{1}{8}.$$

마지막 부등식과 $-3<x<-2$를 결합하면

$$\frac{x}{x-5}>(-2)\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}$$

을 얻는다. 그러므로 $0<x-(-3)<\delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{x+3}\times\frac{x}{x-5}>\frac{1}{x+3}\times\frac{1}{4} \\ &>\frac{1}{\delta}\times\frac{1}{4}\ge4(|B|+1)\times\frac{1}{4}=|B|+1>|B|\ge B. \end{aligned}$$ □

(8) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-4)\sqrt{x}}$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{1,\ \left(\dfrac{3}{4(|B|+1)}\right)^2\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다. $0<x<\delta$인 x는 $0<x<1$을 만족시키며, 이 부등식을 변형하면 다음 두 부등식을 얻는다.

$$3<x+3<4 \quad \text{그리고} \quad -4<x-4<-3.$$

두 부등식을 결합하면

$$\frac{x+3}{x-4}<-\frac{1}{4}\times3=-\frac{3}{4}$$

을 얻는다.

그러므로 $0<x<\delta$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{x-4}\times\frac{1}{\sqrt{x}} < -\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &< -\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{\delta}} \le -\frac{3}{4}\times\frac{4(|B|+1)}{3} \\ &= -|B|-1 < -|B| \le B. \end{aligned}$$

□

문제 20. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $g(x)=\dfrac{1}{x}$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $X=\dfrac{1}{\epsilon}$이라고 하자.

그러면 $x>X$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|g(x)-0|=\frac{1}{x}<\frac{1}{X}=\epsilon.$$

□

(2) $g(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $X=-\dfrac{7}{\epsilon}$이라고 하자.

그러면 $x<X$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|g(x)-1|=\left|\frac{7}{x-3}\right|=-\frac{7}{x-3}<-\frac{7}{x}<-\frac{7}{X}=\epsilon.$$

□

(3) $g(x)=2^x$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $X=|B|+1$이라고 하자.
이제 $x>X$라고 가정하자. 그리고 $n=[x]$라고 하자. 여기서 $[\,\cdot\,]$는 최대정수함수를 나타낸다. 그러면 베르누이 부등식에 의하여 다음이 성립한다.

$$g(x)=2^x\ge 2^n=(1+1)^n\ge 1+n>n>x-1>X-1=|B|\ge B.$$

□

(4) $g(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $X=\dfrac{\log\epsilon}{\log\frac{3}{2}}$이라고 하자.

그리고 $x<X$라고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$|g(x)-0|=\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x-0\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^X=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}\epsilon}=\epsilon.$$

□

(5) $g(x)=-x^2+4$일 때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $X=|B|+4$라고 하자. 그러면 $X^2>X$이다.
이제 $x>X$라고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$g(x)=-x^2+4<-X^2+4<-X+4=-(|B|+4)+4=-|B|\le B.$$

□

(6) $g(x)=-3x^2+5$일 때 $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.

$$X=\frac{-|B|-5}{3}$$

라고 하자. 그러면 X는 음수이고 절댓값이 1보다 크므로 $X^2>-X$이다.
이제 $x<X$라고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$g(x)=-3x^2+5<-3X^2+5<3X+5=(-|B|-5)+5=-|B|\le B.$$

□

(7) $g(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$일 때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $X=\max\{2|B|,\ 2\}$라고 하자.
그러면 $x>X$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$g(x)=\frac{x^2-3}{2x-4}=\frac{x^2-4+1}{2(x-2)}=\frac{(x+2)(x-2)+1}{2(x-2)}=\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2x-4}$$
$$>\frac{1}{2}(x+2)>\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}X\ge\frac{1}{2}\times 2|B|=|B|\ge B.$$

□

(8) $g(x)=\dfrac{x^2+4}{|x|+1}$일 때 $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $X=-|B|-1$이라고 하자.
그러면 $x<X$인 모든 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$g(x)=\frac{x^2+4}{|x|+1}=\frac{x^2+4}{-x+1}=\frac{(x^2-1)+5}{1-x}=\frac{(x+1)(x-1)+5}{1-x}$$
$$=-x-1-\frac{5}{x-1}>-x-1>-X-1\ge|B|\ge B.$$

□

문제 21. a가 실수이고 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때 수렴하며

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$

(2) $\lim_{x \to a}(kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

(1) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\frac{\epsilon}{2}$도 양수이다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

"$0 < |x-a| < \delta_1$일 때마다 $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$x \to a$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로 다음을 만족시키는 양수 δ_2가 존재한다:

"$0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다 $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 하자. 그러면 δ는 양수이다.

$0 < |x-a| < \delta$라고 하자. 그러면 $0 < |x-a| < \delta_1$이면서 $0 < |x-a| < \delta_2$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

(2) $\lim_{x \to a}(kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
만약 $k = 0$이라면, $\delta = 1$로 두자. 그러면 $0 < |x-a| < \delta$인 모든 x에 대하여

$$|kf(x) - kL| = 0 < \epsilon$$

이 성립하므로 증명이 끝난다.

이제 $k \neq 0$인 경우를 증명하자.

$\frac{\epsilon}{|k|}$이 양수이고, $x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ가 존재한다:

"$0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}$이다."

이와 같은 양수 δ에 대하여, $0 < |x-a| < \delta$일 때 다음이 성립한다.

$$|kf(x) - kL| = |k| \times |f(x) - L| = |k| \times \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

□

문제 22. 두 함수 f, g가 $x \to \infty$일 때 수렴하며

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\frac{\epsilon}{2}$도 양수이다.

$x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 실수 X_1이 존재한다:

“$x > X_1$일 때마다 $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$이다.”

$x \to \infty$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로 다음을 만족시키는 실수 X_2가 존재한다:

“$x > X_2$일 때마다 $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$이다.”

$X = \max\{X_1,\ X_2\}$라고 하자. 그리고 $x > X$라고 하자.

그러면 $x > X_1$이면서 $x > X_2$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

만약 $k = 0$이라면, $X = 1$로 두자. 그러면 $x > X$인 모든 x에 대하여

$$|kf(x) - kL| = 0 < \epsilon$$

이 성립하므로 증명이 끝난다.

이제 $k \ne 0$인 경우를 증명하자.

$\frac{\epsilon}{|k|}$이 양수이고, $x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 실수 X가 존재한다:

“$x > X$일 때마다 $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}$이다.”

이와 같은 실수 X에 대하여, $x > X$일 때 다음이 성립한다.

$$|kf(x) - kL| = |k| \times |f(x) - L| = |k| \times \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

□

문제 23. $\{a_n\}$이 유계인 수열이고 $\{b_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 수열일 때, 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-\infty$

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.
$\{a_n\}$이 유계인 수열이므로, "모든 n에 대하여 $|a_n|<A$"인 양수 A가 존재한다.
또한 $\{b_n\}$이 양의 무한대로 발산하므로 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다:

"$n>N$일 때마다 $b_n>B+A$이다."

이와 같은 자연수 N에 대하여, $n>N$일 때 다음이 성립한다.

$$a_n+b_n>-A+b_n>-A+(B+A)=B.$$ □

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-\infty$

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.
$\{a_n\}$이 유계인 수열이므로, "모든 n에 대하여 $|a_n|<A$"인 양수 A가 존재한다.
또한 $\{b_n\}$이 양의 무한대로 발산하므로 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다:

"$n>N$일 때마다 $b_n>A-B$이다."

이와 같은 자연수 N에 대하여, $n>N$일 때 다음이 성립한다.

$$a_n-b_n<A-b_n<A-(A-B)=B.$$ □

문제 24. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수열이고 모든 n에 대하여 $a_n\le b_n$이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) 만약 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다.

(2) 만약 $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$이다.

(1) 만약 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하므로 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다:

"$n>N$인 모든 n에 대하여 $a_n>B$이다."

이와 같은 자연수 N에 대하여, $n>N$일 때 다음이 성립한다.

$$b_n\ge a_n>B.$$ □

(2) 만약 $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$이다.

풀이 실수 B가 임의로 주어졌다고 하자. $\{b_n\}$이 음의 무한대로 발산하므로 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다:

"$n > N$인 모든 n에 대하여 $b_n < B$이다."

이와 같은 자연수 N에 대하여, $n > N$일 때 다음이 성립한다.

$$a_n \le b_n < B.$$

□

문제 25. I가 열린구간이고 c가 I의 점이며, 함수 f, g, h가 I에서 정의되어 있다고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le g(x)$이고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

이면 $L \le M$이다.

(2) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고 L이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

이면, $x \to c$일 때 $g(x)$가 수렴하고 $\lim_{x \to c} g(x) = L$이다.

---

(1) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le g(x)$이고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

이면 $L \le M$이다.

풀이 결론과는 반대로 $M < L$이라고 가정하자. 그리고

$$\epsilon = \frac{L-M}{2}$$

이라고 하자. 그러면 ϵ은 양수이다.

$x \to c$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

"$0 < |x-c| < \delta_1$일 때 $|f(x)-L| < \epsilon$이다."

$x \to c$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로 다음을 만족시키는 양수 δ_2가 존재한다:

"$0 < |x-c| < \delta_2$일 때 $|g(x)-M| < \epsilon$이다."

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 하자. 그리고 $0 < |x-c| < \delta$인 x를 택하자.

그러면 $|f(x)-L| < \epsilon = \dfrac{L-M}{2}$이므로 $f(x)-L > -\dfrac{L-M}{2}$ 즉 다음 부등식이 성립한다.

$$f(x) > \frac{L+M}{2}$$

또한 $|g(x)-M| < \epsilon = \dfrac{L-M}{2}$이므로 $g(x)-M < \dfrac{L-M}{2}$ 즉 다음 부등식이 성립한다.

$$g(x) < \frac{L+M}{2}$$

두 부등식을 결합하면

$$g(x) < \frac{L+M}{2} < f(x)$$

이다. 이것은 $f(x) \le g(x)$라는 가정에 모순이다. 그러므로 $M < L$일 수 없다. □

(2) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고 L이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

이면, $x \to c$일 때 $g(x)$가 수렴하고 $\lim_{x \to c} g(x) = L$이다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
$x \to c$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

"$0 < |x-c| < \delta_1$인 임의의 x에 대하여 $|f(x)-L| < \epsilon$이다."

$x \to c$일 때 $h(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

"$0 < |x-c| < \delta_2$인 임의의 x에 대하여 $|h(x)-L| < \epsilon$이다."

$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$라고 하자. 그러면 δ는 양수이다.
$0 < |x-c| < \delta$인 임의의 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$-\epsilon < f(x)-L \le g(x)-L \le h(x)-L < \epsilon$$

이 부등식으로부터 $|g(x)-L| < \epsilon$을 얻는다.
즉 $0 < |x-c| < \delta$일 때 $|g(x)-L| < \epsilon$이 성립하므로, $g(x)$는 L에 수렴한다. □

문제 26. I가 위로 유계가 아닌 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있으며 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 I에 속한다고 하자. 만약 L이 실수이고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

이면

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$$

임을 보이시오.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
$x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 실수 X가 존재한다.

"$x > X$인 임의의 x에 대하여 $|f(x)-L| < \epsilon$이다."

수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

"$n > N$인 임의의 n에 대하여 $a_n > X$이다."

이와 같은 자연수 N에 대하여, $n > N$일 때 $a_n > X$이므로

$$|f(a_n)-L| < \epsilon$$

이 성립한다. □

문제 27. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하는 수열이고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (단, 모든 n에 대하여 $b_n \neq 0$이고 $M \neq 0$)

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
$\{a_n\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_1이 존재한다:

$$\text{“}n > N_1\text{일 때 } |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2(|M|+1)}\text{이다.”}$$

$\{b_n\}$이 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다:

$$\text{“}n > N_2\text{일 때 } |b_n - M| < \frac{\epsilon}{2(|L|+1)}\text{이다.”}$$

$\{b_n\}$이 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_3이 존재한다:

$$\text{“}n > N_3\text{일 때 } |b_n - M| < 1\text{이다.”}$$

$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$이라고 하자. 그러면 $n > N$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - LM| &= |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LM| \\
&\leq |a_n b_n - Lb_n| + |Lb_n - LM| \\
&= |a_n - L||b_n| + |b_n - M||L| \\
&< |a_n - L|(|M|+1) + |b_n - M|(|L|+1) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (단, 모든 n에 대하여 $b_n \neq 0$이고 $M \neq 0$)

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\{a_n\}$이 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_1이 존재한다:

$$\text{“}n > N_1\text{일 때 } |a_n - L| < \frac{|M|}{4}\epsilon\text{이다.”}$$

$\{b_n\}$이 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다:

$$\text{“}n > N_2\text{일 때 } |b_n - M| < \frac{M^2}{4(|L|+1)}\epsilon\text{이다.”}$$

$\{b_n\}$이 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 자연수 N_3이 존재한다:

$$\text{“}n > N_3\text{일 때 } |b_n - M| < \frac{|M|}{2}\text{이다.”}$$

$N = \max\{N_1,\ N_2,\ N_3\}$이라고 하자. 그리고 $n > N$이라고 하자.

우선

$$|M| - |b_n| \le |M - b_n| < \frac{|M|}{2}$$

이므로

$$|M| - \frac{|M|}{2} < |b_n|$$

즉

$$|b_n| > \frac{|M|}{2}$$

이 성립한다. 이 부등식의 양변에 $|M|$을 곱하고, 분모와 분자를 바꾸면 다음 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{|b_n M|} < \frac{2}{M^2}$$

그러므로 $n > N$인 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L}{M}\right| &= \left|\frac{a_n M - b_n L}{b_n M}\right| < \frac{2}{|M|^2}|a_n M - b_n L| \\
&= \frac{2}{M^2}|a_n M - LM + LM - b_n L| \\
&\le \frac{2}{M^2}(|a_n - L||M| + |b_n - M||L|) \\
&= \frac{2}{|M|}|a_n - L| + \frac{2|L|}{M^2}|b_n - M| \\
&< \frac{2}{|M|} \times \frac{|M|}{4}\epsilon + \frac{2|L|}{M^2} \times \frac{M^2}{4(|L|+1)}\epsilon \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

문제 28. 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때 수렴하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,\quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = LM$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (단, $M \neq 0$)

(1) $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = LM$

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_1 \text{일 때 } |f(x)-L| < \frac{\epsilon}{2(|M|+1)} \text{이다.”}$$

$x \to a$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_2가 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_2 \text{일 때 } |g(x)-M| < \frac{\epsilon}{2(|L|+1)} \text{이다.”}$$

$x \to a$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_3이 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_3 \text{일 때 } |g(x)-M| < 1 \text{이다.”}$$

$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\ \delta_3\}$이라고 하자. 그러면 $0 < |x-a| < \delta$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-LM| &= |f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LM| \\ &\le |f(x)g(x)-Lg(x)| + |Lg(x)-LM| \\ &= |f(x)-L||g(x)| + |g(x)-M||L| \\ &< |f(x)-L|(|M|+1) + |g(x)-M|(|L|+1) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

(2) $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (단, $M \neq 0$)

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_1 \text{일 때 } |f(x)-L| < \frac{|M|}{4}\epsilon \text{이다.”}$$

$x \to a$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_2가 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_2 \text{일 때 } |g(x)-M| < \frac{M^2}{4(|L|+1)}\epsilon \text{이다.”}$$

$x \to a$일 때 $g(x)$가 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_3이 존재한다:

$$\text{“}0 < |x-a| < \delta_3 \text{일 때 } |g(x)-M| < \frac{|M|}{2} \text{이다.”}$$

$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\ \delta_3\}$이라고 하자. 그리고 $0 < |x-a| < \delta$라고 하자.

우선

$$|M| - |g(x)| \le |M - g(x)| < \frac{|M|}{2}$$

이므로

$$|M| - \frac{|M|}{2} < |g(x)|$$

즉

$$|g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

이 성립한다. 이 부등식의 양변에 $|M|$을 곱하고, 분모와 분자를 바꾸면 다음 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{|g(x)M|} < \frac{2}{M^2}$$

그러므로 $0 < |x-a| < \delta$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = \left|\frac{f(x)M - g(x)L}{g(x)M}\right| &< \frac{2}{|M|^2}|f(x)M - g(x)L| \\ &= \frac{2}{M^2}|f(x)M - LM + LM - g(x)L| \\ &\le \frac{2}{M^2}(|f(x)-L||M| + |g(x)-M||L|) \\ &= \frac{2}{|M|}|f(x)-L| + \frac{2|L|}{M^2}|g(x)-M| \\ &< \frac{2}{|M|}\times\frac{|M|}{4}\epsilon + \frac{2|L|}{M^2}\times\frac{M^2}{4(|L|+1)}\epsilon \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

문제 29. 수열 $\{e_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1) x가 실수이고 n이 자연수이며 $x > -1$이고 $n > 2$일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

(2) n이 $n > 2$인 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

(3) n이 $n > 2$인 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

(4) n이 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

(5) 단조수렴 정리를 사용하여 수열 $\{e_n\}$이 수렴함을 보이시오.

풀이

(1) 베르누이 부등식에 의하여 성립한다. (n에 대한 수학적 귀납법으로 증명하면 된다.)

(2) (1)의 부등식에 $x = -\frac{1}{n^2}$을 대입하면 $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$을 얻는다.

(3) (2)에서 얻은 부등식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n} &\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

(4) 이항 정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+n\times\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &\le 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\cdots+\frac{1}{2\times 2\times\cdots\times 2}\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

(5) (4)에서 얻은 식의 마지막 합은 두 번째 항부터 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 합이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \le 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

이다. 그러므로 $\{e_n\}$은 위로 유계이다. 한편 (3)에서 얻은 부등식에 의하여 $\{e_n\}$이 증가수열이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 $\{e_n\}$이 수렴한다. □

문제 30. I가 길이가 양수인 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 구간 I에서 함수 f가 단조라고 하자.

(1) c가 구간 I에 있는 점이고 I의 왼쪽 끝점은 아니라고 하자. 그러면 c에서 f의 좌극한이 존재함을 보이시오.

(2) c가 구간 I에 있는 점이고 I의 오른쪽 끝점은 아니라고 하자. 그러면 c에서 f의 우극한이 존재함을 보이시오.

이와 같은 성질을 **함수의 점 극한의 단조수렴 정리**라고 부른다.

풀이 f가 I에서 단조증가함수일 때의 증명은 다음과 같다.

(1) $E=\{f(x)\mid x\in I,\ x<c\}$라고 하자. I의 원소 중에 c보다 작은 것이 존재하므로 E는 공집합이 아니다. 또한 E의 모든 원소는 $f(c)$보다 크지 않으므로, E는 위로 유계이다. 따라서 실수계의 최소상계 성질에 의하여 E의 최소상계가 존재한다. E의 최소상계를 L이라고 하자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $L-\epsilon$은 E의 최소상계보다 작은 값이므로 E의 원소 중에 $L-\epsilon$보다 큰 것이 존재한다. 즉 $L-\epsilon<f(d)\leq L$이면서 $d<c$인 점 d가 I에 존재한다.

$\delta=c-d$라고 하자. 그러면 $0<c-x<\delta$인 $x\in I$에 대하여 다음이 성립한다.

$$L-\epsilon<f(d)=f(c-\delta)\leq f(x)\leq L<L+\epsilon.$$

이 부등식을 변형하면 $|f(x)-L|<\epsilon$이다.

그러므로 $x\to c-$일 때 $f(x)$는 L에 수렴한다. □

(2) $E=\{f(x)\mid x\in I,\ c<x\}$라고 하자. I의 원소 중에 c보다 큰 것이 존재하므로 E는 공집합이 아니다. 또한 E의 모든 원소는 $f(c)$보다 작지 않으므로, E는 아래로 유계이다. 따라서 실수계의 최대하계 성질에 의하여 E의 최대하계가 존재한다. E의 최대하계를 L이라고 하자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $L+\epsilon$은 E의 최대하계보다 큰 값이므로 E의 원소 중에 $L+\epsilon$보다 작은 것이 존재한다. 즉 $L\leq f(d)<L+\epsilon$이면서 $c<d$인 점 d가 I에 존재한다.
$\delta=d-c$라고 하자. 그러면 $0<x-c<\delta$인 $x\in I$에 대하여 다음이 성립한다.

$$L+\epsilon>f(d)=f(c+\delta)\geq f(x)\geq L>L-\epsilon.$$

이 부등식을 변형하면 $|f(x)-L|<\epsilon$이다.

그러므로 $x\to c+$일 때 $f(x)$는 L에 수렴한다. □

f가 I에서 단조감소한다면, $g(x)=-f(x)$라고 두면 g는 I에서 단조증가하는 함수가 되므로, g에 (1), (2)의 방법을 적용하여 c에서 $g(x)$의 좌극한과 우극한이 존재함을 증명할 수 있다.

문제 31. I가 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자.
(1) 구간 I가 위로 유계가 아니고, 구간 I에서 함수 f가 단조이고 유계라고 하자. $x\to\infty$일 때 $f(x)$가 수렴함을 보이시오.
(2) 구간 I가 아래로 유계가 아니고, 구간 I에서 함수 f가 단조이고 유계라고 하자. $x\to-\infty$일 때 $f(x)$가 수렴함을 보이시오.
이와 같은 성질을 **함수의 무한대 극한의 단조수렴 정리**라고 부른다.

풀이 f가 단조증가하는 경우만 증명해도 충분하다. 왜냐하면 f가 단조감소한다면 $g(x)=-f(x)$라고 두면 g가 단조증가하는 함수가 되며, g가 수렴하는 것과 f가 수렴하는 것이 필요충분조건이 되기 때문이다.

(1) $E=\{f(x)\mid x\in I\}$라고 하자. E가 공집합이 아니고 위로 유계이므로, 실수계의 최소상계 성질에 의하여 E의 최소상계가 존재한다. E의 최소상계를 L이라고 하자.
양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $L-\epsilon$은 E의 최소상계보다 작은 수이므로, $L-\epsilon$보다 큰 E의 원소가 존재한다. 즉 $L-\epsilon<f(X)$인 점 X가 I에 존재한다.

$x > X$라고 하자. 그러면

$$L-\epsilon < f(X) \leq f(x) \leq L < L+\epsilon$$

이므로 $|f(x)-L| < \epsilon$이다. 그러므로 $x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 수렴한다. □

(2) $E=\{f(x)\mid x\in I\}$라고 하자. E가 공집합이 아니고 아래로 유계이므로, 실수계의 최대하계 성질에 의하여 E의 최대하계가 존재한다. E의 최대하계를 L이라고 하자.
양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $L+\epsilon$은 E의 최대하계보다 작은 수이므로, $L+\epsilon$보다 작은 E의 원소가 존재한다. 즉 $f(X) < L+\epsilon$인 점 X가 I에 존재한다.
$x < X$라고 하자. 그러면

$$L+\epsilon > f(X) \geq f(x) \geq L > L-\epsilon$$

이므로 $|f(x)-L| < \epsilon$이다. 그러므로 $x \to -\infty$일 때 $f(x)$가 L에 수렴한다. □

문제 32. '극한의 유일성'의 개념을 조사해 보자. 또한 수열의 극한의 유일성과 함수의 극한의 유일성을 각각 증명해 보자.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다면, $\{a_n\}$은 L이 아닌 다른 값에 수렴하지 않는다. 즉 수렴하는 수열의 극한은 유일하다. 이와 같은 성질을 **수열의 극한의 유일성**이라고 부른다.

수렴하는 함수의 극한도 마찬가지로 유일하다. 즉 $x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴한다면, $x \to a$일 때 $f(x)$는 L이 아닌 다른 값에 수렴하지 않는다. 여기서 $x \to a$를 좌극한이나 우극한, 또는 $x \to \infty$나 $x \to -\infty$로 바꾸어도 극한의 유일성이 성립한다.

수렴하는 수열의 극한값과 수렴하는 함수의 극한값을 '등호'를 사용하여 나타내는 것은 극한의 유일성이 보장되기 때문에 가능한 것이다.

수열의 극한의 유일성 증명 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다고 가정하자. 그리고 수열 $\{a_n\}$이 M에 수렴한다고 가정하자. 이제 $L=M$임을 보이면 된다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\{a_n\}$이 L에 수렴하므로 다음을 만족시키는 자연수 N_1이 존재한다.

"$n > N_1$일 때 $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$\{a_n\}$이 M에 수렴하므로 다음을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다.

"$n > N_2$일 때 $|a_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$이다."

$N=\max\{N_1,\ N_2\}$라고 하자. 그리고 $n > N$이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$|L-M| = |L-a_n+a_n-M| \leq |L-a_n| + |a_n-M| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

즉 임의의 양수 ϵ에 대하여 $|L-M| < \epsilon$이 성립한다. 이것은 $L=M$일 때만 가능하다.
그러므로 $L=M$이다. □

함수의 극한의 유일성 증명 $x \to a$인 극한만 증명하겠다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴한다고 가정하자. 그리고 $x \to a$일 때 $f(x)$가 M에 수렴한다고 가정하자. 이제 $L = M$임을 보이면 된다.

수열의 극한의 유일성과 같은 방법으로 증명해도 되지만, 여기서는 살짝 다르게 해보겠다.

결론과는 반대로 $L \neq M$이라고 가정하자. 그러면 $L < M$이거나 $L > M$이다.

$L < M$인 경우를 생각하자. $\epsilon = \dfrac{M-L}{2}$이라고 두자. 그러면 ϵ은 양수이다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_1이 존재한다.

"$0 < |x-a| < \delta_1$일 때 $|f(x)-L| < \epsilon$이다."

$x \to a$일 때 $f(x)$가 M에 수렴하므로, 다음을 만족시키는 양수 δ_2가 존재한다.

"$0 < |x-a| < \delta_2$일 때 $|f(x)-M| < \epsilon$이다."

$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$라고 하자. 그리고 $0 < |x-a| < \delta$인 x를 택하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$f(x) < L + \epsilon = L + \frac{M-L}{2} = M - \frac{M-L}{2} = M - \epsilon < f(x).$$

이것은 $f(x) < f(x)$를 뜻하므로, 이와 같은 부등식은 모순이다. 그러므로 $L < M$일 수 없다.
마찬가지로 L과 M의 역할을 바꾸어 증명하면 $M < L$도 불가능함을 보일 수 있다.
따라서 $L = M$일 수밖에 없다. □

한 걸음 더 수열의 극한의 유일성을 다음과 같이 증명하면 무엇이 잘못되었을까?

> L과 M이 수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 극한이라고 하자. 그러면
> $$L = \lim_{n \to \infty} a_n = M$$
> 이므로 $L = M$이다.

> L과 M이 수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 극한이라고 하자. 그러면
> $$L - M = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (a_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$
> 이므로 $L - M = 0$ 즉 $L = M$이다.