미적분학 첫걸음 2022년판 0단원

미적분학을 공부하기 위한 준비 연습문제 해설

(2022년 9월 22일 수정)

문제 1. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 이때 'E의 최댓값'과 'E의 최소상계'의 차이를 설명하시오.

풀이 최댓값과 최소상계의 차이점은 다음과 같다. 첫째, 집합 E의 최댓값이 존재한다면 그것은 반드시 E에 속한다. 그러나 E의 최소상계가 존재하더라도 그것은 E에 속하지 않을 수 있다. 둘째, 집합 E가 공집합이 아니면서 위로 유계라면 E의 최소상계가 반드시 존재한다. 그러나 E가 공집합이 아니면서 위로 유계일지라도 E의 최댓값은 존재하지 않을 수 있다.

문제에서 묻지는 않았지만, 최댓값과 최소상계의 특징은 다음과 같다. 첫째, 집합 E의 최댓값이 존재한다면, 그것은 단 하나만 존재한다. 마찬가지로 E의 최소상계가 존재한다면, 그것은 단 하나만 존재한다. 둘째, 집합 E의 최댓값이 존재한다면 그것은 최소상계와 일치한다. □

문제 2. 다음 집합의 최소상계와 최대하계를 구하시오. (구한 값이 최소상계 또는 최대하계가 되는 이유를 설명하시오.)

(1) $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(2) $[-3,\ 8]$

(3) $[4,\ 12)$

(4) $(-\sqrt{2},\ 6]$

(5) $(\pi,\ 7)$

(6) $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$

(7) $[\pi,\ 7)\setminus\mathbb{Q}$

(8) $\mathbb{N}$

풀이

집합	최댓값	최솟값	최소상계	최대하계
(1) $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$	9	2	9	2
(2) $[-3,\ 8]$	8	-3	8	-3
(3) $[4,\ 12)$	존재하지 않는다.	4	12	4
(4) $(-\sqrt{2},\ 6]$	6	존재하지 않는다.	6	$-\sqrt{2}$
(5) $(\pi,\ 7)$	존재하지 않는다.	존재하지 않는다.	7	π
(6) $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$	존재하지 않는다.	존재하지 않는다.	7	π
(7) $[\pi,\ 7)\setminus\mathbb{Q}$	존재하지 않는다.	π	7	π
(8) $\mathbb{N}$	존재하지 않는다.	1	존재하지 않는다.	1

대표가 될 만한 두 가지 경우만 그 이유를 설명하겠다.

(3) 최댓값이 존재하지 않는 이유는 다음과 같다. 만약 $[4,\ 12)$의 최댓값 M이 존재한다면, $M\geq 12$ 또는 $M<12$ 중 하나가 성립한다. 만약 $M\geq 12$라면 M은 $[4,\ 12)$의 원소가 아니므로 최댓값이 될 수 없다. 만약 $M<12$라면, M과 12 사이에 $[4,\ 12)$의 원소가 반드시 존재한다(실수의 조밀성). 그러므로 M은 $[4,\ 12)$의 최댓값이 될 수 없다. 따라서 어떤 값도 $[4,\ 12)$의 최댓값이 될 수 없다.

(6) 7이 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 최소상계인 이유는 다음과 같다. 먼저 7은 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 어떠한 원소보다도 크기 때문에, 7이 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 상계이다. 또한 7보다 작은 수 m이 있다면, 유리수의 조밀성에 의하여 $m<q<7$인 유리수 q가 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$에 존재한다. 이것은 7보다 작은 수가 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 상계가 될 수 없음을 의미한다. 그러므로 7은 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 상계 중 가장 작은 값이다. 즉 7이 $(\pi,\ 7)\cap\mathbb{Q}$의 최소상계이다. □

문제 3. $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 5\}$일 때 다음을 구하시오.

(1) $A\times B$ (2) $B\times A$

(3) $A\times A$ (4) $B\times B$

풀이

(1) $A\times B=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (4,\ 3),\ (4,\ 5),\ (6,\ 3),\ (6,\ 5)\}$

(2) $B\times A=\{(3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6)\}$

(3) $A\times A=\{(2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 6),\ (6,\ 2),\ (6,\ 4),\ (6,\ 6)\}$

(4) $B\times B=\{(3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (5,\ 5)\}$ □

문제 4. $A_i=\{n\in\mathbb{N}\mid n\le i\}$일 때 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4}A_i$ (2) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4}A_i$

(3) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{4}A_{2j}$ (4) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{4}A_{3k}$

(5) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{3}\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{4-i}\right)$ (6) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{5}\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j\right)$

풀이 (1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\{1\}\cup\{1,\ 2\}\cup\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{1\}$.

(3) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{4}A_{2j}=A_2\cup A_4\cup A_6\cup A_8=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$.

(4) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{4}A_{3k}=A_3\cap A_6\cap A_9\cap A_{12}=\{1,\ 2,\ 3\}$.

(5) $$\bigcup_{k=1}^{3}\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{4-i}\right)=\left(\bigcap_{i=1}^{1}A_{4-i}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{2}A_{4-i}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{3}A_{4-i}\right)$$
$$=A_3\cup(A_3\cap A_2)\cup(A_3\cap A_2\cap A_1)=A_3\cup A_2\cup A_1=A_3=\{1,\ 2,\ 3\}.$$

(6) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{5}\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j\right)=\left(\bigcup_{j=1}^{3}A_j\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{4}A_j\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{5}A_j\right)=A_3\cap A_4\cap A_5=A_3=\{1,\ 2,\ 3\}$. □

문제 5. 다음 집합의 최소상계와 최대하계를 구하시오. (구한 값이 최소상계 또는 최대하계가 되는 이유를 설명하시오.)

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

(3) $\left\{\left(-\dfrac{1}{n}\right)^n\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ (4) $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

풀이

집합	최댓값	최솟값	최소상계	최대하계
(1) $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	1	존재하지 않는다.	1	0
(2) $B=\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	존재하지 않는다.	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
(3) $C=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
(4) $D=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	$\frac{3}{2}$	존재하지 않는다.	$\frac{3}{2}$	-1

대표가 될 만한 두 가지 경우만 그 이유를 설명하겠다.

(1) A의 최솟값이 존재하지 않는 이유: m이 실수라고 하자. 그러면 $m\le 0$ 또는 $m>0$이다. 만약 $m\le 0$이라면 m은 A에 속하지 않으므로, A의 최솟값이 될 수 없다. 만약 $m>0$이라면, $n>\frac{1}{m}$인 자연수 n이 존재하므로 $m>\frac{1}{n}$이다. 즉 m보다 더 작으면서 A에 속하는 원소가 존재하므로, m은 A의 최솟값이 될 수 없다. 어느 경우에도 m이 A의 최솟값이 될 수 없으므로, A의 최솟값이 존재하지 않는다.

(4) D의 최대하계가 -1인 이유: D의 모든 원소는 -1보다 크므르, -1은 D의 하계이다. 만약 m이 -1보다 큰 수라면 $m-(-1)$은 양수이다. 홀수인 자연수의 집합은 위로 유계가 아니므로,

$$n>\frac{1}{m-(-1)}$$

이고 홀수인 자연수 n이 존재한다. 이때 $m-(-1)>\frac{1}{n}$이므로

$$m>(-1)+\frac{1}{n}=(-1)^n+\frac{1}{n}$$

이 성립한다. 이것은 m보다 작으면서 D에 속하는 원소가 존재함을 의미한다. 그러므로 m은 D의 하계가 될 수 없다. 즉 -1보다 큰 수는 D의 하계가 될 수 없다. 따라서 -1은 D의 최대하계이다. □

문제 6. $A_i=\{n\in\mathbb{N}\mid n\le i\}$, $I=\{1,2,3\}$일 때 다음 집합의 원소의 수를 구하시오.

(1) $A_2\times A_3$

(2) $A_3\times A_4$

(3) $\bigcup_{k=1}^{3}(A_k\times A_{k+1})$

(4) $\bigcap_{k=1}^{3}(A_k\times A_{k+1})$

(5) $\left(\bigcup_{k\in I}A_k\right)\times\left(\bigcup_{k\in I}A_{k+1}\right)$

(6) $\left(\bigcap_{k\in I}A_k\right)\times\left(\bigcap_{k\in I}A_{k+1}\right)$

풀이 A와 B가 유한집합일 때 $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$가 성립한다. 이 공식을 사용하자.

(1) $n(A_2\times A_3)=n(A_2)\times n(A_3)=2\times 3=6$.

(2) $n(A_3\times A_4)=n(A_3)\times n(A_4)=3\times 4=12$.

(3) $\bigcup_{k=1}^{3}(A_k\times A_{k+1})=(A_1\times A_2)\cup(A_2\times A_3)\cup(A_3\times A_4)$이다.

그런데 $A_1\times A_2\subset A_2\times A_3\subset A_3\times A_4$이므로 $\bigcup_{k=1}^{3}(A_k\times A_{k+1})=A_3\times A_4$이다.

따라서 $n\left(\bigcup_{k=1}^{3}(A_k \times A_{k+1})\right) = n(A_3 \times A_4) = n(A_3) \times n(A_4) = 3 \times 4 = 12.$

(4) 앞의 (3)과 같은 이유에 의하여 $\bigcap_{k=1}^{3}(A_k \times A_{k+1}) = A_1 \times A_2$이다.

따라서 $n\left(\bigcap_{k=1}^{3}(A_k \times A_{k+1})\right) = n(A_1 \times A_2) = 1 \times 2 = 2.$

(5) $\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) \times \left(\bigcup_{k\in I} A_{k+1}\right) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \times (A_2 \cup A_3 \cup A_4) = A_3 \times A_4$이므로

$n\left(\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) \times \left(\bigcup_{k\in I} A_{k+1}\right)\right) = n(A_3 \times A_4) = 3 \times 4 = 12.$

(6) $\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) \times \left(\bigcap_{k\in I} A_{k+1}\right) = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times (A_2 \cap A_3 \cap A_4) = A_1 \times A_2$이므로

$n\left(\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) \times \left(\bigcap_{k\in I} A_{k+1}\right)\right) = n(A_1 \times A_2) = 1 \times 2 = 2.$ □

문제 7. a가 양수라고 하자. 이때 임의의 실수 b에 대하여, $na > b$인 자연수 n이 존재함을 보이시오.
[자연수 집합이 위로 유계가 아니라는 성질을 사용한다.]

풀이 자연수 집합이 위로 유계가 아니므로 $n > \frac{b}{a}$인 자연수 n이 존재한다. 이 부등식의 양변에 a를 곱하면 $na > b$를 얻는다. □

문제 8. x가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $|x| < \epsilon$이 성립하면, $x = 0$임을 보이시오.
[$x \neq 0$이라고 가정하고 모순을 끌어낸다.]

풀이 $x \neq 0$이라고 가정하자. 그러면 $|x|$는 양수이다. 실수의 조밀성에 의하여 $0 < \epsilon < |x|$인 실수 ϵ이 존재한다. 이것은 '임의의' 양수 ϵ에 대하여 $|x| < \epsilon$이 성립한다는 문제의 가정에 모순이다. 그러므로 $x \neq 0$일 수 없다. 즉 $x = 0$이다. □

문제 9. x와 y가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x < y + \epsilon$이 성립하면, $x \leq y$임을 보이시오. [$x > y$라고 가정하고 모순을 끌어낸다.]

풀이 $x > y$라고 가정하자. 그러면 $x - y$는 양수이다. 실수의 조밀성에 의하여 $0 < \epsilon < x - y$인 실수 ϵ이 존재한다. 이 부등식을 변형하면 $x > y + \epsilon$이다. 이것은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x < y + \epsilon$이 성립한다는 문제의 가정에 모순이다. 그러므로 $x > y$일 수 없다. 즉 $x \leq y$이다. □

문제 10. A와 B가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $A \subset B$라고 하자. 만약 A가 위로 유계가 아니면, B도 위로 유계가 아님을 증명하시오. [대우를 증명한다.]

풀이 결론과는 반대로 B가 위로 유계라고 가정하자. 그러면 "B의 모든 원소 x에 대하여 $x \leq m$"을 만족시키는 실수 m이 존재한다. 만약 x가 A의 원소라면 x는 B의 원소이므로 $x \leq m$이 성립한다. 즉 m이 A의 상계이고, A가 위로 유계이다. 이것은 A가 위로 유계가 아니라는 문제의 가정에 모순이다. 따라서 B가 위로 유계

일 수 없다. □

문제 11. A와 B가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 $A \subset B$라고 하자. 만약 B가 위로 유계이고 B의 최소상계가 b이면, A도 위로 유계이고 A의 최소상계가 b 이하임을 증명하시오.
[b가 A의 상계라는 사실을 증명하면 충분하다.]

풀이 $A \subset B$이고 b가 B의 상계일 때 b가 A의 상계가 된다는 사실을 문제 10의 풀이에서 증명하였다. A의 최소상계를 a라고 하자. 최소상계는 상계 중 가장 작은 값이고 b가 A의 상계이므로 $a \le b$이다. □

문제 12. 집합 A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고, 공집합이 아니며, 위로 유계라고 하자. 그리고 A의 최소상계를 a라고 하자. $B = \{-x \mid x \in A\}$일 때, B의 최대하계가 $-a$임을 증명하시오.
[먼저 B가 아래로 유계임을 보인다. 그 후 $-a$가 B의 최대하계임을 보인다.]

풀이 먼저 $-a$가 B의 하계임을 보이자. $-x$가 B의 원소라고 하자. 그러면 $x \in A$이고 a가 A의 상계이므로 $x \le a$ 즉 $-x \ge -a$이다. 이것은 $-a$가 B의 하계임을 뜻한다.
이제 $-a$가 B의 하계 중 가장 큰 값임을 증명하자. b가 $-a$보다 큰 값이라고 하자. 그러면 $-a < b$이므로 $a > -b$이다. a가 A의 최소상계이고 $-b$가 a보다 작으므로 $-b < x \le a$인 원소 x가 A에 존재한다. 이 부등식으로부터 $b > -x$를 얻는다. 그런데 $-x$는 B의 원소이다. 이것은 b보다 더 작은 B의 원소가 존재한다는 뜻이므로, b는 B의 하계가 될 수 없다.
그러므로 $-a$는 B의 최대하계이다. □

문제 13. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 아래로 유계라고 하자. 이때 E의 최대하계가 $\mathbb{R}$에 존재함을 보이시오. [실수계의 최소상계 성질과 바로 앞의 문제의 결과를 사용한다.]

풀이 $B = \{-x \mid x \in E\}$라고 하자. E가 공집합이 아니므로 B는 공집합이 아니다. 또한, m이 E의 하계라면 $-m$이 B의 상계가 되므로(문제 12의 풀이와 같은 방법), B는 위로 유계이다. 따라서 실수계의 최소상계 성질에 의하여 B의 최소상계 s가 존재한다.
$E = \{-y \mid y \in B\}$이고 s가 B의 최소상계이므로, 문제 12의 결과에 의하여 $-s$는 E의 최대하계이다. □

문제 14. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 유한집합이라고 하자. 이때 E의 최댓값과 최솟값이 존재함을 증명하시오. [E의 원소의 개수를 n이라고 두고 수학적 귀납법을 사용한다.]

풀이 "E의 원소의 개수가 n일 때, E의 최댓값과 최솟값이 존재한다."라는 문장을 $p(n)$이라고 하자. 이제 수학적 귀납법을 사용하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참임을 보이자.
먼저 $p(1)$은 참이다. 왜냐하면 원소가 하나인 집합은 $E = \{x_1\}$과 같이 나타낼 수 있는데, 이때 x_1이 E의 최댓값이면서 최솟값이기 때문이다.
이제 k가 자연수이고 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 그리고 E가 $k+1$개의 원소를 가진 집합이라고 하자. 즉 $E = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$이라고 하자. $E_k = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}$라고 하면 $E = E_k \cup \{x_{k+1}\}$이다. E_k는 k개의 원소를 가진 집합이므로, 귀납적 가정[$p(k)$가 참이라는 가정]에 의하여 E_k의 최댓값 M과

최솟값 m이 존재한다. 이때 M과 x_{k+1} 중 더 큰 값이 E의 최댓값이며, m과 x_{k+1} 중 더 작은 값이 E의 최솟값이다. 그러므로 E도 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉 $p(k+1)$이 참이다.
따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다. □

문제 15. E가 $\mathbb{N}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 아래로 유계라고 하자. 이때 E의 최솟값이 존재함을 증명하시오. [E가 공집합이 아니므로 E에 속하는 자연수 n이 존재한다. 그러므로 n에 대한 수학적 귀납법을 사용할 수 있다.]

풀이 "E가 $\mathbb{N}$의 부분집합이고 자연수 n을 원소로 가질 때, E의 최솟값이 존재한다."라는 문장을 $p(n)$으로 나타내자. 수학적 귀납법을 사용하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참임을 보이자.
먼저 $p(1)$은 참이다. 왜냐하면 $1 \in E$라면 1이 E의 최솟값이기 때문이다.
이제 k가 자연수이고, k 이하인 모든 자연수 i에 대하여 $p(i)$가 참이라고 가정하자. 그리고 E가 $\mathbb{N}$의 부분집합이며 $k+1$을 원소로 가진다고 하자. 만약 $1, 2, 3, \cdots, k$ 중에서 E의 원소가 존재하지 않는다면 $k+1$이 E의 최솟값이 된다. 만약 $1, 2, 3, \cdots, k$ 중에서 E의 원소가 존재한다면, $1, 2, 3, \cdots, k$ 중에서 E에 속하는 것만을 모은 집합을 E_k라고 하자. 그러면 E_k는 $1, 2, 3, \cdots, k$ 중에서 하나 이상을 원소로 가지므로, 귀납적 가정에 의하여 E_k의 최솟값이 존재한다. E_k의 최솟값을 m이라고 하자. 그러면 m은 E의 최솟값이 된다. 왜냐하면, E의 원소 중 E_k에 속하는 것은 m 이상이고, E의 원소 중 E_k에 속하지 않는 것은 모두 $k+1$ 이상이므로 m보다 크기 때문이다.
따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다. □

문제 16. 유리수의 조밀성을 증명하고자 한다. a와 b가 실수이고 $a < b$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.
(1) $(b-a)n > 1$인 자연수 n이 존재함을 보이시오.
(2) $b > 0$일 때, $(b-a)n > 1$이면서 $bn \le m$인 자연수 m과 n이 존재함을 보이시오.
(3) $b > 0$일 때, a와 b 사이에 유리수가 존재함을 보이시오. [(2)에서 $bn \le m$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 택하면 $(m-1)/n$이 a와 b 사이에 있는 유리수가 된다.]
(4) $b \le 0$일 때도 a와 b 사이에 유리수가 존재함을 보이시오. [a와 b에 같은 유리수 r를 더하여 $b+r > 0$이 되도록 만든 뒤, $a+r$와 $b+r$ 사이에 존재하는 유리수를 찾는다.]

풀이 먼저 $b > 0$인 경우를 증명하자.
자연수 집합이 위로 유계가 아니므로 $n > \dfrac{1}{b-a}$인 자연수 n이 존재한다.
또한 자연수 집합이 위로 유계가 아니므로 $bn \le m$인 자연수 m이 존재한다. 그러한 m 중에서 가장 작은 것을 택하자. 그러면 $bn > m-1$이 성립한다. 그러므로

$$b > \frac{m-1}{n} \tag{*}$$

이다. 한편

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \ge b - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a \tag{**}$$

이므로 (*)과 (**)를 결합하면

$$a < \frac{m-1}{n} < b$$

를 얻는다. 그러므로 $\frac{m-1}{n}$은 a와 b 사이에 있는 유리수이다.

다음으로 $b \le 0$인 경우를 증명하자.

$b+r > 0$인 자연수 r를 택하자. 그러면 앞의 증명 과정에 의하여 $a+r < q < b+r$인 유리수 q가 존재한다. 이때 $a < q-r < b$이므로, $q-r$는 a와 b 사이에 있는 유리수이다. □

문제 17. 무리수의 조밀성을 증명하고자 한다. a와 b가 실수이고 $a < b$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\sqrt{2}a$와 $\sqrt{2}b$ 사이에 0이 아닌 유리수가 존재함을 보이시오.

(2) r가 0이 아닌 유리수일 때 $r/\sqrt{2}$가 무리수임을 보이시오.

(3) a와 b 사이에 무리수가 존재함을 보이시오.

풀이 $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$이므로 유리수의 조밀성에 의하여 $\sqrt{2}a < r < \sqrt{2}b$이고 0이 아닌 유리수 r가 존재한다. 이때 $a < \frac{r}{\sqrt{2}} < b$이고 $\frac{r}{\sqrt{2}}$가 무리수이므로, $\frac{r}{\sqrt{2}}$는 a와 b 사이에 있는 무리수가 된다.

여기서 $\frac{r}{\sqrt{2}}$가 왜 무리수인가? 만약 $\frac{r}{\sqrt{2}}$가 유리수이고 $\frac{r}{\sqrt{2}} = q$라면, $\sqrt{2} = \frac{r}{q}$이다. 유리수를 0이 아닌 유리수로 나눈 결과는 유리수이므로 $\sqrt{2}$도 유리수이다. 이것은 모순이므로 $\frac{r}{\sqrt{2}}$는 무리수이다. □