가볍게 살펴보는 미분과 적분

함수의 적분

2021학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

- ✓ 역도함수와 부정적분
- ✓ 부정적분의 계산
- ✓ 정적분의 정의
- ✓ 정적분의 계산
- ✓ 도형의 넓이와 부피
- ✓ 물체의 운동

역도함수와 부정적분

두 함수 F와 f가 모두 구간 I에서 정의되었고, I의 모든 점에서 $F'(x) = f(x)$를 만족시킨다고 하자. 이때 함수 F를 f의 **역도함수**라고 부른다.

두 함수 F와 G가 함수 f의 역도함수라고 하자. 그러면 $F'(x) = f(x) = G'(x)$이므로

$$G'(x) - F'(x) = 0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수뿐이므로

$$G(x) - F(x) = (\text{상수})$$

즉

$$G(x) = F(x) + (\text{상수})$$

이다.

역도함수와 부정적분

보기 1. $f(x) = 3x^2$일 때 함수 f의 모든 역도함수를 구해 보자. 먼저 $F(x) = x^3$이라고 하면 $F'(x) = 3x^2 = f(x)$이므로 F는 f의 한 역도함수이다. 그러므로 f의 모든 역도함수는

$$3x^2 + C \qquad (C\text{는 상수})$$

꼴이다.

역도함수와 부정적분

함수 f의 모든 역도함수를 f의 **부정적분**이라고 부르고

$$\int f(x)dx$$

로 나타낸다. 이 기호는 하나의 함수를 나타내는 것이 아니라, f의 역도함수가 될 수 있는 모든 함수를 나타낸다. 예컨대

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C \quad (C\text{는 상수})$$

이다.

기호읽기 $\int f(x)dx$는 "integral $f\,x\,d\,x$"라고 읽는다.

부정적분의 계산

부정적분을 구하는 것은 미분의 역계산이므로, 부정적분의 성질은 대부분 미분의 성질로부터 얻을 수 있다.

정리 1. 함수 f와 g가 구간 I에서 정의되었고, I에서 f와 g의 역도함수가 각각 존재하면 다음이 성립한다.

(1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$, C는 임의의 상수.)

(2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 실수인 상수.)

(3) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(4) $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

부정적분의 계산

보기 **2.** 다음 식에서 C는 임의의 상수를 나타낸다.

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$.

(2) $\displaystyle\int 4x^3\,dx = x^4 + C$.

(3) $\displaystyle\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + C$.

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C$.

(5) $\displaystyle\int (x^5 + 4x^3 + 3x)dx = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{3x^2}{2} + C$.

부정적분의 계산

문제 **1.** 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (2x^3 + 3x^2 - x - 5)dx$

(2) $\int (x+2)(x+3)dx$

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx$

(4) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

부정적분의 계산

보기 3. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f'(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $f(1) = 5$를 만족시킨다고 하자. 이때 $f(x)$를 구해 보자. 먼저 $f'(x)$의 부정적분을 구하면

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4x + C \quad (C\text{는 상수})$$

이다. 그런데 $f(1) = 5$이므로

$$f(1) = 1 - 1 + 4 + C = 5$$

이다. 그러므로 $C = 1$이다. 따라서 구하는 함수는

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$$

이다.

부정적분의 계산

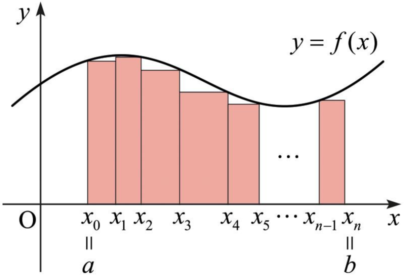
문제 **2.** 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f'(x) = -x^2 + x + 3$, $f(1) = 5$를 만족시킨다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

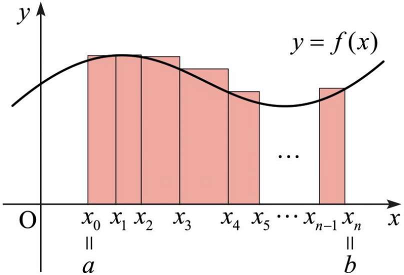
부정적분의 계산

문제 **3.** 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f''(x) = 6x - 8$, $f'(0) = 2$, $f(0) = -1$을 만족시킨다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

정적분의 정의

$I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 닫힌 구간이고 함수 f가 I에서 정의되었다고 하자. 또한 f가 I에서 연속이고 I 위에서 $f(x)\geq 0$이라고 하자.

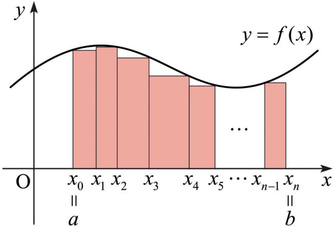


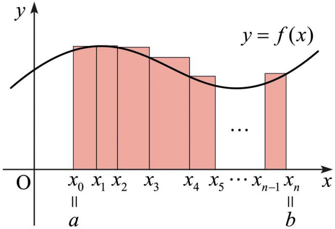


소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 f의 최솟값을 m_i, 최댓값을 M_i로 나타내자. 그러면 다음이 성립한다.

$$m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n\leq A\leq M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n$$

정적분의 정의





부등식의 왼쪽 합의 극한을 I에서 f의 **하적분**이라고 부르고, 오른쪽 합의 극한을 I에서 f의 **상적분**이라고 부른다. I에서 f의 하적분과 상적분이 일치할 때 "f는 I에서 **적분 가능**하다."라고 말한다. 그리고 그 값(하적분, 상적분)을 I에서 f의 **정적분** 또는 간단히 **적분**이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

기호읽기 "인테그랄 a에서 b까지 에프엑스 디엑스"라고 읽는다.

정적분의 정의

특히 $a = b$일 때는

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

으로 정의하고, $a > b$일 때는

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

로 정의한다.

정적분의 정의

두 가지 의문이 생긴다.

- 어떠한 함수가 적분 가능한가?
- 적분 가능한 함수가 있을 때, 적분을 어떻게 계산하는가?

정적분의 정의

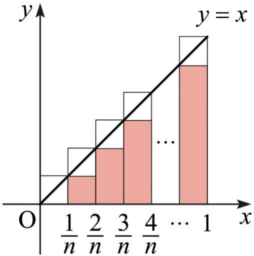
정리 2. I가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 정의된 함수라고 하자.

(1) f가 I에서 연속이면 f는 I에서 적분 가능하다.

(2) I에 f가 불연속인 점의 개수가 유한이면 f는 I에서 적분 가능하다.

정적분의 정의

보기 **4.** 구간 $I=[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=x$를 생각하자.



보기 **5.** 구간 $I=[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $g(x)=x^2$을 생각하자.

정적분의 정의

문제 4. $I=[0,\ 2]$에서 $f(x)=x^2$의 적분값을 구하시오.

문제 5. $I=[-1,\ 1]$에서 $g(x)=x^3$의 적분값을 구하시오.

정적분의 계산

정리 3. $I=[a,\, b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 만약 F가 I에서 정의된 함수이고, I에서 $F'=f$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

이 공식을 '**미적분의 기본정리**'라고 부른다.

정적분의 계산

보기 6. 앞의 보기 4와 보기 5에서 구한 적분값을 다시 구해보자.

(1) $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$이라고 하자. 그러면 $F' = f$이므로

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(2) $g(x) = x^2$, $G(x) = \frac{1}{3}x^3$이라고 하자. 그러면 $G' = g$이므로

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

※ $F' = f$를 만족시키는 함수 F는 어느 것을 택하든 상관없다.

정적분의 계산

보기 7. 미적분의 기본정리를 이용하면 다항함수의 적분을 쉽게 계산할 수 있다. 다음 적분을 계산해 보자.

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)\,dx$$

두 함수 f와 F를 다음과 같이 두자.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

그러면 $F' = f$이므로

$$\int_2^4 f(x)\,dx = F(4) - F(2) = \left(\frac{64}{3} - 16 + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) = \frac{26}{3}.$$

정적분의 계산

문제 6. 다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{0}(x^2+x+1)dx$

(2) $\int_{-1}^{2}(3x^2-4x)dx$

(3) $\int_{2}^{-1}(3x^2-4x)dx$

(4) $\int_{-1}^{-3}4x^3\,dx$

정적분의 계산

문제 6. 다음 적분을 구하시오.

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(12x^2-6x+2)dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{2}(2x^2+2x+1)dx$

(7) $\displaystyle\int_{1}^{3}(x+2)^2dx-\int_{1}^{3}(x-2)^2dx$

(8) $\displaystyle\int_{1}^{3}(2x+1)^3dx+\int_{1}^{3}(2x-1)^3dx$

정적분의 계산

정적분에서 변수의 이름이 달라져도 적분값은 달라지지 않는다. 예컨대 함수 f와 상수 a, b가 정해져 있을 때

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^b f(y)dy$$

는 모두 같은 적분을 나타낸다.

정적분의 계산

문제 **7.** f가 다항함수이고, 임의의 실수 x에 대하여

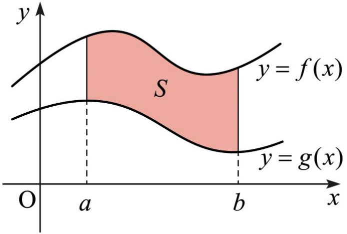
$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2 + 2x + a$$

를 만족시킨다. 이때 함수 $f(t)$와 상수 a의 값을 구하시오.

도형의 넓이와 부피

정리 4. $I = [a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f와 g가 I에서 연속인 함수라고 하자. 그리고 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$라고 하자. 그러면 $a \le x \le b$인 범위에서 두 함수의 그래프 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



도형의 넓이와 부피

보기 8. 직선 $y = x$와 포물선 $y = x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해 보자.

$f(x) = x$, $g(x) = x^2$이라고 하면 두 함수의 그래프는 $x = 0$, $x = 1$일 때만 교차한다. 그러므로 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

여기서

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

이라고 하면 $F'(x) = x - x^2$이므로

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$$

이다. 그러므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{6}$이다.

도형의 넓이와 부피

문제 8. 다음 도형의 넓이를 구하시오.

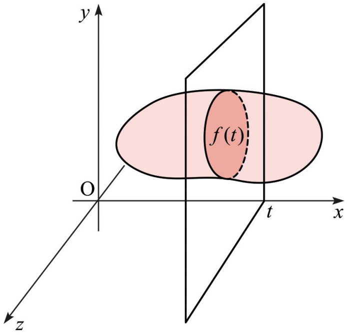
(1) 직선 $y=x-1$과 곡선 $y=x^2-2x-1$로 둘러싸인 도형

(2) 두 곡선 $y=x(x-2)$와 $y=-x(x+1)(x-2)$로 둘러싸인 도형

도형의 넓이와 부피

정리 5. $I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 만약 좌표공간에서 입체도형이 $a\leq x\leq b$인 범위에 놓여있고, 이 입체도형을 평면 $x=t$로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $f(t)$와 같으면, 이 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b f(t)dt$$



도형의 넓이와 부피

보기 9. 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 뿔의 부피를 구해 보자. 뿔의 꼭짓점이 좌표공간의 원점과 일치하도록, 그리고 뿔의 밑면이 xy 평면과 평행하면서 $z > 0$인 공간에 놓이도록 뿔의 위치를 조정하자. $0 \le t \le h$일 때, $z = t$인 평면으로 이 뿔을 자른 단면의 넓이를 $f(t)$라고 하자. 그러면 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

$$t^2 : h^2 = f(t) : S$$

이므로

$$f(t) = \frac{1}{h^2} S t^2$$

이다. $F(t) = \dfrac{1}{3h^2} S t^3$이라고 하면 $F' = f$이다. 그러므로 뿔의 부피는 다음과 같다.

$$\int_0^h f(t)\,dt = F(h) - F(0) = \frac{1}{3} S h.$$

도형의 넓이와 부피

정리 6. $I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 그리고 I의 모든 점에서 $f(x)>0$이라고 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 회전시킨 도형과 두 평면 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

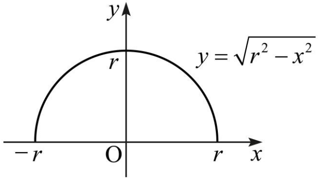
보기 10. 반지름이 r인 구의 부피를 구해 보자. 좌표평면에서 중심이 원점과 같고 반지름이 r인 원이 방정식은 다음과 같다.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

여기서 $y \geq 0$이라고 하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leq x \leq r)$$

좌표평면에서 이 함수의 그래프는 상반원이다.



도형의 넓이와 부피

그러므로 이 그래프를 x축에 대하여 한 번 회전시키면 그 자취는 반지름이 r인 구면이 된다.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ 이라고 하면, 반지름이 r인 구의 부피는 다음과 같다.

$$\int_{-r}^{r} \pi(f(x))^2 dx = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right) dx$$

이제

$$F(x) = \pi r^2 x - \frac{\pi}{3} x^3$$

이라고 하면 $F' = f$ 이다. 그러므로

$$\int_{-r}^{r} \pi(f(x))^2 dx = F(r) - F(-r) = \left(\pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3\right) - \left(-\pi r^3 + \frac{\pi}{3} r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

이다.

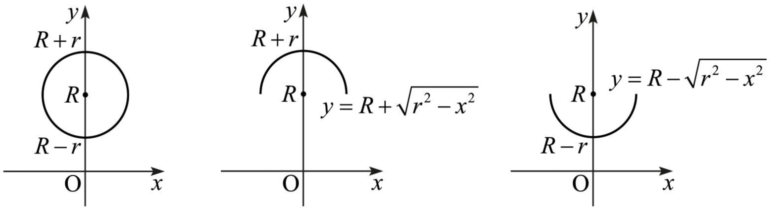
도형의 넓이와 부피

보기 **11.** 좌표평면에서 반지름의 길이가 r이고 중심의 좌표가 $(0,\ R)$인 원을 생각하자. 여기서 $R > r > 0$이다. 이 원을 x축에 대하여 한 바퀴 회전시키면 그 자취는 **원환면**(torus)이 된다. 원환면으로 둘러싸인 입체도형의 부피를 구해보자.

먼저 다음과 같은 두 함수를 생각하자.

$$f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},\quad g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}.\quad (-r \le x \le r)$$

좌표평면에서 함수 f의 그래프는 위쪽 반원이며, 함수 g의 그래프는 아래쪽 반원이다.



도형의 넓이와 부피

원환면으로 둘러싸인 부분의 부피를 구하려면 다음을 계산해야 한다.

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \pi (f(x))^2 dx - \int_{-r}^{r} \pi (g(x))^2 dx &= \pi \int_{-r}^{r} \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right) dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx
\end{aligned}
$$

그런데 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 의 그래프는 반지름이 r인 위쪽 반원이다. 그러므로 위 적분은 반지름이 r인 반원과 지름으로 둘러싸인 도형의 넓이에 $4\pi R$를 곱한 것과 같다. 즉

$$
4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \times \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R
$$

이다. 이 값이 원환면으로 둘러싸인 입체도형의 부피이다.

물체의 운동

수직선 위에 놓인 물체가 운동할 때, t초 후 물체 위치를 $f(t)$라고 하면 물체의 속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

- 물체의 속도는 $f'(t)$이다.
- 물체의 가속도는 $f''(t)$이다.

그런데 적분할 때 미분의 역도함수가 사용되므로, 적분을 이용하면 가속도로부터 속도를 끌어내거나, 속도로부터 물체의 위치를 끌어낼 수 있다.

물체의 운동

보기 12. 수직선 위에서 움직이는 물체를 생각해 보자. t초 후 이 물체의 가속도를 $6t^2\ (\mathrm{m/s^2})$이라고 하자. 움직임이 시작될 때, 즉 $t=0$일 때 이 물체의 속력이 $0\ \mathrm{m/s}$라면, 2초 후 이 물체가 처음 위치로부터 어느 방향으로 얼마나 이동한 곳에 있는지 구해 보자.

먼저 $6t^2$의 역도함수를 구하면 $2t^3+C_1$이다. 여기서 C_1은 상수이다. 움직임이 시작될 때 물체의 속력이 $0\ \mathrm{m/s}$이므로 $t=0$을 대입하면 $C_1=0$을 얻는다. 즉 t초 후 물체의 속도는 $v(t)=2t^3$이다.

다시 $2t^3$의 역도함수를 구하면

$$f(t)=\frac{1}{2}t^4+C_2$$

이다. 여기서 C_2는 상수이다.

물체의 운동

비록 C_2의 값을 구할 수는 없지만, 물체가 어느 방향으로 얼마나 이동했는지는 알 수 있다.

$$f(0) = C_2,$$
$$f(2) = 8 + C_2$$

이므로

$$f(2) - f(0) = 8$$

이다. 그러므로 2초 후 이 물체는 양의 방향으로 $8\ \mathrm{m}$ 이동한 곳에 있다.

물체의 운동

문제 9. 좌표가 4인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-2t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 t에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P의 변위

(3) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

물체의 운동

문제 10. 지상 $30\,\mathrm{m}$의 높이에서 $49\,\mathrm{m/s}$의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 뒤의 속도가 $v(t) = 49 - 9.8t\ (\mathrm{m/s})$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 발사하고 3초 뒤 물체의 지면으로부터의 높이

(2) 지면에 떨어질 때까지 물체가 움직인 거리

공부한 내용

- ✓ 역도함수와 부정적분
- ✓ 부정적분의 계산
- ✓ 정적분의 정의
- ✓ 정적분의 계산
- ✓ 도형의 넓이와 부피
- ✓ 물체의 운동