가볍게 살펴보는 미분과 적분

도함수의 활용

2021학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

✓ 함수의 증가와 감소

✓ 함수의 극값

✓ 그래프의 볼록성

✓ 물체의 운동

함수의 증가와 감소

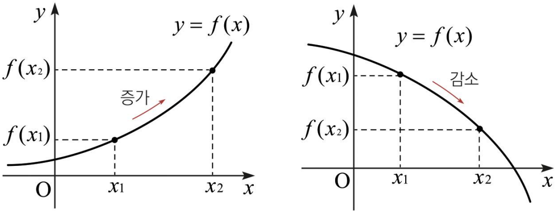
함수 f가 구간 I에서 정의되었다고 하자. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

가 성립하면 “f가 I**에서 단조증가**한다”라고 말한다. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

가 성립하면 “f가 I**에서 단조감소**한다”라고 말한다.



함수의 증가와 감소

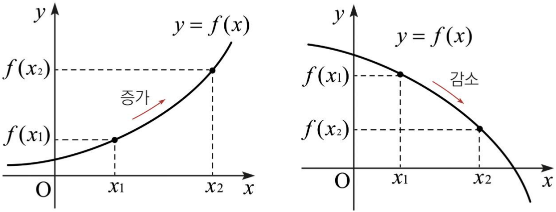
만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

가 성립하면 "f가 I**에서 순증가**한다"라고 말한다. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

가 성립하면 "f가 I**에서 순감소**한다"라고 말한다.



함수의 증가와 감소

보기 **1.** 함수 $f(x) = x^2$은 $x > 0$일 때 순증가하고, $x < 0$일 때 순감소한다.

함수의 증가와 감소

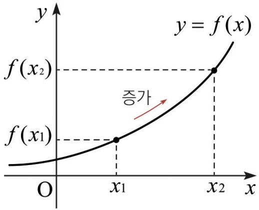
만약 f가 I에서 단조증가하면, I의 점 x와 0이 아닌 값 Δx에 대하여

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

이 성립한다. 왜냐하면 Δx가 양수든지 음수든지 상관 없이 Δx의 부호와 $f(x+\Delta x)-f(x)$의 부호가 같기 때문이다. 그러므로

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

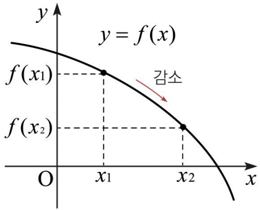
이다.



역으로 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \geq 0$이면, I에서 x의 값이 커질 때 $f(x)$의 값도 커지므로 f가 I에서 단조증가한다.

함수의 증가와 감소

마찬가지로 함수 f가 I에서 단조감소하면 I의 모든 점에서 $f'(x) \le 0$이며, 역으로 I의 모든 점에서 $f'(x) \le 0$이면 f가 I에서 단조감소한다.



정리 **1.** 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하다고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(i) I에서 f가 단조증가할 필요충분조건은 임의의 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \ge 0$인 것이다.

(ii) I에서 f가 단조감소할 필요충분조건은 임의의 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \le 0$인 것이다.

함수의 증가와 감소

참고 I의 모든 점에서 $f'(x) > 0$이면 f가 I에서 순증가한다. 그러나 역은 성립하지 않는다. 예컨대 $f(x) = x^3$이면 f는 순증가하는 함수이지만 $x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이다.

함수의 증가와 감소

보기 **2.** 함수 $f(x)=x^2-6x+8$을 살펴보자. $f'(x)=2x-6$이므로 $x>3$일 때 $f'(x)>0$이고, $x<3$일 때 $f'(x)<0$이다. 그러므로 $x>3$일 때 f는 단조증가하고, $x<3$일 때 f는 단조감소한다.

함수의 증가와 감소

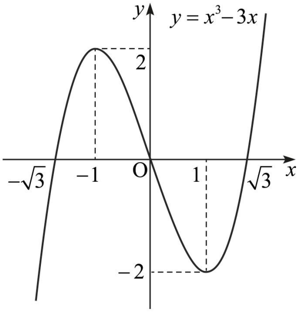
문제 **1.** 함수 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$의 증가와 감소를 조사하시오.

함수의 극값

함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자.

- 만약 c를 원소로 갖는 작은 구간 J가 존재하여 $f(c)$가 J에서 g의 최댓값이 되면 "f는 c에서 극댓값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 g의 **극댓값**이라고 부른다.
- 만약 c를 원소로 갖는 작은 구간 J가 존재하여 $f(c)$가 J에서 f의 최솟값이 되면 "f는 c에서 극솟값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 g의 **극솟값**이라고 부른다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 부른다.



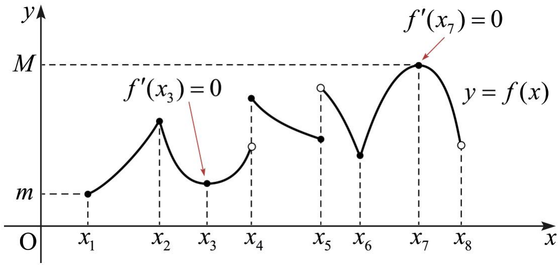
함수의 극값

함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자.

- 만약 I의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \leq f(c)$이면 “f는 c에서 최댓값을 가진다.”라고 말하고 $f(c)$를 I에서 f의 **최댓값**이라고 부른다.
- 만약 I의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \geq f(c)$이면 “f는 c에서 최솟값을 가진다.”라고 말하고, $f(c)$를 I에서 f의 **최솟값**이라고 부른다.

함수의 극값

보기 3. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다고 하자.



이 함수는 x_1, x_3, x_5, x_6에서 극솟값을 가지며 x_2, x_4, x_7에서 극댓값을 가진다.

이 함수는 x_1에서 최솟값 m을 가지며, x_7에서 최댓값 M을 가진다.

x_8에서는 극솟값을 갖지 않고 극댓값도 갖지 않는다.

함수의 극값

정리 2. 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하다고 하자.
만약 c가 I의 안쪽에 있는 점이고 f가 c에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$이다.

함수의 극값

보기 4. 함수 $f(x) = x^3 + x$를 살펴보자. $f'(x) = 3x^2 + 1$이므로 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다. 그러므로 f는 어떤 점에서도 극값을 갖지 않는다.

함수의 극값

보기 5. 함수 $g(x) = x^3$을 살펴보자. $g'(x) = 3x^2$이므로 $g'(x) = 0$인 점은 $x = 0$ 뿐이다. 그러나 $x_1 < x_2$일 때 $(x_1)^3 < (x_2)^3$이므로 g는 모든 곳에서 증가하는 함수이다. 즉 g는 0에서 극값을 갖지 않는다.

함수의 극값

문제 **2.** 이차함수 $f(x)=x^2$의 정의역이 $[-2,\ 4]$일 때, 이 함수의 극값을 모두 구하시오.

함수의 극값

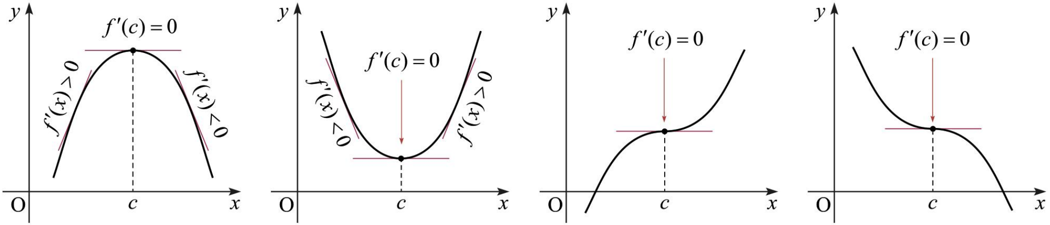
문제 **3.** 최대정수함수가 극댓값을 갖는 점과 극솟값을 갖는 점을 모두 구하고, 그 점에서 극값을 구하시오.

함수의 극값

정리 **3.** 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하고 c가 I의 점이라고 하자.

(1) 만약 $x < c$일 때 $f'(x) > 0$이고, $c < x$일 때 $f'(x) < 0$이면 f는 c에서 극댓값을 가진다.

(2) 만약 $x < c$일 때 $f'(x) < 0$이고, $c < x$일 때 $f'(x) > 0$이면 f는 c에서 극솟값을 가진다.



함수의 극값

보기 6. 함수 $g(x) = x^3 - 3x$의 극값을 구해 보자.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이므로 $g'(x) = 0$인 점은 $x = -1$과 $x = 1$ 뿐이다.

$x < -1$일 때 $g'(x) > 0$이고 $x > -1$일 때 $g'(x) < 0$이므로 g는 $x = -1$에서 극댓값을 가진다.

$x < 1$일 때 $g'(x) < 0$이고 $x > 1$일 때 $g'(x) > 0$이므로 g는 $x = 1$에서 극솟값을 가진다.

함수의 극값

보기 **7.** 구간 $[3,\ 6]$에서 정의된 함수 $f(x)=(x-4)^2$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

$f'(x)=2x-8$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=4$ 뿐이다.

$x<4$일 때 $f'(x)<0$이고, $x>4$일 때 $f'(x)>0$이므로 f는 $x=4$에서 극솟값을 가진다.

이제 구간의 양 끝점인 3, 6과 f의 미분계수가 0인 점 4에서 f의 함숫값을 비교하자.

$$f(3)=(-1)^2=1,\quad f(6)=(6-4)^2=4,\quad f(4)=0$$

이므로 f는 4에서 최솟값 0을 가지며, 6에서 최댓값 4를 가진다.

함수의 극값

문제 **4.** 다음 함수의 극값을 조사하시오.

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(2) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x$

(3) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8$

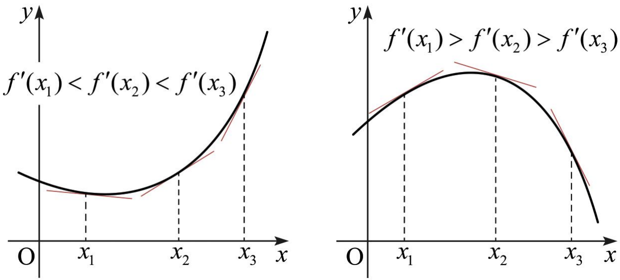
(4) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$

그래프의 볼록성

정리 4. 함수 f가 구간 I에서 두 번 이상 미분 가능하다고 하자.

(1) I의 모든 점에서 f''의 부호가 양수이면 I에서 f의 그래프가 아래쪽으로 볼록하다.

(2) I의 모든 점에서 f''의 부호가 음수이면 I에서 f의 그래프가 위쪽으로 볼록하다.



$f''(x) > 0$ $\quad$ $f''(x) < 0$

그래프의 볼록성

보기 8. 함수 $f(x)=x^2-6x+8$을 살펴보자. $f'(x)=2x-6$이고 $f''(x)=2$이므로 f의 그래프는 모든 곳에서 아래쪽으로 볼록하다.

그래프의 볼록성

함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자. 만약 c의 왼쪽과 오른쪽에서 f의 그래프가 볼록한 방향이 반대로 바뀌면 점 $(c,\ f(c))$를 f의 그래프의 **변곡점**이라고 부른다.

그래프의 볼록성

보기 9. 함수 $g(x) = x^3 + x^2 + x$를 살펴보자.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad g''(x) = 6x + 2$$

이므로, $x < -\frac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 위쪽으로 볼록하고, $x > -\frac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 아래쪽으로 볼록하다. 그러므로 $\left(-\frac{1}{3}, \ -\frac{7}{27}\right)$은 g의 그래프의 변곡점이다.

그래프의 볼록성

함수 f가 구간 I에서 두 번 미분 가능하고 c가 I의 점이며 $f'(c)=0$이라고 하자. 만약 $f''(c)<0$이면 f의 그래프는 c의 근처에서 위쪽으로 볼록하므로 f는 c에서 극댓값을 가진다. 마찬가지로 만약 $f''(c)>0$이면 f의 그래프는 c의 근처에서 아래쪽으로 볼록하므로 f는 c에서 극솟값을 가진다.

정리 5. 함수 f가 구간 I에서 두 번 이상 미분 가능하다고 c가 I의 안쪽에 있는 점이며 $f'(c)=0$이라고 하자.

(1) 만약 $f''(c)<0$이면 f가 c에서 극댓값을 가진다.

(2) 만약 $f''(c)>0$이면 f가 c에서 극솟값을 가진다.

그래프의 볼록성

보기 **10.** 함수 $h(x)=x^3-3x$를 살펴보자.

$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $h'(x)=0$인 점은 $x=-1$과 $x=1$ 뿐이다. 그런데

$$h''(x)=6x$$

이므로 $h''(-1)<0$이고 $h''(1)>0$이다. 그러므로 h는 -1에서 극댓값 2를 가지며, 1에서 극솟값 -2를 가진다.

그래프의 볼록성

문제 **5.** 다음 함수의 그래프의 모양을 조사하시오.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(3) $f(x) = (x-1)^4$

(4) $f(x) = x^4 - 4x^2$

물체의 운동

$$\text{변위} \xrightarrow[\text{미분}]{} \text{속도} \xrightarrow[\text{미분}]{} \text{가속도}$$

물체의 운동

보기 11. 수직선 위에서 움직이는 물체를 생각하자. 시간이 t만큼 흘렀을 때 물체의 위치를

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$$

라고 하자. 이때 이 물체의 운동을 조사해 보자.

$s = f(t)$라고 두고 f를 미분하면 다음과 같다.

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3),$$
$$f''(t) = 6t - 12 = 6(t-2)$$

이므로, f, f', f''의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

물체의 운동

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t - 2,$$
$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3),$$
$$f''(t) = 6t - 12 = 6(t-2).$$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

이 물체는 출발한 후 점점 느려저서 $t = 1$인 순간 위치가 2인 지점에 도달한 후 운동 방향이 바뀐다. 그리고 점점 빨라지다가 $t = 2$인 순간 위치 0을 지나면서 점점 느려진다. $t = 3$인 순간 위치 -2를 지나면서 운동 방향이 바뀐다. 그리고 계속 빨라진다.

물체의 운동

문제 6. 다이빙 선수가 수면으로부터의 높이가 $15\,\mathrm{m}$인 다이빙대에서 뛰어오른 지 t초 후 수면으로부터의 높이를 $h\,\mathrm{m}$라고 하면 $h = -5t^2 + 5t + 15$가 성립한다고 한다. 다음 물음에 답하시오. (단, 속도는 수직속도만 고려한다.)

(1) 뛰어오른 지 1초 후 속도를 구하시오.

(2) 이 선수가 가장 높은 곳에 도달할 때까지 걸린 시간과, 그 순간의 높이를 구하시오.

(3) 이 선수가 수면에 닿는 순간의 속도를 구하시오.

물체의 운동

문제 **7.** 달리는 열차가 제동을 건 후 t초 동안 달린 거리 s m는 $s = 27t - 0.45t^2$이라고 한다. 열차가 정지할 때까지 걸린 시간과 그때까지 움직인 거리를 구하시오.

공부한 내용

- ✓ 함수의 증가와 감소
- ✓ 함수의 극값
- ✓ 그래프의 볼록성
- ✓ 물체의 운동