가볍게 살펴보는 미분과 적분

이 교재는 미적분의 기본 개념과 계산법, 그리고 간단한 응용 문제를 담고 있습니다. 다항함수, 분수함수, 무리함수의 미분법과 적분법을 담고 있으며 수열의 극한과 무한급수는 담고 있지 않습니다.

매일 강의 3시간, 자습 3시간씩 3일 공부하면 마칠 수 있는 분량으로 구성되어 있습니다. 강의 용도로 제작되었으며, 염두에 둔 대상 학생은 중학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 학생입니다. 하지만 미적분을 공부한지 오래 되어서 복습하고 싶은 사람이 보기에도 괜찮습니다.

이슬비 • designeralice@daum.net • iseulbee.com

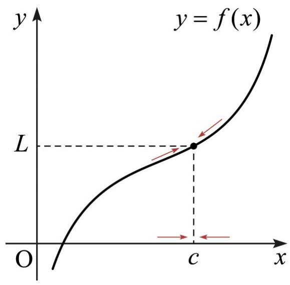
최종수정 2021년 4월 12일

첫 번째 이야기

함수의 미분

함수의 미분이란 기하학적으로는 함수의 그래프가 매끄러울 때 그래프에 접하는 접선의 기울기를 구하는 것이다. 수학에서뿐만 아니라 현실의 여러 가지 상황을 그래프로 나타낼 수 있으므로, 미분은 실생활과 밀접하게 연관된 다양한 분야에서 활용된다.

1 함수의 극한



함수 f가 점 c의 주변에서 정의되었다고 하자. 만약 점 x가 $x \neq c$이면서 c에 가까이 다가갈 때 $f(x)$의 값이 하나의 값 L에 가까워지면,

"x가 c에 다가갈 때 $f(x)$가 L에 다가간다."

라고 말하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

과 같이 나타낸다. 여기서 L을 'c에서 f의 **극한**' 또는 'c에서 f의 **극한값**'이라고 부른다.[1)]

'다가간다'라는 느낌을 살리기 위하여 위와 같은 상황을

"$x \to c$일 때 $f(x) \to L$이다."

또는

"$x \to c$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴**한다."

라고 표현하기도 한다.

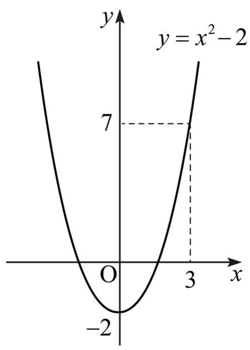
기호읽기 극한 기호는 다음과 같이 읽는다.

- $\lim_{x \to c} f(x) = L$은 "리미트 x가 c로 갈 때 $f\,x$는 L로 간다"라고 읽는다.
- "$x \to c$일 때 $f(x) \to L$이다"는 "x가 c로 갈 때 $f\,x$는 L로 간다"라고 읽는다.

보기 1. 함수 $f(x) = x^2 - 2$를 생각하자. 이 함수는 3을 원소로 갖는 구간에서 정의되어 있다. x의 값이 3에 가까워지면 $f(x)$의 값은 7에 가까워진다. 그러므로 3에서 f의 극한값은 7이다. 즉

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 2) = 7$$

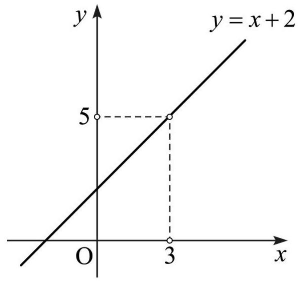
이다.



1) 사실 함수의 극한은 '엡실론-델타(ϵ-δ) 논법'으로 정의해야 한다. 하지만 그와 같은 방법으로 극한을 정의하는 것은 이 책의 범위를 벗어나므로 여기서는 직관적인 정의를 사용한다.

보기 **2.** 함수 f가

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$$



으로 주어졌다고 하자. 비록 $x=3$일 때 $f(x)$가 정의되지 않지만 f는 3의 주변에서 정의되므로 $x\to3$일 때 f의 극한값을 생각할 수 있다. ("생각할 수 있다"가 "극한이 존재한다"라는 뜻이 아니다.) $x\neq3$일 때

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=x+2$$

이므로 $x\neq3$이면서 x가 3에 다가갈 때 $f(x)$의 값이 5에 다가간다. 그러므로

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$$

이다.

위 보기에서 보다시피 어떤 점에서 함숫값이 존재하지 않더라도 극한값이 존재할 수 있다.

참고 'c의 주변에서 정의된다'라는 말은 'x가 c의 값에 가까워질 수 있다'라는 뜻이다. 예컨대 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 x가 음수일 때 정의되지 않는다. 그러므로 이 함수에 대해서는

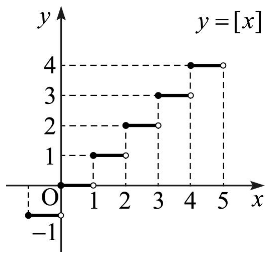
$$\lim_{x\to-3}f(x)$$

와 같은 극한을 생각하지 않는다. 또한, 만약 함수 g가 정수인 점에서만 정의된다면

$$\lim_{x\to2}g(x)$$

와 같은 극한을 생각하지 않는다. 왜냐하면 x의 값이 2와 일치하지 않으면서 2에 다가갈 수 없기 때문이다. □[2)]

보기 **3.** $f(x)=[x]$라고 하자. 여기서 $[\,\cdot\,]$는 **최대정수함수**를 나타낸다.[3)]



x의 값이 2에 가까워질 때 $f(x)$의 값은 1에 가까워지기도 하고 2에 가까워지기도 한다. x가 2보다 작으면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 1에 가까워지며(사실은 $f(x)=1$인 상태가 되며), x가 2보다 크면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 가까워진다.

그러므로 x의 값이 2에 가까워질 때 $f(x)$의 값은 '하나의' 값에 가까워지지 않는다. 즉 $x\to2$일 때 f의 극한은 존재하지 않는다.

보기 3과 같이 $x\to c$일 때 f의 극한이 존재하지 않는 경우 "c에서 f가 **발산**한다." 또는 "c에서 f의 **극한이 존재하지 않는다**."라고 말한다.[4)]

---

2) 눈치챘겠지만 이 책에서 문단 끝에 붙은 네모 표시 '□'는 설명이 끝났음을 나타낸다.
3) 즉 $[x]$는 x 이하의 정수 중 가장 큰 값을 나타낸다. 최대정수함수를 '가우스 함수'라고 부르기도 한다.
4) 함숫값이 무한히 커지거나 무한히 작아지지 않더라도, 수렴하지 않는 모든 경우를 통틀어 '발산한다'라고 말한다.

문제 1. 다음 극한이 존재하는지 조사하고, 존재한다면 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 5}(x-4)$

(2) $\lim_{x \to -2}(x^2-4x+1)$

(3) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

(4) $\lim_{x \to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

[도움말: 함수의 그래프를 살펴본다.]

극한과 사칙계산은 다음과 같은 관계를 가진다.

정리 1. 함수 f와 g가 c의 주변에서 정의되었고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.5)

(1) k가 실수이면 $\lim_{x \to c}(kf(x)) = kL$.

(2) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = L+M$.

(3) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = L-M$.

(4) $\lim_{x \to c}(f(x)g(x)) = LM$.

(5) 만약 $M \neq 0$이면 $\lim_{x \to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

참고 정리 2의 공식은 두 극한이 모두 수렴할 때, 즉 L과 M이 실수일 때만 사용할 수 있다. 예컨대

$$f(x) = x, \; g(x) = \frac{1}{x}$$

일 때

$$\lim_{x \to 0}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to 0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to 0} g(x)\right) = 0 \times \left(\lim_{x \to 0} g(x)\right) = 0$$

이라고 계산하면 안 된다. □

문제 2. 다음 극한이 존재하는지 조사하고, 존재한다면 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(2) $\lim_{h \to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

[도움말: 공식 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$을 이용한다.]

---

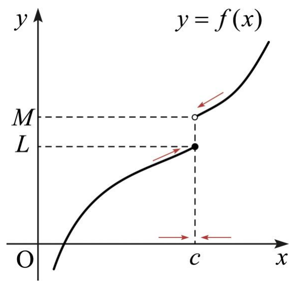
5) '정리'란 수학에서 다루는 내용 중 참임이 증명되어 있고 자주 사용되는 공식이나 성질을 이른다. '정리' 뒤에 붙은 번호는 책마다 다르므로, 번호를 외울 필요가 없다. 또한 어떤 성질에 '정리'라는 이름을 붙이는지 기준은 책마다 다르다. 물론 '피타고라스 정리'처럼 유명한 정리는 어느 책에서든 '정리'라고 이름 붙인다. 정리는 그 내용이 참임을 밝히는 '증명'이라는 과정이 함께 있어야 한다. 그러나 이 책은 자세한 증명을 살피기보다는 미적분의 개념을 가볍게 살피고자 하므로 엄밀한 증명은 담지 않았다.

문제 **3.** p가 다항함수이고 c가 실수일 때

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

임을 증명하시오. [도움말: $p(x)$의 차수를 n으로 두고, 수학적 귀납법을 적용한다.]

2 좌극한과 우극한



함수 f가 점 c의 왼쪽 주변에서 정의되었다고 하자. 만약 점 x가 $x < c$이면서 c에 가까이 다가갈 때 $f(x)$의 값이 하나의 값 L에 가까워지면,

"x가 c의 왼쪽에서 c에 다가갈 때 $f(x)$가 L에 다가간다."

라고 말하고, 이것을

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

또는

"$x \to c^-$일 때 $f(x) \to L$이다."

와 같이 나타낸다. 여기서 L을 'c에서 f의 **좌극한**'이라고 부른다.

우극한도 같은 방법으로 정의한다. 즉 함수 f가 c의 오른쪽 주변에서 정의되었다고 하자. 만약 x가 $c < x$이면서 c에 가까이 다가갈 때 $f(x)$의 값이 하나의 값 M에 가까워지면,

"x가 c의 오른쪽에서 c에 다가갈 때 $f(x)$가 M에 다가간다."

라고 말하고, 이것을

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = M$$

또는

"$x \to c^+$일 때 $f(x) \to M$이다."

와 같이 나타낸다. 여기서 M을 'c에서 f의 **우극한**'이라고 부른다.

좌극한과 우극한을 통틀어 **한 방향 극한**이라고 부른다.

기호읽기 좌극한과 우극한은 다음과 같이 읽는다.

- $x \to c^-$: "x가 c의 왼쪽에서 c에 다가갈 때"
- $x \to c^+$: "x가 c의 오른쪽에서 c에 다가갈 때"

점 c에서 함수 f의 극한

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

에서 $x \to c$는 x의 값이 c에 한없이 가까이 다가감을 뜻한다. 이때 c에 다가가는 방향에 상관없이 $f(x)$의 값은 L에 가까워진다. 그러므로 "$x \to c$일 때 $f(x) \to L$"이 성립하려면 $x \to c^-$일 때에도 $f(x) \to L$이고 $x \to c^+$일 때에도 $f(x) \to L$이어야 한다.

정리 2. 함수 f가 c의 주변에서 정의되었다고 하자. 이때

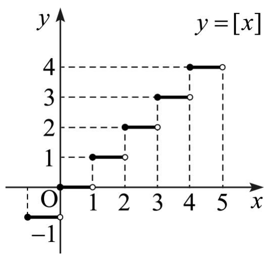
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

일 필요충분조건은

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

이 모두 성립하는 것이다.

보기 4. 앞의 보기 3에서 살펴본 최대정수함수 $f(x) = [x]$를 다시 살펴보자. x가 2보다 작으면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 1에 가까워지며, x가 2보다 크면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 가까워진다. 그러므로 2에서 f의 좌극한은 1이며, 2에서 우극한은 2이다.



일반적으로, 만약 n이 정수라면 n에서 f의 좌극한은 $(n-1)$이고 우극한은 n이다. 즉 n에서 f의 좌극한과 우극한은 각각 존재하지만, n에서 f의 극한은 존재하지 않는다.

만약 c가 정수가 아니라면, c에서 f의 좌극한과 우극한은 일치하며 그 값은 $[c]$이다. 즉 c에서 f의 극한이 존재한다.

3 연속함수

함수 f가 c의 주변에서 정의되었고, 다음 세 조건을 모두 만족시킨다고 하자.

(i) f가 c에서 정의되어 있다.

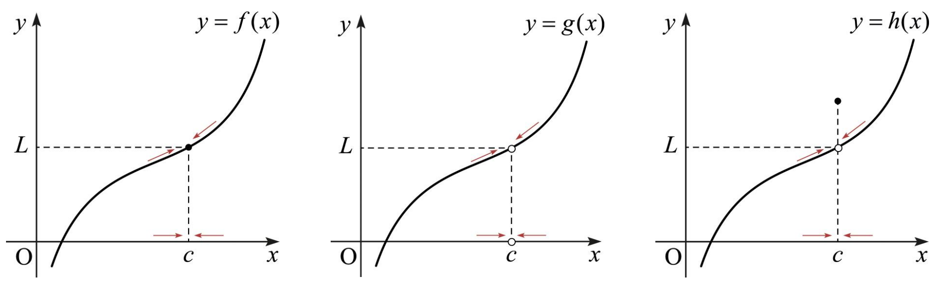
(ii) c에서 f의 극한이 존재한다.

(iii) c에서 f의 함숫값과 극한값이 일치한다.

이때 "f가 **c에서 연속**이다."라고 말한다.

만약 I가 f의 정의역의 부분집합이고 f가 I의 모든 점에서 연속이면 "f가 **I에서 연속**이다."라고 말한다. 만약 f가 정의역의 모든 점에서 연속이면 f를 **연속함수**라고 부른다.

만약 f가 c에서 연속이 아니면 "f가 c에서 **불연속**이다."라고 말한다.[6]



6) 책에 따라서는 점 c가 함수 f의 정의역에 속할 때만 c에서 f가 연속인지 여부를 따지기도 한다. 이러한 관점에서 보면 보기 5의 함수 g는 3에서 연속성 여부를 따질 수 없다. 하지만 보통은 점 c에서 함수 f의 극한을 생각할 수 있을 때 c에서 f가 연속인지 여부를 따진다. 이러한 관점에서 보면 보기 5의 함수 g는 3에서 불연속이다.

보기 5. 함수 $f(x) = x^2 - 2$는 연속함수이다. 왜냐하면 f의 정의역은 $\mathbb{R}$인데, f는 모든 실수에서 함숫값과 극한값이 일치하기 때문이다. 반면 함수

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

은 3에서 연속이 아니다. 왜냐하면 g는 3에서 정의되지 않기 때문이다.

보기 6. 최대정수함수는 정수가 아닌 점에서 연속이고, 정수인 점에서는 불연속이다.

$I = [a, b]$가 닫힌 구간이고 함수 f가 I에서 정의되었다고 하자. 만약 f가 세 조건

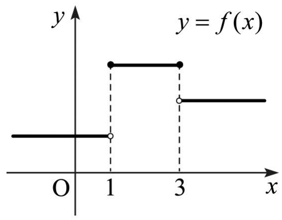
(i) $a < c < b$일 때 f가 c에서 연속이다.
(ii) a에서 f의 함숫값과 우극한이 일치한다.
(iii) b에서 f의 함숫값과 좌극한이 일치한다.

를 모두 만족시키면 "f가 **구간 I에서 연속**이다."라고 말한다.

f의 정의역 전체를 생각하면 f가 a나 b에서 연속이 아닌 경우에도 f가 $[a, b]$에서 연속일 수 있다.

보기 7. 함수 f가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

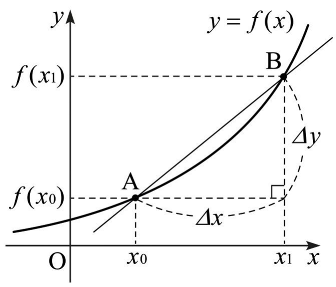
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 3 & \text{if } 1 \le x \le 3 \\ 2 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$



그러면 f는 1과 3에서 불연속이고, 다른 모든 점에서는 연속이다. 그럼에도 불구하고 f는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 연속이다.

4 미분계수

x_0과 x_1이 서로 다른 값이라고 하자. 이때 'x가 x_0에서 출발하여 x_1에 도달할 때 x의 **증가량**'을 $x_1 - x_0$으로 정의하고, 이 값을 Δx로 나타낸다.



함수 f가 두 점 x_0과 x_1을 모두 갖는 구간에서 정의되어 있고 $y = f(x)$라고 하자. x가 x_0에서 출발하여 x_1에 도달할 때 y의 증가량을 생각할 수 있다. 이 값을 Δy로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0).$$

여기서 x의 증가량에 대한 $f(x)$의 '**증가율**' 또는 '**평균증가량**'이라고 불리는 값을 생각할 수 있는데, 이 값을 다음과 같이 정의한다.

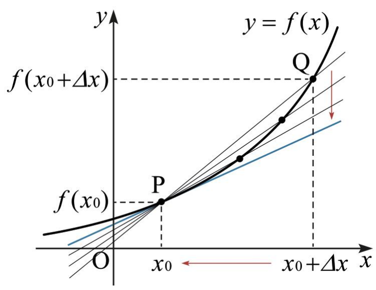
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$\Delta y / \Delta x$의 값을 '**차분몫**'이라고 부르기도 한다.

기호읽기 Δx는 '델타 엑스'라고 읽는다.

> 보기 8. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 5$를 살펴보자.
> x가 3에서 3.2까지 증가할 때
> $$\Delta x = 0.2, \quad \Delta y = f(3.2) - f(3) = 8.84 - 8 = 0.84$$
> 이다. 이때 x의 증가량에 대한 $f(x)$ 증가율은
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.84}{0.2} = 4.2$$
> 이다.

x가 x_0에서 출발하여 x_1에 도달할 때 함수 f의 증가율은 f의 그래프 위의 두 점 $(x_0, f(x_0))$과 $(x_1, f(x_1))$을 모두 지나는 직선의 기울기와 같다.



함수의 극한을 생각한 것처럼 증가율의 극한을 생각할 수 있다. 만약 함수 f가 x_0을 원소로 갖는 한 열린 구간에서 정의되었고 극한

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

가 존재하면, 이 값을 x_0에서 f의 **미분계수**라고 부르고 $f'(x_0)$로 나타낸다. 미분계수가 두 증가량의 비율의 극한이라는 점을 강조하기 위하여, 위 미분계수를 분수처럼

$$\frac{dy}{dx}$$

로 나타내기도 한다. 그러나 이러한 표현은 함수의 이름이 나타나지 않고, 어느 점에서의 미분계수인지 알 수 없다. 그러므로 이러한 표현은 함수의 이름과 미분계수를 구하는 점이 명확하여 혼동할 염려가 없을 때만 사용한다. 한편 위와 같은 표현은 변수 x와 y의 관계가 명확하게 나타나기 때문에, 변수의 개수가 3개 이상이거나 독립변수와 종속변수의 관계를 드러낼 필요가 있을 때 유용하게 사용된다.

기호읽기 미분계수는 다음과 같이 읽는다.

- $f'(x)$는 "에프 프라임 엑스"라고 읽는다.
- $\frac{dy}{dx}$는 "디와이 디엑스"와 같이 분자부터 읽는다.

x_0에서 함수 f의 미분계수를 구하는 과정은 다음과 같다.

1단계. $y_0 = f(x_0)$을 구한다.
2단계. $\Delta x \neq 0$이라고 가정하고 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$을 구한다.
3단계. 차분몫 $\Delta y / \Delta x$를 구한다.
4단계. $\Delta x \to 0$일 때 $\Delta y / \Delta x$의 극한을 구한다.

마지막 단계의 극한이 수렴한다면 그 값이 x_0에서 f의 미분계수이다.

보기 9. $x_0 = 3$에서 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$의 미분계수를 구해 보자.

$$y_0 = f(x_0) = f(3) = 14.$$

$$\Delta y = f(3+\Delta x) - f(3) = 2(\Delta x)^2 + 9\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\Delta x)^2 + 9\Delta x}{\Delta x} = 2\Delta x + 9.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2\Delta x + 9) = 9.$$

$\therefore\ f'(3) = 9.$

문제 4. 다음 미분계수를 구하시오.

(1) $f(x) = 2x + 3$일 때 $f'(4)$.

(2) $f(x) = x^2$일 때 $f'(2)$.

(3) $f(t) = t^2$일 때 $f'(2)$.

(4) $f(t) = 3t^2 - 4$일 때 $f'(-1)$.

(5) $g(x) = -x^2 + 3x - 5$일 때 $g'(1)$.

(6) $h(t) = (t+1)^2$일 때 $h'(2)$.

[도움말: 미분계수의 정의를 이용하여 차근차근 계산한다.]

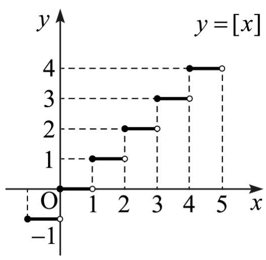
x_0에서 f의 미분계수가 존재할 때 "f가 x_0에서 **미분 가능**하다."라고 말한다. 만약 I가 f의 정의역의 부분집합이고 I의 모든 점에서 f가 미분 가능하면 "f가 **I에서 미분 가능**하다."라고 말한다.

x_0에서 함수 f의 미분계수는 f의 그래프 위의 점 $(x_0,\ f(x_0))$에서 f의 그래프에 접하는 접선의 기울기와 같다. 만약 $(x_0,\ f(x_0))$에서 f의 그래프가 끊어져 있다면, 그 점에서 f의 그래프의 기울기를 구할 수 없다. 그러므로 다음이 성립한다.

정리 3. 함수 f가 x_0에서 미분 가능하면 f는 x_0에서 연속이다.

보기 10. 최대정수함수는 정수가 아닌 점에서 미분 가능하고, 그 점에서 미분계수는 0이다.

이 함수는 정수인 점에서 불연속이므로, 그 점에서 미분 불가능하다.



5 도함수

점 x_0에서 함수 f의 미분계수를 $f'(x_0)$로 나타낸다. 이때 x_0에 대입하는 값에 따라서 $f'(x_0)$의 값이 달라진다. 이러한 관점에서 x가 변수일 때 $f'(x)$는 함수가 된다. 이러한 함수 f'을 f의 **도함수**라고 부른다. $y=f(x)$일 때 f의 도함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$f',\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad Df,\quad \frac{d}{dx}f.$$

함수 f의 도함수를 구하는 것을 "f를 **미분**한다."라고 말한다.

문제 5. 다음 도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=2x+3$일 때 $f'(x)$.

(2) $f(x)=x^2$일 때 $f'(x)$.

(3) $f(t)=t^2$일 때 $f'(t)$.

(4) $f(t)=3t^2-4$일 때 $f'(t)$.

(5) $g(x)=-x^2+3x-5$일 때 $g'(x)$.

(6) $h(t)=(t+1)^2$일 때 $h'(t)$.

[도움말: 앞에서 풀었던 문제의 풀이 과정을 조금만 바꾸면 된다.]

만약 함수 f의 도함수 f'이 미분 가능하면 f'의 도함수를 구할 수 있다. f'의 도함수를 f의 **이계도함수**라고 부르고 f''으로 나타낸다.

일반적으로 만약 함수 f가 k번 미분 가능할 때 f를 k번 미분한 함수를 f의 ***k*계도함수**라고 부르고 $f^{(k)}$로 나타낸다.

f''과 $f^{(k)}$를 각각 y'', $y^{(k)}$로 나타내기도 한다.

기호읽기 f''은 "f double prime" 또는 "f의 이계도함수"라고 읽는다.

보기 11. $f(x)=x^4-3x^2+8x+6$일 때

$$\begin{aligned}
&f'(x)=4x^3-6x+8,\\
&f''(x)=12x^2-6,\\
&f^{(3)}(x)=24x,\\
&f^{(4)}(x)=24,\\
&f^{(5)}(x)=0,\\
&f^{(6)}(x)=0,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

이다.

문제 6. $f(x)=\sqrt{x}$일 때 $f'(x)$와 $f''(x)$를 각각 구하시오. [도움말: 문제 2의 풀이를 다시 보자.]

6 미분 공식

다항함수를 미분할 땐 다음 공식을 이용한다.

정리 4. 함수 f와 g가 미분 가능할 때 다음이 성립한다.

(1) k가 상수이고 $f(x)=k$이면 $f'(x)=0$이다.

(2) n이 자연수이고 $f(x)=x^n$이면 $f'(x)=nx^{n-1}$이다. (단 $n=1$일 땐 $f'(0)=1$로 계산한다.)

(3) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$이다.

(4) k가 상수이고 $y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$이다.

보기 12. 다항함수의 미분을 살펴보자.

(1) $y=x^4$일 때 $y'=4x^3$이다.

(2) $f(x)=4x^7$일 때 $f'(x)=28x^6$이다.

(3) $y=4x^7+x^4-3x$일 때 $y'=28x^6+4x^3-3$이다.

(4) $g(x)=(x-1)^2(x+3)$일 때

$$g(x)=(x^2-2x+1)(x+3)=x^3+x^2-5x+3$$

이므로 $g'(x)=3x^2+2x-5$이다.

위 보기 (4)의 도함수는 다음 공식을 이용하여 구할 수도 있다.

정리 5. 함수 f와 g가 미분 가능하고 $y=f(x)g(x)$일 때 다음이 성립한다.

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

보기 13. $g(x)=(x-1)^2(x+3)$일 때 $g(x)=(x^2-2x+1)(x+3)$이므로

$$g'(x)=(2x-2)(x+3)+(x^2-2x+1)\cdot 1=2x^2+4x-6+x^2-2x+1=3x^2+2x-5$$

이다.

분수함수를 미분할 땐 다음 공식을 이용한다.

정리 6. 함수 f와 g가 미분 가능하고

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

일때, $g(x)\neq 0$이면서 $g'(x)\neq 0$인 곳에서 다음이 성립한다.

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.$$

보기 14. 분수함수의 미분을 살펴보자.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$일 때 $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$이다.

(2) $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4x+5}$일 때

$$g'(x)=\frac{(x^2-4x+5)-(x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{-x^2-2x+17}{(x^2-4x+5)^2}$$

이다.

합성함수를 미분할 땐 다음 공식을 이용한다.

정리 7. 함수 f와 g가 미분 가능하고 합성함수 $g\circ f$가 정의될 때 다음이 성립한다.

$$y=g(f(x))\text{이면 } y'=g'(f(x))f'(x).$$

보기 15. $f(x)=(2x+3)^{10}$일 때

$$f'(x)=10(2x+3)^9\cdot 2=20(2x+3)^9$$

이다.

보기 16. 보기 13에서 살펴본 함수의 도함수를 다른 방법으로 구해보자.

$g(x)=(x-1)^2(x+3)$일 때

$$g'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=2x^2+4x-6+x^2-2x+1=3x^2+2x-5$$

이다.

정리 4의 (2)는 지수가 실수일 때도 성립한다.

정리 8. 지수가 실수인 단항함수의 미분법은 다음과 같다.

(1) n이 정수이고 $y=x^n$일 때 $y'=nx^{n-1}$이다.

(2) α가 실수이고 $y=x^\alpha$일 때 $x>0$인 범위에서 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$이다.

보기 17. 무리함수의 미분을 살펴보자.

(1) $y=\sqrt{x}$이면 $y=x^{1/2}$이므로 $y'=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이다.

(2) $y=8x^{5/4}$이면 $y'=10x^{1/4}$이다.

(3) $f(x)=6(x^2+4x-1)\sqrt{x^2+4x-1}$이면 $f(x)=6(x^2+4x-1)^{3/2}$이므로

$$f'(x)=6\cdot\frac{3}{2}(x^2+4x-1)^{1/2}\cdot(2x+4)=9(2x+4)\sqrt{x^2+4x-1}.$$

문제 **7.** 다음 도함수를 구하시오.

(1) $f(x) = (x^2+1)(x^5+1)$일 때 $f'(x)$

(2) $g(x) = (x^2-2x-1)(x^3-4x+5)$일 때 $g'(x)$

(3) $h(x) = (3x^4-x^2+1)^5$일 때 $h'(x)$

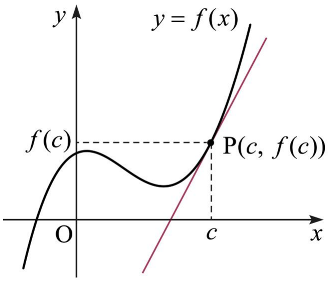
(4) $f(t) = (t^2+1)(t^5+1)(t^8+1)$일 때 $f'(t)$

(5) $g(t) = (t^2-2t-1)^3(t^3-4t+5)^4$일 때 $g'(t)$

(6) $h(t) = \{(2t+3)^3-4(2t+3)^2+(2t+3)\}^5$일 때 $h'(t)$

[도움말: 정리 4~8의 공식을 이용한다.]

문제 **8.** 다음 직선의 방정식을 구하시오.



(1) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 이 곡선에 접하는 직선

(2) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서 이 곡선에 접하는 직선

(3) $x=2$일 때 함수 $f(x)=x^2-x+1$의 그래프에 접하는 직선

(4) $x=-3$일 때 함수 $f(x)=-x^2+4x-1$의 그래프에 접하는 직선

[도움말: 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(c,\ f(c))$에서 그래프에 접하는 직선의 기울기는 $f'(c)$와 같다.]

두 번째 이야기

도함수의 활용

도함수를 이용하면 함수의 그래프의 모양을 파악할 수 있으며, 위치가 함수로 주어진 물체의 속도와 가속도를 구할 수 있다.

1 함수의 증가와 감소

함수 f가 구간 I에서 정의되었다고 하자. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

가 성립하면 "f가 **I에서 단조증가**한다"라고 말한다. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

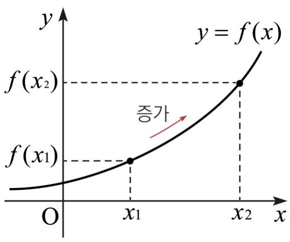
가 성립하면 "f가 **I에서 단조감소**한다"라고 말한다. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

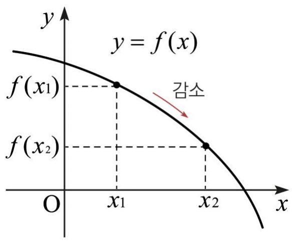
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

가 성립하면 "f가 **I에서 순증가**한다"라고 말한다. 만약 I의 임의의 점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

가 성립하면 "f가 **I에서 순감소**한다"라고 말한다.





보기 1. 함수 $f(x) = x^2$은 $x > 0$일 때 순증가하고, $x < 0$일 때 순감소한다.

만약 f가 I에서 단조증가하면, I의 점 x와 0이 아닌 값 $\varDelta x$에 대하여

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \geq 0$$

이 성립한다. 왜냐하면 $\varDelta x$가 양수든지 음수든지 상관 없이 $\varDelta x$의 부호와 $f(x+\varDelta x) - f(x)$의 부호가 같기 때문이다. 그러므로

$$f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} \geq 0$$

이다. 역으로 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \geq 0$이면, I에서 x의 값이 커질 때 $f(x)$의 값도 커지므로 f가 I에서 단조증가한다.

마찬가지로 함수 f가 I에서 단조감소하면 I의 모든 점에서 $f'(x) \le 0$이며, 역으로 I의 모든 점에서 $f'(x) \le 0$이면 f가 I에서 단조감소한다.

정리 1. 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하다고 하자. 이때 다음이 성립한다.
(i) I에서 f가 단조증가할 필요충분조건은 임의의 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \ge 0$인 것이다.
(ii) I에서 f가 단조감소할 필요충분조건은 임의의 I의 모든 점 x에서 $f'(x) \le 0$인 것이다.

참고 I의 모든 점에서 $f'(x) > 0$이면 f가 I에서 순증가한다. 그러나 역은 성립하지 않는다. 예컨대 $f(x) = x^3$이면 f는 순증가하는 함수이지만 $x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이다. □

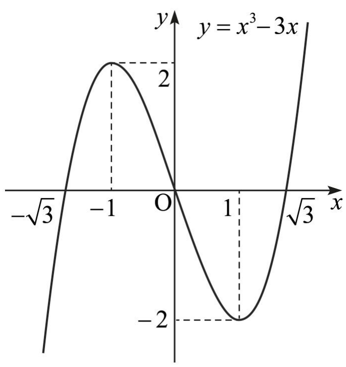
보기 2. 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 8$을 살펴보자. $f'(x) = 2x - 6$이므로 $x > 3$일 때 $f'(x) > 0$이고, $x < 3$일 때 $f'(x) < 0$이다. 그러므로 $x > 3$일 때 f는 단조증가하고, $x < 3$일 때 f는 단조감소한다.

문제 1. 함수 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$의 증가와 감소를 조사하시오.

[도움말: 도함수를 구한 뒤 미분계수의 부호를 조사한다.]

2 함수의 극값

함수 $f(x) = x^3 - 3x$의 그래프를 살펴보자. f는 최솟값을 갖지 않고 최댓값도 갖지 않는다. 그러나 $x = -1$ 근처에서 $f(x)$가 마치 최댓값을 갖는 것처럼 보이며, $x = 1$ 근처에서 $f(x)$가 최솟값을 갖는 것처럼 보인다.



이렇게 그래프를 가까이서 보았을 때 최댓값이나 최솟값처럼 보이는 값을 각각 극댓값, 극솟값이라고 부른다.

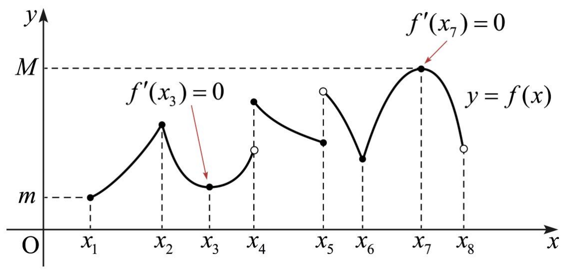
최댓값, 최솟값, 극댓값, 극솟값을 정확하게 정의하자.

함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자.

- 만약 I의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \le f(c)$이면 "f는 c에서 최댓값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 I에서 f의 **최댓값**이라고 부른다.
- 만약 I의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \ge f(c)$이면 "f는 c에서 최솟값을 가진다."라고 말하고, $f(c)$를 I에서 f의 **최솟값**이라고 부른다.
- 함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자.
- 만약 c를 원소로 갖는 작은 구간 J가 존재하여 $f(c)$가 J에서 g의 최댓값이 되면 "f는 c에서 극댓값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 g의 **극댓값**이라고 부른다.
- 만약 c를 원소로 갖는 작은 구간 J가 존재하여 $f(c)$가 J에서 f의 최솟값이 되면 "f는 c에서 극솟값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 g의 **극솟값**이라고 부른다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 부른다.

보기 **3.** 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다고 하자.



이 함수는 x_1, x_3, x_5, x_6에서 극솟값을 가지며 x_2, x_4, x_7에서 극댓값을 가진다.
이 함수는 x_1에서 최솟값 m을 가지며, x_7에서 최댓값 M을 가진다.
x_8에서는 극솟값을 갖지 않고 극댓값도 갖지 않는다.

정리 **2.** 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하다고 하자.
만약 c가 I의 안쪽에 있는 점이고 f가 c에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$이다.

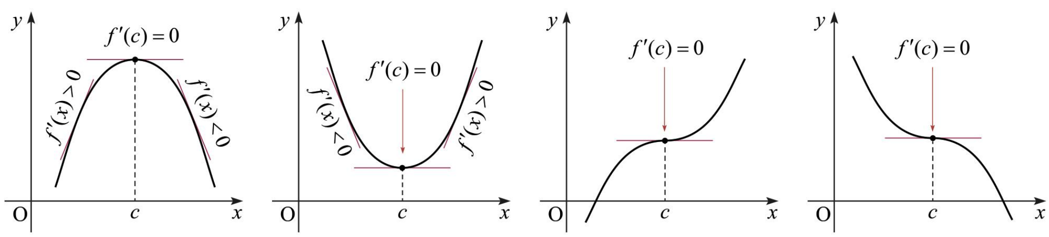
보기 **4.** 함수 $f(x) = x^3 + x$를 살펴보자. $f'(x) = 3x^2 + 1$이므로 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다. 그러므로 f는 어떤 점에서도 극값을 갖지 않는다.

보기 **5.** 함수 $g(x) = x^3$을 살펴보자. $g'(x) = 3x^2$이므로 $g'(x) = 0$인 점은 $x = 0$ 뿐이다. 그러나 $x_1 < x_2$일 때 $(x_1)^3 < (x_2)^3$이므로 g는 모든 곳에서 증가하는 함수이다. 즉 g는 0에서 극값을 갖지 않는다.

문제 **2.** 이차함수 $f(x) = x^2$의 정의역이 $[-2,\ 4]$일 때, 이 함수의 극값을 모두 구하시오.

문제 **3.** 최대정수함수가 극댓값을 갖는 점과 극솟값을 갖는 점을 모두 구하고, 그 점에서 극값을 구하시오.

함수가 미분 가능하면 극값을 갖는 점에서 미분계수가 0이다. 그러나 미분계수가 0이라고 해서 함수가 그 점에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다. 하지만 몇 가지 조건이 추가되면 함수가 극값을 가진다는 사실을 보일 수 있다.



정리 3. 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하고 c가 I의 점이라고 하자.
(1) 만약 $x<c$일 때 $f'(x)>0$이고, $c<x$일 때 $f'(x)<0$이면 f는 c에서 극댓값을 가진다.
(2) 만약 $x<c$일 때 $f'(x)<0$이고, $c<x$일 때 $f'(x)>0$이면 f는 c에서 극솟값을 가진다.

보기 6. 함수 $g(x)=x^3-3x$의 극값을 구해 보자.

$$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $g'(x)=0$인 점은 $x=-1$과 $x=1$ 뿐이다.
$x<-1$일 때 $g'(x)>0$이고 $x>-1$일 때 $g'(x)<0$이므로 g는 $x=-1$에서 극댓값을 가진다.
$x<1$일 때 $g'(x)<0$이고 $x>1$일 때 $g'(x)>0$이므로 g는 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

보기 7. 구간 $[3, 6]$에서 정의된 함수 $f(x)=(x-4)^2$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.
$f'(x)=2x-8$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=4$ 뿐이다.
$x<4$일 때 $f'(x)<0$이고, $x>4$일 때 $f'(x)>0$이므로 f는 $x=4$에서 극솟값을 가진다.
이제 구간의 양 끝점인 3, 6과 f의 미분계수가 0인 점 4에서 f의 함숫값을 비교하자.

$$f(3)=(-1)^2=1,\quad f(6)=(6-4)^2=4,\quad f(4)=0$$

이므로 f는 4에서 최솟값 0을 가지며, 6에서 최댓값 4를 가진다.

문제 4. 다음 함수의 극값을 조사하시오.
(1) $f(x)=x^3-3x+1$
(2) $f(x)=-x^3+6x^2-12x$
(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+8$
(4) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+2x^2-1$
[도움말: $f'(x)=0$이 되는 점 x를 모두 찾는다. 그리고 그 값의 왼쪽과 오른쪽에서 f'의 부호가 어떻게 달라지는지 조사한다.]

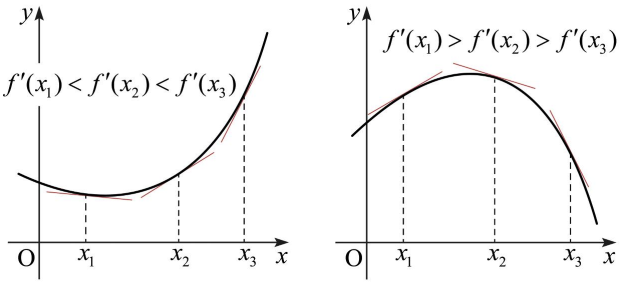
3 그래프의 볼록성

함수 f가 길이가 양수인 구간 I에서 두 번 미분 가능하다고 하자.

I에서 f의 그래프가 아래쪽으로 볼록하다고 하자. 그러면 I에서 f의 그래프의 기울기는 점점 커지므로 f'은 I에서 증가함수이다. 그러므로 I에서 f''의 부호는 양수이다.

마찬가지로 만약 I에서 f의 그래프가 위쪽으로 볼록하면 I에서 f''의 부호는 음수이다.

이러한 성질은 역으로도 생각할 수 있다. 즉 I의 모든 점에서 f''의 부호가 양수이면 I에서 f의 그래프는 아래쪽으로 볼록한 모양이고, I의 모든 점에서 f''의 부호가 음수이면 I에서 f의 그래프는 위쪽으로 볼록한 모양이다.



$f''(x) > 0$ $\qquad$ $f''(x) < 0$

> **정리 4.** 함수 f가 구간 I에서 두 번 이상 미분 가능하다고 하자.
> (1) I의 모든 점에서 f''의 부호가 양수이면 I에서 f의 그래프가 아래쪽으로 볼록하다.
> (2) I의 모든 점에서 f''의 부호가 음수이면 I에서 f의 그래프가 위쪽으로 볼록하다.

보기 8. 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 8$을 살펴보자. $f'(x) = 2x - 6$이고 $f''(x) = 2$이므로 f의 그래프는 모든 곳에서 아래쪽으로 볼록하다.

함수 f가 구간 I에서 정의되었고 c가 I의 점이라고 하자. 만약 c의 왼쪽과 오른쪽에서 f의 그래프가 볼록한 방향이 반대로 바뀌면 점 $(c,\ f(c))$를 f의 그래프의 **변곡점**이라고 부른다.

보기 9. 함수 $g(x) = x^3 + x^2 + x$를 살펴보자.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1,\quad g''(x) = 6x + 2$$

이므로, $x < -\dfrac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 위쪽으로 볼록하고, $x > -\dfrac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 아래쪽으로 볼록하다. 그러므로 $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{7}{27}\right)$은 g의 그래프의 변곡점이다.

함수 f가 구간 I에서 두 번 미분 가능하고 c가 I의 점이며 $f'(c) = 0$이라고 하자. 만약 $f''(c) < 0$이면 f의 그래프는 c의 근처에서 위쪽으로 볼록하므로 f는 c에서 극댓값을 가진다. 마찬가지로 만약 $f''(c) > 0$이면 f의 그래프는 c의 근처에서 아래쪽으로 볼록하므로 f는 c에서 극솟값을 가진다.

> **정리 5.** 함수 f가 구간 I에서 두 번 이상 미분 가능하다고 c가 I의 안쪽에 있는 점이며 $f'(c) = 0$이라고 하자.
> (1) 만약 $f''(c) < 0$이면 f가 c에서 극댓값을 가진다.
> (2) 만약 $f''(c) > 0$이면 f가 c에서 극솟값을 가진다.

보기 **10.** 함수 $h(x)=x^3-3x$를 살펴보자.

$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $h'(x)=0$인 점은 $x=-1$과 $x=1$ 뿐이다. 그런데

$$h''(x)=6x$$

이므로 $h''(-1)<0$이고 $h''(1)>0$이다. 그러므로 h는 -1에서 극댓값 2를 가지며, 1에서 극솟값 -2를 가진다.

문제 **5.** 다음 함수의 그래프의 모양을 조사하시오.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+3$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+2$

(3) $f(x)=(x-1)^4$

(4) $f(x)=x^4-4x^2$

[도움말: f'과 f''을 구하고 $f'(x)=0$ 또는 $f''(x)=0$인 점 x를 모두 찾는다. 그리고 보기 10을 참고하여 표를 만든다.]

4 물체의 운동

일직선 위에서 움직이는 물체를 생각하자. 물체가 움직이는 직선을 수직선으로 생각하면 물체의 위치를 수로 나타낼 수 있다. 물체의 운동이 시작하고 시간이 t만큼 지났을 때 물체의 위치를 $f(t)$라고 하면 f는 t의 함수이다.

시간이 t_0에서 t_1까지 $\Delta t=t_1-t_0$만큼 흐르면 물체의 위치는 $f(t_0)$에서 $f(t_1)$으로 변한다. 이때 $\Delta f=f(t_1)-f(t_0)$를 물체의 위치의 **변위**라고 부른다. 만약 물체가 운동하는 동안 운동 방향이 변하지 않으면 Δf의 부호가 변하지 않으므로 f'의 부호도 변하지 않는다.

물체의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 생각하자. 물체의 속력이 증가하면 단위시간 동안 Δf의 값은 커지고, 물체의 속력이 감소하면 단위시간 동안 Δf의 값은 작아진다. 그러므로 f'의 크기는 물체의 속력을 나타낸다. 이러한 관점에서, 함수 f가 물체의 위치를 나타낼 때 도함수 f'은 물체의 **속도**를 나타낸다. f'의 값이 양수이면 물체의 운동 방향은 처음과 같으며, f'의 값이 음수이면 물체의 운동 방향은 처음과 반대이다.

물체가 운동할 때, 속도의 변화율은 가속도이다. 그런데 f'이 물체의 속도를 나타내므로, f'의 변화율인 f''은 물체의 **가속도**를 나타낸다.

보기 **11.** 수직선 위에서 움직이는 물체를 생각하자. 시간이 t만큼 흘렀을 때 물체의 위치를

$$s=t^3-6t^2+9t-2$$

라고 하자. 이때 이 물체의 운동을 조사해 보자.

$s=f(t)$라고 두고 f를 미분하면 다음과 같다.

$$f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3),$$
$$f''(t)=6t-12=6(t-2)$$

이므로, f, f', f''의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(t)$	↱	2	↘	0	↳	-2	↗
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

이 물체는 출발한 후 점점 느려져서 $t=1$인 순간 위치가 2인 지점에 도달한 후 운동 방향이 바뀐다. 그리고 점점 빨라지다가 $t=2$인 순간 위치 0을 지나면서 점점 느려진다. $t=3$인 순간 위치 -2를 지나면서 운동 방향이 바뀐다. 그리고 계속 빨라진다.

문제 6. 다이빙 선수가 수면으로부터의 높이가 15 m인 다이빙대에서 뛰어오른 지 t초 후 수면으로부터의 높이를 h m라고 하면 $h=-5t^2+5t+15$가 성립한다고 한다. 다음 물음에 답하시오. (단, 속도는 수직속도만 고려한다.)

(1) 뛰어오른 지 1초 후 속도를 구하시오.
(2) 이 선수가 가장 높은 곳에 도달할 때까지 걸린 시간과, 그 순간의 높이를 구하시오.
(3) 이 선수가 수면에 닿는 순간의 속도를 구하시오.

문제 7. 달리는 열차가 제동을 건 후 t초 동안 달린 거리 s m는 $s=27t-0.45t^2$이라고 한다. 열차가 정지할 때까지 걸린 시간과 그때까지 움직인 거리를 구하시오.

세 번째 이야기

함수의 적분

1 역도함수와 부정적분

두 함수 F와 f가 모두 구간 I에서 정의되었고, I의 모든 점에서 $F'(x)=f(x)$를 만족시킨다고 하자. 이때 함수 F를 f의 **역도함수**라고 부른다.

두 함수 F와 G가 함수 f의 역도함수라고 하자. 그러면 $F'(x)=f(x)=G'(x)$이므로

$$G'(x)-F'(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수뿐이므로

$$G(x)-F(x)=(\text{상수})$$

즉

$$G(x)=F(x)+(\text{상수})$$

이다. 그러므로 f의 모든 역도함수를 구할 땐 f의 한 역도함수를 구한 뒤 그 함수에 상수를 더한 꼴을 구하면 된다.

> **보기** **1.** $f(x)=3x^2$일 때 함수 f의 모든 역도함수를 구해 보자. 먼저 $F(x)=x^3$이라고 하면 $F'(x)=3x^2=f(x)$이므로 F는 f의 한 역도함수이다. 그러므로 f의 모든 역도함수는
>
> $$3x^2+C \quad (C\text{는 상수})$$
>
> 꼴이다.

함수 f의 모든 역도함수를 f의 **부정적분**이라고 부르고

$$\int f(x)dx$$

로 나타낸다. 이 기호는 하나의 함수를 나타내는 것이 아니라, f의 역도함수가 될 수 있는 모든 함수를 나타낸다. 예컨대

$$\int 3x^2\,dx = x^3+C \quad (C\text{는 상수})$$

이다.

기호읽기 $\int f(x)dx$는 "integral $f\,x\,d\,x$"라고 읽는다.

2 부정적분의 계산

부정적분을 구하는 것은 미분의 역계산이므로, 부정적분의 성질은 대부분 미분의 성질로부터 얻을 수 있다.

정리 1. 함수 f와 g가 구간 I에서 정의되었고, I에서 f와 g의 역도함수가 각각 존재하면 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$, C는 임의의 상수.)

(2) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 실수인 상수.)

(3) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(4) $\displaystyle\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

보기 2. 다음 식에서 C는 임의의 상수를 나타낸다.

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C.$

(2) $\displaystyle\int 4x^3\,dx = x^4 + C.$

(3) $\displaystyle\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C.$

(5) $\displaystyle\int (x^5 + 4x^3 + 3x)dx = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{3x^2}{2} + C.$

문제 1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int (2x^3 + 3x^2 - x - 5)dx$

(2) $\displaystyle\int (x+2)(x+3)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

[도움말: 어떤 함수를 미분하면 주어진 함수가 될지 고민해 본다.]

보기 **3.** 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f'(x)=3x^2-2x+4$, $f(1)=5$를 만족시킨다고 하자. 이때 $f(x)$를 구해 보자. 먼저 $f'(x)$의 부정적분을 구하면

$$f(x)=x^3-x^2+4x+C \quad (C\text{는 상수})$$

이다. 그런데 $f(1)=5$이므로

$$f(1)=1-1+4+C=5$$

이다. 그러므로 $C=1$이다. 따라서 구하는 함수는

$$f(x)=x^3-x^2+4x+1$$

이다.

문제 **2.** 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f'(x)=-x^2+x+3$, $f(1)=5$를 만족시킨다. 이때 $f(x)$를 구하시오. [도움말: 역도함수를 구한 뒤, 조건 $f(1)=5$를 이용하여 상수함수를 결정한다.]

문제 **3.** 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 정의되어 있고 $f''(x)=6x-8$, $f'(0)=2$, $f(0)=-1$을 만족시킨다. 이때 $f(x)$를 구하시오. [도움말: 앞의 문제를 푸는 과정을 두 번 반복한다.]

3 정적분의 정의

$I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 닫힌 구간이고 함수 f가 I에서 정의되었다고 하자. 또한 f가 I에서 연속이고 I 위에서 $f(x)\ge 0$이라고 하자.

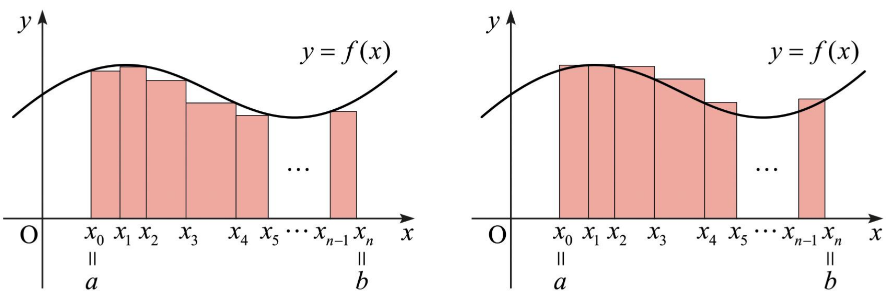
$y=f(x)$의 그래프와 x축, 그리고 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분을 S라고 하고 그 넓이를 A라고 하자. 구간 I에서 $(n+1)$개의 점 x_i들 다음과 같이 택하자.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

그러면 구간 I를 다음과 같이 n개의 소구간으로 쪼갤 수 있다.

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{i-1},\ x_i],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n]$$

i번째 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$의 길이를 Δx_i로 나타내자. 즉 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$이다.



소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 f의 최솟값을 m_i, 최댓값을 M_i로 나타내자. 그러면 다음이 성립한다.

$$m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n \le A \le M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n \qquad (*)$$

만약 소구간의 길이 중 가장 큰 값이 0에 다가가도록 구간을 잘게 자르는 극한을 취했을 때 위 부등식의 왼쪽 합과 오른쪽 합이 동일한 값에 수렴한다면, 그 극한값이 곧 A이다.

이와 같은 정의는 $f(x) \geq 0$이라는 조건을 제외해도 똑같이 생각할 수 있다.

또한 f가 연속이라는 조건을 제외한 정의를 생각할 수 있다. 이때에는 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 f의 최솟값이나 최댓값이 존재하지 않을 수도 있다. 그러나 최솟값과 최댓값 대신 f의 '하한값'과 '상한값'을 사용하여 비슷한 정의를 끌어낼 수 있다. ('하한값'과 '상한값'은 각각 '최솟값', '최댓값'과 비슷한 개념이라고 생각하면 된다. 궁금하면 검색해 보자.)

부등식 (*)의 왼쪽 합의 극한을 I에서 f의 **하적분**이라고 부르고, 오른쪽 합의 극한을 I에서 f의 **상적분**이라고 부른다. I에서 f의 하적분과 상적분이 일치할 때 "f는 I에서 **적분 가능**하다."라고 말한다. 그리고 그 값(하적분, 상적분)을 I에서 f의 **정적분** 또는 간단히 **적분**이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

특히 $a=b$일 때는

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

으로 정의하고, $a>b$일 때는

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

로 정의한다.

기호읽기 $\int_a^b f(x)dx$는 "integral from a to b $f\,x\,d\,x$", "인테그랄 a에서 b까지 에프엑스 디엑스"라고 읽는다.

이제 두 가지 의문이 생긴다.

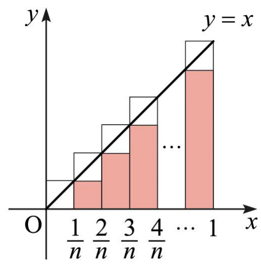
- 어떠한 함수가 적분 가능한가?
- 적분 가능한 함수가 있을 때, 적분을 어떻게 계산하는가?

먼저 적분 가능성에 대하여 다음과 같은 사실이 알려져 있다.[7)]

정리 2. I가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 정의된 함수라고 하자.
(1) f가 I에서 연속이면 f는 I에서 적분 가능하다.
(2) I에 f가 불연속인 점의 개수가 유한이면 f는 I에서 적분 가능하다.

7) 정리 2의 (2)가 적분 가능할 필요충분조건은 아니다. 즉 불연속인 점의 개수가 무한인 함수 중에도 적분 가능한 함수가 존재한다. 사실 유계인 함수가 닫힌 구간에서 적분 가능할 필요충분조건은 그 구간에서 불연속인 점들의 모임의 측도가 0인 것이다. 이 정리를 '르베그(Lebesgue)의 정리'라고 부른다.

보기 **4.** 구간 $I=[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=x$를 생각하자. 먼저 f는 I에서 연속이므로 f는 I에서 적분 가능하다. 적분값을 구해보자. n이 임의의 자연수라고 하고, 다음과 같은 점 x_i들을 생각하자.



$$x_i=\frac{i}{n}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

그러면 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{n},\quad M_i=f(x_i)=\frac{i}{n}$$

이다. I에서 f의 적분값을 A라고 하면

$$\left\{\frac{0}{n}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right\}\frac{1}{n}\le A\le\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right\}\frac{1}{n}$$

이다. 왼쪽 합과 오른쪽 합을 계산하면

$$\frac{n(n-1)}{2n^2}\le A\le\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

이다. 용기를 내어서 조금 더 계산해보면

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\le A\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

이다. 소구간의 길이가 0에 가까워지도록 I를 잘게 자르면 n의 값이 점점 커지며, n의 값이 커질수록 이 부등식의 왼쪽 식의 값과 오른쪽 식의 값은 $\frac{1}{2}$에 가까워진다. 소구간의 길이가 0에 '한없이' 가까워지는 극한을 생각하면 n의 값은 '한없이' 커지므로 $\frac{1}{2n}$의 값은 0에 '한없이' 가까워진다. 그러므로

$$\frac{1}{2}\le A\le\frac{1}{2}$$

이다. 즉 $A=\frac{1}{2}$이다. 여기서 A는 I에서 f의 적분값을 나타내므로

$$\int_0^1 x\,dx=\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}$$

이다. 이것은 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 1인 직각삼각형의 넓이와 일치한다.

보기 **5.** 구간 $I=[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $g(x)=x^2$을 생각하자. 먼저 g는 I에서 연속이므로 g는 I에서 적분 가능하다. n이 임의의 자연수라고 하고, 앞의 보기 4에서와 같은 점 x_i들을 생각하자. 그러면 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad m_i=g(x_{i-1})=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\quad M_i=g(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

이다. I에서 g의 적분값을 A라고 하면

$$\left\{\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right\}\frac{1}{n}\le A\le\left\{\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right\}\frac{1}{n}$$

이다. 왼쪽 합과 오른쪽 합을 계산하면

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\le A\le\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

이다. 보기 4에서와 마찬가지로 n의 값이 한없이 커지는 극한을 생각하면

$$\frac{2}{6} \le A \le \frac{2}{6}$$

이다. 그러므로

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

이다.

문제 4. $I=[0,\ 2]$에서 $f(x)=x^2$의 적분값을 구하시오. [도움말: 보기 4~5의 풀이 과정을 본다.]

문제 5. $I=[-1,\ 1]$에서 $g(x)=x^3$의 적분값을 구하시오. [도움말: 보기 4~5의 풀이 과정을 본다.]

4 정적분의 계산

앞의 보기 4와 보기 5에서 구간을 소구간으로 잘라서 적분값을 구하는 방법을 살펴보았다. 이와 같은 방법으로 적분값을 구하는 방법을 '구분구적법'이라고 부른다. 그러나 적분값을 구할 때마다 구분구적법을 이용하려면 무척 불편하다. 대신 연속함수는 다음과 같은 방법으로 적분값을 계산할 수 있다.

정리 3. $I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 만약 F가 I에서 정의된 함수이고, I에서 $F'=f$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

이 공식을 '**미적분의 기본정리**'라고 부른다.

보기 6. 앞의 보기 4와 보기 5에서 구한 적분값을 다시 구해보자.

(1) $f(x)=x$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2$이라고 하자. 그러면 $F'=f$이므로

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f(x)dx = F(1)-F(0) = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}.$$

(2) $g(x)=x^2$, $G(x)=\frac{1}{3}x^3$이라고 하자. 그러면 $G'=g$이므로

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = G(1)-G(0) = \frac{1}{3}-0 = \frac{1}{3}.$$

구간 I에서 함수 f의 적분을 계산할 때 $F'=f$를 만족시키는 함수 F는 어느 것을 택하든 상관없다. 예컨대 보기 6의 (1)에서

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2+4$$

라고 두면 $F'=f$이고

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} + 4\right) - 4 = \frac{1}{2}$$

이므로, 앞에서 계산한 것과 같은 결과를 얻는다.

보기 7. 미적분의 기본정리를 이용하면 다항함수의 적분을 쉽게 계산할 수 있다. 다음 적분을 계산해 보자.

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)dx$$

두 함수 f와 F를 다음과 같이 두자.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1,\quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

그러면 $F' = f$이므로

$$\int_2^4 f(x)\,dx = F(4) - F(2) = \left(\frac{64}{3} - 16 + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) = \frac{26}{3}.$$

문제 6. 다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{0} (x^2 + x + 1)dx$

(2) $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x)dx$

(3) $\int_{2}^{-1} (3x^2 - 4x)dx$

(4) $\int_{-1}^{-3} 4x^3\,dx$

(5) $\int_{-1}^{3} (12x^2 - 6x + 2)dx$

(6) $\int_1^2 (x^2 - 2x)dx + \int_1^2 (2x^2 + 2x + 1)dx$

(7) $\int_1^3 (x+2)^2 dx - \int_1^3 (x-2)^2 dx$

(8) $\int_1^3 (2x+1)^3 dx + \int_1^3 (2x-1)^3 dx$

[도움말: 미적분의 기본정리를 이용한다.]

정적분에서 변수의 이름이 달라져도 적분값은 달라지지 않는다. 예컨대 함수 f와 상수 a, b가 정해져 있을 때

$$\int_a^b f(x)dx,\quad \int_a^b f(t)dt,\quad \int_a^b f(y)dy$$

는 모두 같은 적분을 나타낸다.

문제 7. f가 다항함수이고, 임의의 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2 + 2x + a$$

를 만족시킨다. 이때 함수 $f(t)$와 상수 a의 값을 구하시오.

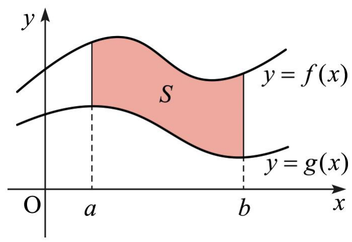
[도움말: $F' = f$인 함수 F를 하나 생각하자. 그리고 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분해 본다.]

5 도형의 넓이와 부피

정적분을 활용하여 평면도형의 넓이나 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

정리 4. $I = [a, b]$가 길이가 양수인 구간이고 f와 g가 I에서 연속인 함수라고 하자. 그리고 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$라고 하자. 그러면 $a \le x \le b$인 범위에서 두 함수의 그래프 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



보기 8. 직선 $y = x$와 포물선 $y = x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해 보자.

$f(x) = x$, $g(x) = x^2$이라고 하면 두 함수의 그래프는 $x = 0$, $x = 1$일 때만 교차한다. 그러므로 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

여기서

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

이라고 하면 $F'(x) = x - x^2$이므로

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$$

이다. 그러므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{6}$이다.

문제 8. 다음 도형의 넓이를 구하시오.

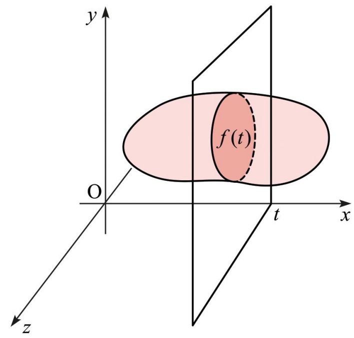
(1) 직선 $y = x - 1$과 곡선 $y = x^2 - 2x - 1$로 둘러싸인 도형

(2) 두 곡선 $y = x(x-2)$와 $y = -x(x+1)(x-2)$로 둘러싸인 도형

단면의 넓이를 함수로 나타낼 수 있는 입체도형의 부피는 적분을 이용하여 구할 수 있다.

정리 5. $I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 만약 좌표공간에서 입체도형이 $a \le x \le b$인 범위에 놓여있고, 이 입체도형을 평면 $x=t$로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $f(t)$와 같으면, 이 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b f(t)dt$$



보기 9. 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 뿔의 부피를 구해 보자. 뿔의 꼭짓점이 좌표공간의 원점과 일치하도록, 그리고 뿔의 밑면이 xy 평면과 평행하면서 $z>0$인 공간에 놓이도록 뿔의 위치를 조정하자. $0 \le t \le h$일 때, $z=t$인 평면으로 이 뿔을 자른 단면의 넓이를 $f(t)$라고 하자. 그러면 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

$$t^2 : h^2 = f(t) : S$$

이므로

$$f(t)=\frac{1}{h^2}St^2$$

이다.

$$F(t)=\frac{1}{3h^2}St^3$$

이라고 하면 $F'=f$이다. 그러므로 뿔의 부피는 다음과 같다.

$$\int_0^h f(t)dt = F(h)-F(0)=\frac{1}{3}Sh.$$

함수의 그래프를 회전시켜 얻은 입체도형의 부피는 다음과 같이 구한다.

정리 6. $I=[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 연속인 함수라고 하자. 그리고 I의 모든 점에서 $f(x)>0$이라고 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 회전시킨 도형과 두 평면 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 부분의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^2dx$$

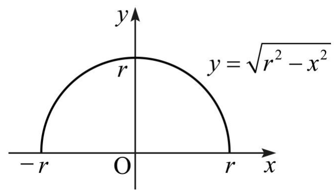
보기 10. 반지름이 r인 구의 부피를 구해 보자. 좌표평면에서 중심이 원점과 같고 반지름이 r인 원이 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2=r^2$$

여기서 $y \ge 0$이라고 하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \quad (-r \le x \le r)$$

좌표평면에서 이 함수의 그래프는 상반원이다.



그러므로 이 그래프를 x축에 대하여 한 번 회전시키면 그 자취는 반지름이 r인 구면이 된다. $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 이라고 하면, 반지름이 r인 구의 부피는 다음과 같다.

$$\int_{-r}^{r}\pi(f(x))^2dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx$$

이제

$$F(x)=\pi r^2x-\frac{\pi}{3}x^3$$

이라고 하면 $F'=f$이다. 그러므로

$$\int_{-r}^{r}\pi(f(x))^2dx=F(r)-F(-r)=\left(\pi r^3-\frac{\pi}{3}r^3\right)-\left(-\pi r^3+\frac{\pi}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

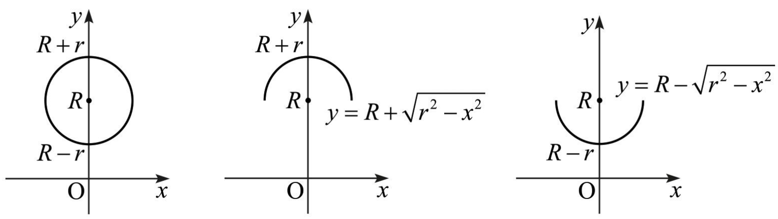
이다.

보기 11. 좌표평면에서 반지름의 길이가 r이고 중심의 좌표가 $(0,\ R)$인 원을 생각하자. 여기서 $R>r>0$이다. 이 원을 x축에 대하여 한 바퀴 회전시키면 그 자취는 **원환면**(torus)이 된다. 원환면으로 둘러싸인 입체도형의 부피를 구해보자.

먼저 다음과 같은 두 함수를 생각하자.

$$f(x)=R+\sqrt{r^2-x^2},\quad g(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}.\quad (-r\le x\le r)$$

좌표평면에서 함수 f의 그래프는 위쪽 반원이며, 함수 g의 그래프는 아래쪽 반원이다.



원환면으로 둘러싸인 부분의 부피를 구하려면 다음을 계산해야 한다.

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r}\pi(f(x))^2dx-\int_{-r}^{r}\pi(g(x))^2dx&=\pi\int_{-r}^{r}\left((f(x))^2-(g(x))^2\right)dx\\&=\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right)dx\\&=\pi\int_{-r}^{r}4R\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\end{aligned}$$

그런데 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 의 그래프는 반지름이 r인 위쪽 반원이다. 그러므로 위 적분은 반지름이 r인 반원과 지름으로 둘러싸인 도형의 넓이에 $4\pi R$를 곱한 것과 같다. 즉

$$4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\pi R\times\frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

이다. 이 값이 원환면으로 둘러싸인 입체도형의 부피이다.

6 물체의 운동

수직선 위에 놓인 물체가 운동할 때, t초 후 물체 위치를 $f(t)$라고 하면 물체의 속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

- 물체의 속도는 $f'(t)$이다.
- 물체의 가속도는 $f''(t)$이다.

그런데 적분할 때 미분의 역도함수가 사용되므로, 적분을 이용하면 가속도로부터 속도를 끌어내거나, 속도로부터 물체의 위치를 끌어낼 수 있다.

보기 12. 수직선 위에서 움직이는 물체를 생각해 보자. t초 후 이 물체의 가속도를 $6t^2\ (\mathrm{m/s^2})$이라고 하자. 움직임이 시작될 때, 즉 $t=0$일 때 이 물체의 속력이 $0\ \mathrm{m/s}$라면, 2초 후 이 물체가 처음 위치로부터 어느 방향으로 얼마나 이동한 곳에 있는지 구해 보자.

먼저 $6t^2$의 역도함수를 구하면 $2t^3+C_1$이다. 여기서 C_1은 상수이다. 움직임이 시작될 때 물체의 속력이 $0\ \mathrm{m/s}$이므로 $t=0$을 대입하면 $C_1=0$을 얻는다. 즉 t초 후 물체의 속도는 $v(t)=2t^3$이다.

다시 $2t^3$의 역도함수를 구하면

$$f(t)=\frac{1}{2}t^4+C_2$$

이다. 여기서 C_2는 상수이다. 비록 C_2의 값을 구할 수는 없지만, 물체가 어느 방향으로 얼마나 이동했는지는 알 수 있다.

$$f(0)=C_2,$$
$$f(2)=8+C_2$$

이므로

$$f(2)-f(0)=8$$

이다. 그러므로 2초 후 이 물체는 양의 방향으로 $8\ \mathrm{m}$ 이동한 곳에 있다.

문제 9. 좌표가 4인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-2t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 t에서 점 P의 위치
(2) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P의 변위
(3) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

문제 10. 지상 $30\,\mathrm{m}$의 높이에서 $49\,\mathrm{m/s}$의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 뒤의 속도가 $v(t) = 49 - 9.8t\ (\mathrm{m/s})$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 발사하고 3초 뒤 물체의 지면으로부터의 높이

(2) 지면에 떨어질 때까지 물체가 움직인 거리

부록

문제의 답

함수의 미분

문제 1. (1) 1 (2) 13 (3) 4 (4) 5

문제 2. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

문제 3. p가 상수항만으로 이루어진 다항식 $p(x)=k$이면 명백히

$$\lim_{x\to c} p(x)=k=p(c)$$

이다. 다음으로 p가 n차 다항식일 때

$$\lim_{x\to c} p(x)=p(c)$$

가 성립한다고 가정하자. p가 $(n+1)$차 다항식이라면 n차 다항식 $q(x)$가 존재하여 $p(x)=ax^{n+1}+q(x)$의 꼴로 쓸 수 있다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c}\left\{ax^{n+1}+q(x)\right\}\\ &= \lim_{x\to c} ax^{n+1}+\lim_{x\to c} q(x)\\ &= a\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n+1}+q(c)\\ &= ac^{n+1}+q(c)=p(c)\end{aligned}$$

이다. 그러므로 임의의 자연수 n에 대하여, p가 n차 다항식일 때

$$\lim_{x\to c} p(x)=p(c)$$

가 성립한다.

문제 4. (1) 8 (2) 4 (3) 4 (4) -6 (5) 1 (6) 6

문제 5. (1) $f'(x)=2$ (2) $f'(x)=2x$
(3) $f'(t)=2t$ (4) $f'(t)=6t$
(5) $g'(x)=-2x+3$ (6) $h'(t)=2t+2$

문제 6. (1) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (2) $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

문제 7. (1) $f'(x)=2x(x^5+1)+5x^4(x^2+1)$
(2) $g'(x)=(2x-2)(x^3-4x+5)+(x^2-2x-1)(3x^2-4)$
(3) $h'(x)=5(3x^4-x^2+1)^4(12x^3-2x)$
(4) $f'(t)=2x(x^5+1)(x^8+1)+5x^4(x^2+1)(x^8+1)+8x^7(x^2+1)(x^5+1)$
(5) $g'(t)=3(x^2-2x-1)^2(2x-2)(x^3-4x+5)^4$
$\quad +4(x^3-4x+5)^3(3x^2-4)(x^2-2x-1)^3$
(6) $h'(t)=5\left\{(2t+3)^3-4(2t+3)^2+(2t+3)\right\}^4\left\{3(2t+3)^2\times 2-8(2t+3)\times 2+2\right\}$

문제 8. (1) $y=2x-1$ (2) $y=4x-4$
(3) $y=3x-3$ (4) $y=10x+8$

도함수의 활용

문제 1. $f'(x)=6x^2-24x+18=6(x^2-4x+3)=6(x-1)(x-3)$.
$x<1$ 또는 $x>3$일 때 $f(x)$는 증가하고, $1<x<3$일 때 $f(x)$는 감소한다.

문제 2. $x=-2$와 $x=4$에서 각각 극댓값 4, 16을 가진다. $x=0$에서 극솟값 0을 가진다.

문제 3. n이 정수일 때 최대정수함수는 $x=n$에서 극댓값 n을 가지며, 그 점에서 극솟값은 갖지 않는다. x가 정수가 아닌 점일 때 최대정수함수는 x에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지며, 그 값은 $[x]$이다.

문제 4. (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=-1$, $x=1$이다.
$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f'(x)>0$이고, $-1<x<1$일 때 $f'(x)<0$이다.
그러므로 f는 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지며, $x=1$에서 극솟값 -1을 가진다.
이 함수는 최댓값이나 최솟값을 갖지 않는다.

(2) $f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=2$이다.
$x\neq 2$인 모든 점 x에서 $f'(x)<0$이다. 그러므로 f는 어느 점에서도 극값을 갖지 않는다. 이 함수는 최댓값이나 최솟값을 갖지 않는다.

(3) $f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=0$, $x=3$이다.
$x<3$, $x\neq 0$일 때 $f'(x)<0$이고, $x>3$일 때 $f'(x)>0$이다.
그러므로 f는 $x=3$에서 극솟값 $\frac{7}{2}$을 가진다. 이 값은 f의 최솟값이다.

(4) $f'(x)=2x^3-6x^2+4x=2x(x-1)(x-2)$이므로 $f'(x)=0$인 점은 $x=0$, $x=1$, $x=2$이다. $x<0$이거나 $1<x<2$일 때 $f'(x)<0$이고, $0<x<1$이거나 $x>2$일 때 $f'(x)>0$이다. 그러므로 f는 $x=0$에서 극솟값 -1을 갖고, $x=1$에서 극댓값 $-\frac{1}{2}$을 가지며 $x=2$에서 극솟값 -1을 가진다. 이 함수의 최솟값은 -1이다.

문제 5. (1) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
그래프 특징	↗	변곡점	↗

(2) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$		2		0		-2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
그래프 특징	↗	극댓값	↘	변곡점	↘	극솟값	↗

(3) $f'(x)=4(x-1)^3$, $f''(x)=12(x-1)^2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
그래프 특징	↘	최솟값	↗

(4) $f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$,

$f''(x)=12x^2-8=12\left(x^2-\dfrac{2}{3}\right)=12\left(x+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f(x)$		-4		$-\frac{20}{9}$		0		$-\frac{20}{9}$		-4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
그래프	↘	최솟값	↗	변곡점	↗	극댓값	↘	변곡점	↘	최솟값	↗

문제 6. (1) $h'=-10t+5$이므로 $t=1$을 대입하면 $h'=-5$이다.
즉 속도는 아래쪽 방향으로 $-5\ \mathrm{m/s}$이다.

(2) $h'=0$인 것은 $t=\dfrac{1}{2}$일 때뿐이다. $t<\dfrac{1}{2}$일 때 $h'>0$이고, $t>\dfrac{1}{2}$일 때 $h'<0$이므로 h는 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 가진다. $h=-5t^2+5t+15$에 $t=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $h=\dfrac{65}{4}$이다. 그러므로 구하는 시간은 0.5초, 그 순간의 높이는 $16.25\ \mathrm{m}$이다.

(3) $h=-5(t^2-t-3)$이므로 $h=0$이 되도록 하는 양수 t는 $t=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$이다.
이 값을 $h'=-10t+5$에 대입하면 $h'=-5\sqrt{13}$이다. 그러므로 수면에 닿는 순간의 속도는 아래쪽 방향으로 $-5\sqrt{13}\ \mathrm{m/s}$이다.

문제 7. t초 후 열차의 속도는 $s'=27-0.9t\ (\mathrm{m/s})$이므로 열차가 정지할 때, 즉 $s'=0$일 때는 $t=30$이다. 이 값을 $s=27t-0.45t^2$에 대입하면 $s=405$이다. 그러므로 걸린 시간은 30초이며, 움직인 거리는 $405\ \mathrm{m}$이다.

함수의 적분

문제 1. (1) $\dfrac{1}{2}x^4+x^3-\dfrac{1}{2}x^2-5x+C$

(2) $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2+6x+C$

(3) $-\dfrac{1}{x}+C$

(4) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$

문제 2. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+C$, $f(1)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3+C=5$, $C=\frac{11}{6}$.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{11}{6}$.

문제 3. $f'(x)=3x^2-8x+C_1$, $f'(0)=C_1=2$, $f'(x)=3x^2-8x+2$,

$f(x)=x^3-4x^2+2x+C$, $f(0)=C=-1$, $f(x)=x^3-4x^2+2x-1$.

문제 4. $\frac{8}{3}$

문제 5. 0

문제 6. (1) $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$라고 하면 $F'(x)=x^2+x+1$이므로

$$\int_{-1}^{0}(x^2+x+1)dx=F(0)-F(-1)=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{6}.$$

(2) $F(x)=x^3-2x^2$이라고 하면 $F'(x)=3x^2-4x$이므로

$$\int_{-1}^{2}(3x^2-4x)dx=F(2)-F(-1)=-3.$$

(3) 위 (2)에서 구한 결과를 이용하면

$$\int_{2}^{-1}(3x^2-4x)dx=-\int_{-1}^{2}(3x^2-4x)dx=3.$$

(4) $F(x)=x^4$이라고 하면 $F'(x)=4x^3$이므로

$$\int_{-1}^{-3}4x^3\,dx=-\int_{-3}^{-1}4x^3\,dx=-(F(-1)-F(-3))=-(1-81)=80.$$

(5) $F(x)=4x^3-3x^2+2x$라고 하면 $F'(x)=12x^2-6x+2$이므로

$$\int_{-1}^{3}(12x^2-6x+2)dx=F(3)-F(-1)=96.$$

(6) $F(x)=x^3+x$라고 하면 $F'(x)=3x^2+1$이므로

$$\int_{1}^{2}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{2}(2x^2+2x+1)dx=\int_{1}^{2}(3x^2+1)dx=F(2)-F(1)=8.$$

(7) $F(x)=2x^2$이라고 하면 $F'(x)=4x$이므로

$$\int_{1}^{3}(x+2)^2dx-\int_{1}^{3}(x-2)^2dx=\int_{1}^{3}4x\,dx=F(3)-F(1)=16.$$

(8) $F(x)=4x^4+3x^2$이라고 하면 $F'(x)=16x^3+6x$이므로

$$\int_{1}^{3}(2x+1)^3\,dx+\int_{1}^{3}(2x-1)^3\,dx=\int_{1}^{3}(16x^3+6x)dx=F(3)-F(1)=344.$$

문제 7. f가 다항함수이므로 f의 부정적분 또한 다항함수이다.
f의 한 부정적분을 F라고 하자. 그러면

$$\int_{1}^{x}f(t)dt=F(x)-F(1)=x^2+2x+a$$

이다. $F'=f$이므로, 위 식의 양변의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f(x)=F'(x)=2x+2$$

한편

$$\int_{1}^{x} f(t)dt = x^2 + 2x + a$$

에 $x = 1$을 대입하면

$$\int_{1}^{1} f(t)dt = 0 = 1^2 + 2\times 1 + a$$

이므로 $a = -3$이다.

문제 8. (1) 두 그래프는 $x = 0$일 때와 $x = 3$일 때 만난다.

또한 $0 < x < 3$일 때 직선이 곡선보다 위쪽에 있다.

그러므로 구하는 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_{0}^{3} \{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx = \int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx = \frac{9}{2}.$$

(2) 두 그래프가 만나는 것은 $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$일 때이다.

$-2 < x < 0$일 때는 이차함수의 그래프가 삼차함수의 그래프보다 위쪽에 있고,

$0 < x < 2$일 때는 삼차함수의 그래프가 이차함수의 그래프보다 위쪽에 있다.

그러므로 구하는 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_{-2}^{0} \{x(x-2)+x(x+1)(x-2)\}dx + \int_{0}^{2} \{-x(x-2)-x(x+1)(x-2)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx + \int_{0}^{2}(4x-x^3)dx = 4+4 = 8.$$

문제 9. (1) 점 P의 위치를 $s(t)$라 하면 $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 4$이다.

(2) $s(3) - s(0) = 4 - 4 = 0$.

(3) $v(t) = t(t-2)$이므로 $0 < t < 2$일 때 $v(t) < 0$이고 $t > 2$일 때 $v(t) > 0$이다.

$s(2) - s(0) = -\frac{4}{3}$이고 $s(3) - s(2) = \frac{4}{3}$이므로 P가 움직인 거리는 $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$이다.

문제 10. (1) 높이를 $h(t)$라 하면 $h(t) = 30 + 49t - 4.9t^2$(m)이다.

$h(3) = 132.9$이므로 3초 후 높이는 132.9 m이다.

(2) $t < 5$일 때 $v(t) > 0$이고 $t > 5$일 때 $v(t) < 0$이다.

그러므로 이 물체는 5초가 되기 전까지 위쪽으로 올라가다가 5초 이후에는 아래쪽으로 내려간다. $h(t) = 30 + 49t - 4.9t^2$에 $t = 5$를 대입하면 $h(5) = 152.5$이므로, 이 물체의 최고 높이는 152.5 m이다. 그러므로 이 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$$(152.5 - 30) + 152.5 = 275\,(\mathrm{m})$$

이다.