영재학급 특강

행렬과 복소수

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

- ✓ 행렬의 표현
- ✓ 행렬의 계산
- ✓ 역행렬
- ✓ 연립일차방정식
- ✓ 복소수의 표현
- ✓ 복소수의 곱

행렬의 표현

문제 **1.** 다음 예를 참고하여 주어진 연립방정식을 행렬로 나타내어 보자.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-6y=-7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow$

(2) $\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x+3y=23 \end{cases} \quad \Rightarrow$

행렬의 표현

문제 **1.** 주어진 연립방정식을 행렬로 나타내어 보자.

(3) $\begin{cases} -a+b=1 \\ 2a+3b=23 \end{cases}$ ⇨

(4) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=14 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ ⇨

(5) $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y-2z=2 \\ 2x-y+3z=-3 \end{cases}$ ⇨

행렬의 계산

문제 **2.** 다음 행렬의 덧셈과 뺄셈을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

행렬의 계산

문제 2. 다음 행렬의 덧셈과 뺄셈을 계산하시오.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $-2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

행렬의 계산

문제 3. 다음 행렬의 곱셈을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

행렬의 계산

문제 3. 다음 행렬의 곱셈을 계산하시오.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

행렬의 계산

문제 **4.** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 AB와 BA를 구하시오.

행렬의 계산

문제 **5.** 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(AB)C$

(2) $A(BC)$

(3) $(A+B)C$

(4) $AC+BC$

행렬의 계산

문제 **6.** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(AB)^2$

(2) A^2B^2

(3) $(A+B)^2$

(4) $A^2+2AB+B^2$

(5) $(A+B)(A-B)$

(6) A^2-B^2

행렬의 계산

문제 **7.** 모든 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $AE = EA = A$가 성립하도록 하는 2×2 행렬 E를 구하시오.

역행렬

행렬식

행렬 A의 **행렬식**을 $\det(A)$ 또는 $|A|$로 나타낸다.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때 $\det(A) = ad - bc$.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$일 때

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

역행렬

문제 8. 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

역행렬

역행렬

(1) **역행렬의 뜻** : A가 정사각행렬일 때 $AB=E$가 되는 행렬 B를 A의 **역행렬**이라고 부른다.
[A의 역행렬이 존재할 필요충분조건은 $\det(A)\neq 0$인 것이다.]

(2) **역행렬의 표기** : A의 역행렬을 A^{-1}로 나타낸다.

(3) **역행렬의 계산**

① $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

② $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$일 때 A^{-1}의 계산은?

역행렬

문제 **9.** 다음 행렬의 역행렬이 존재하는지 판별하고, 존재하면 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

역행렬

문제 9. 다음 행렬의 역행렬이 존재하는지 판별하고, 존재하면 역행렬을 구하시오.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

연립일차방정식

연립일차방정식의 해

(1) 연립일차방정식 $AX = B$의 해는 $X = A^{-1}B$이다.

(2) $AX = B$의 해가 유일하게 존재할 필요충분조건은 $\det(A) \neq 0$인 것이다.

(3) $\det(A) = 0$이면 $AX = B$의 해는 무수히 많거나 존재하지 않는다.

연립일차방정식

문제 **10.** 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

연립일차방정식

문제 **11.** 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+z=1 \\ 3x-y=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-z=1 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+y+4z=-1 \end{cases}$

복소수의 표현

(1) 허수단위와 복소수

① 제곱하여 -1이 되는 수 중 하나를 정하여 $\boldsymbol{i}$로 나타내고, 그것을 **허수단위**라고 부른다.

② $a+b\boldsymbol{i}$의 꼴로 나타나는 수를 **복소수**라고 부른다. (a와 b는 실수)
여기서 a를 **실수부**, b를 **허수부**라고 부른다.

(2) 복소수의 행렬표현

a와 b가 실수일 때 복소수 $a+b\boldsymbol{i}$를 행렬로 다음과 같이 나타낸다.

$$a+b\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

복소수의 표현

문제 **12.** 행렬 표현을 이용하여 다음 계산을 하시오.

(1) $(3+5i)+(2-7i)$

(2) $(3-2i)-(2-3i)$

(3) $(1+i)(2-i)$

(4) $(-3+i)\div(2-i)$

복소수의 표현

문제 **13.** 다음을 증명하시오. (단, a, b, c, d는 실수)

(1) $(a+b\boldsymbol{i})+(c+d\boldsymbol{i}) = (a+c)+(b+d)\boldsymbol{i}$

(2) $(a+b\boldsymbol{i})(c+d\boldsymbol{i}) = (ac-bd)+(ad+bd)\boldsymbol{i}$

(3) $z=a+b\boldsymbol{i}$일 때 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a^2+b^2}(a-b\boldsymbol{i})$

복소수의 표현

복소수의 극형식

(1) **복소평면** : 복소수 $a+b\boldsymbol{i}$는 **복소평면**에서 점 $(a,\ b)$로 나타낸다.

(2) **복소수의 편각** : 복소평면에서 복소수 z가 나타내는 점을 P라고 하자.
이때 x축의 양의 방향과 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 사이의 각을 복소수 z의 **편각**이라고 부른다.

(3) **복소수의 크기** : 복소수 $z=a+b\boldsymbol{i}$가 복소평면에서 원점으로부터 떨어진 거리를 z의 **크기**라고 부르고 $|z|$로 나타낸다. 즉 $z=\sqrt{a^2+b^2}$이다.

(4) **복소수의 극형식** : 복소수 z의 크기를 r, 편각을 θ라고 하면 $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$로 나타낼 수 있다.

복소수의 표현

문제 14. 다음 복소수를 오른쪽 복소평면에 나타내시오.

(1) $z_1 = 3 + 2i$

(2) $z_2 = -4 + 3i$

(3) $z_3 = 5 - 4i$

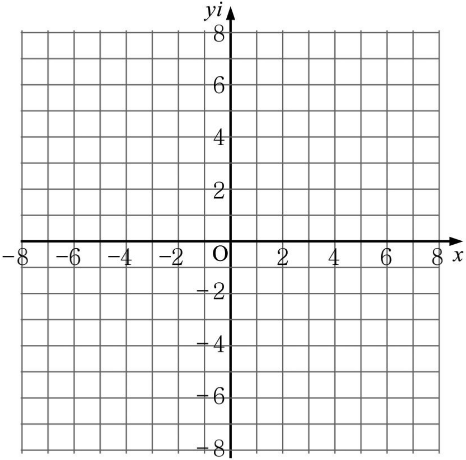
(4) $z_4 = -2 - 4i$

(5) $z_5 = 6 - 2i$

(6) $z_6 = 4$

(7) $z_7 = -2i$

(8) $z_8 = 0$



복소수의 표현

문제 **15.** 다음 복소수의 편각을 구하시오.

(1) $z = 1 - \boldsymbol{i}$

(2) $z = -\sqrt{3} + \boldsymbol{i}$

(3) $z = -\boldsymbol{i}$

(4) $z = 3$

(5) $z = -2 - \sqrt{12}\,\boldsymbol{i}$

(6) $z = 0$

복소수의 표현

문제 16. 다음 복소수를 극형식으로 나타내시오.

(1) $z = -1 + \boldsymbol{i}$

(2) $z = 1 - \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$

(3) $z = \boldsymbol{i}$

(4) $z = -2$

(5) $z = 2 - \sqrt{12}\,\boldsymbol{i}$

(6) $z = 0$

복소수의 곱

복소수의 곱

① 두 복소수를 곱할 때 절댓값은 곱하고 편각은 더한다.

즉 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_2)$일 때

$$z_1 z_2 = \left|z_1 z_2\right|\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right).$$

② **드 무아브르의 정리** : $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$일 때 $z^n = r^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta)$.

복소수의 곱

문제 **17.** 실수 α, β에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다.

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta, \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta.
\end{aligned}
$$

이 공식을 이용하여 복소수의 곱 공식을 유도하시오.

복소수의 곱

문제 18. 두 복소수 z_1과 z_2의 극형식이 다음과 같다.

$$z_1 = 2(\cos 15^\circ + \boldsymbol{i}\,\sin 15^\circ),\ \ z_2 = 3(\cos 45^\circ + \boldsymbol{i}\,\sin 45^\circ)$$

이때 다음 계산 결과를 극형식으로 나타내시오.

(1) $z_1 z_2$

(2) $(z_1)^2$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(4) $\dfrac{z_2}{z_1}$

복소수의 곱

문제 **19.** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$일 때 z^{10}을 구하시오.

복소수의 곱

문제 20. $z = 1 - \boldsymbol{i}$일 때 z^{14}을 구하시오.

공부한 내용

- ✓ 행렬의 표현
- ✓ 행렬의 계산
- ✓ 역행렬
- ✓ 연립일차방정식
- ✓ 복소수의 표현
- ✓ 복소수의 곱