

학번
이름

영재학급 특강

행렬과 복소수

1. 행렬의 계산
2. 역행렬과 일차방정식
3. 행렬과 복소수

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, <https://iseulbee.com>

이 자료의 저작권은 만든이에게 있습니다. 상업성/공익성 상관없이, 이 자료를 만든이가 직접 운영하는 커뮤니티 외의 곳에서 배포하는 것을 금지하며, 개인 학습이 아닌 다른 용도로 사용하는 것을 금지합니다.

영재학급 특강
한 걸음. 행렬의 계산

문제 1. 다음 예를 참고하여 주어진 연립방정식을 행렬로 나타내어 보자.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(2) \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(3) \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + 3b = 23 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(4) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(5) \begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

문제 2. 다음 행렬의 덧셈과 뺄셈을 계산하시오.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(6) -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

문제 3. 다음 행렬의 곱셈을 계산하시오.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

문제 4. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 AB 와 BA 를 구하시오.

문제 5. 세 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) $(AB)C$
- (2) $A(BC)$
- (3) $(A+B)C$
- (4) $AC+BC$

문제 6. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) $(AB)^2$
- (2) A^2B^2
- (3) $(A+B)^2$
- (4) $A^2+2AB+B^2$
- (5) $(A+B)(A-B)$
- (6) A^2-B^2

문제 7. 모든 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $AE=EA=A$ 가 성립하도록 하는 2×2 행렬 E 를 구하시오.

핵심정리

행렬의 곱의 성질

합과 곱이 정의되는 행렬 A, B, C 와 실수 k 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① $(AB)C = A(BC)$
- ② $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$
- ③ $(kA)B = k(AB) = A(kB)$

영재학급 특강
두 걸음. 역행렬과 연립일차방정식

핵심정리

행렬식

행렬 A 의 **행렬식**을 $\det(A)$ 또는 $|A|$ 로 나타낸다.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때 $\det(A) = ad - bc$.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 일 때 $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

문제 8. 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

핵심정리

역행렬

(1) **역행렬의 뜻** : A 가 정사각행렬일 때 $AB = E$ 가 되는 행렬 B 를 A 의 **역행렬**이라고 부른다.

[A 의 역행렬이 존재할 필요충분조건은 $\det(A) \neq 0$ 인 것이다.]

(2) **역행렬의 표기** : A 의 역행렬을 A^{-1} 로 나타낸다.

(3) **역행렬의 계산**

① $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

② $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 일 때 A^{-1} 의 a_{ji} 성분은 $\begin{pmatrix} a_{(i+1)(j+1)} & a_{(i+1)(j+2)} \\ a_{(i+2)(j+1)} & a_{(i+2)(j+2)} \end{pmatrix}$ 의 행렬식을 A 의 행렬식으로

나눈 것과 같다. (단, 첨자는 법 3에 대한 합동으로 계산한다.)

문제 9. 앞의 문제 8에서 주어진 행렬의 역행렬이 존재하는지 판별하고, 존재하면 역행렬을 구하시오.

연립일차방정식의 해

- (1) 연립일차방정식 $AX = B$ 의 해는 $X = A^{-1}B$ 이다.
- (2) $AX = B$ 의 해가 유일하게 존재할 필요충분조건은 $\det(A) \neq 0$ 인 것이다.
- (3) $\det(A) = 0$ 이면 $AX = B$ 의 해는 무수히 많거나 존재하지 않는다.

문제 10. 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$$

문제 11. 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식을 푸시오.

$$(1) \begin{cases} x + z = 1 \\ 3x - y = 2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = -2 \\ y + z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + y + 4z = -1 \end{cases}$$

※ 미지수가 4개 이상인 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 푸는 방법을 조사해보자.

영재학급 특강
세 걸음. 행렬과 복소수

핵심정리

복소수의 행렬 표현

(1) 허수단위와 복소수

- ① 제곱하여 -1 이 되는 수 중 하나를 정하여 i 로 나타내고, 그것을 **허수단위**라고 부른다.
- ② $a + bi$ 의 꼴로 나타나는 수를 **복소수**라고 부른다. (a 와 b 는 실수)
여기서 a 를 **실수부**, b 를 **허수부**라고 부른다.

(2) 복소수의 행렬표현

a 와 b 가 실수일 때 복소수 $a + bi$ 를 행렬로 다음과 같이 나타낸다.

$$a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

문제 12. 행렬 표현을 이용하여 다음 계산을 하시오.

- (1) $(3 + 5i) + (2 - 7i)$
- (2) $(3 - 2i) - (2 - 3i)$
- (3) $(1 + i)(2 - i)$
- (4) $(-3 + i) \div (2 - i)$

문제 13. 다음을 증명하시오. (단, a, b, c, d 는 실수)

- (1) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- (2) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bd)i$
- (3) $z = a + bi$ 일 때 $\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)$

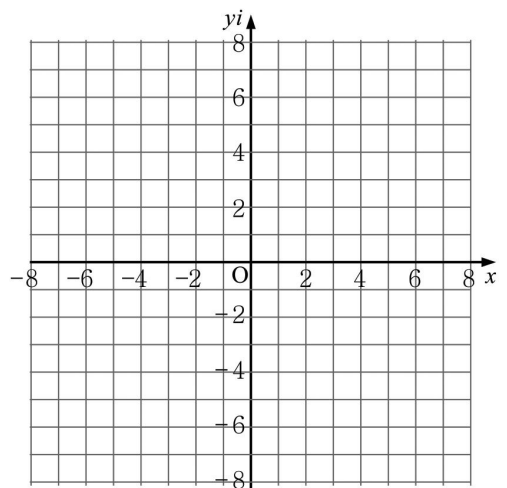
핵심정리

복소수의 극형식

- (1) **복소평면** : 복소수 $a + bi$ 는 **복소평면**에서 점 (a, b) 로 나타낸다.
- (2) **복소수의 편각** : 복소평면에서 복소수 z 가 나타내는 점을 P라고 하자. 이때 x 축의 양의 방향과 \overrightarrow{OP} 사이의 각을 복소수 z 의 **편각**이라고 부른다.
- (3) **복소수의 크기** : 복소수 $z = a + bi$ 가 복소평면에서 원점으로부터 떨어진 거리를 z 의 **크기**라고 부르고 $|z|$ 로 나타낸다. 즉 $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.
- (4) **복소수의 극형식** : 복소수 z 의 크기를 r , 편각을 θ 라고 하면 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 로 나타낼 수 있다.

문제 14. 다음 복소수를 오른쪽 복소평면에 나타내시오.

- (1) $z_1 = 3 + 2i$
- (2) $z_2 = -4 + 3i$
- (3) $z_3 = 5 - 4i$
- (4) $z_4 = -2 - 4i$
- (5) $z_5 = 6 - 2i$
- (6) $z_6 = 4$
- (7) $z_7 = -2i$
- (8) $z_8 = 0$



문제 15. 다음 복소수의 편각을 구하시오.

- (1) $z = 1 - i$
- (2) $z = -\sqrt{3} + i$
- (3) $z = -i$
- (4) $z = 3$
- (5) $z = -2 - \sqrt{12}i$
- (6) $z = 0$

문제 16. 다음 복소수를 극형식으로 나타내시오.

- (1) $z = -1 + i$
- (2) $z = 1 - \sqrt{3}i$
- (3) $z = i$
- (4) $z = -2$
- (5) $z = 2 - \sqrt{12}i$
- (6) $z = 0$

핵심정리

복소수의 곱

① 두 복소수를 곱할 때 절댓값은 곱하고 편각은 더한다.

즉 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 일 때

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

② **드 무아브르의 정리** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 일 때 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

문제 17. 실수 α , β 에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

이 공식을 이용하여 복소수의 곱 공식을 유도하시오.

문제 18. 두 복소수 z_1 과 z_2 의 극형식이 다음과 같다.

$$z_1 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ), \quad z_2 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

이때 다음 계산 결과를 극형식으로 나타내시오.

- (1) $z_1 z_2$
- (2) $(z_1)^2$
- (3) $\frac{z_1}{z_2}$
- (4) $\frac{z_2}{z_1}$

문제 19. $z = 1 + \sqrt{3}i$ 일 때 z^{10} 을 구하시오.

문제 20. $z = 1 - i$ 일 때 z^{14} 을 구하시오.