수학의 언어

자연수의 성질

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

- ✓ 자연수의 정의
- ✓ 자연수의 덧셈
- ✓ 자연수의 곱셈
- ✓ 자연수의 순서

자연수의 정의

자연수의 정의

0 이상의 정수는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing, \\
1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\}, \\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0,\ 1\}, \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0,\ 1,\ 2\}, \\
4 &= 3 \cup \{3\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \\
&\ \vdots \\
n+1 &= n \cup \{n\}, \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

이러한 수 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 모두 모은 집합을 ω로 나타낸다.

또한 ω의 원소 중에서 0을 제외한 것을 모은 집합을 $\mathbb{N}$으로 나타내고 **자연수 집합**이라고 부른다.

자연수의 정의

자연수의 정의

정의. 두 조건

$$1 \in X \quad \text{그리고} \quad n \in X \Rightarrow n+1 \in X$$

를 모두 만족시키는 집합 X 중에서 가장 작은 것을 **자연수 집합**이라고 부르며 $\mathbb{N}$으로 나타낸다. 그리고 $\mathbb{N}$의 원소를 **자연수**라고 부른다.

자연수의 정의

수학적 귀납법

자연수 집합의 성질을 증명할 때에는 다음과 같은 수학적 귀납법을 사용할 수 있다.

정리 1. 정의역이 자연수 집합인 명제함수 p가 두 조건

(i) $p(1)$이 참이다,

(ii) $p(k)$가 참일 때마다 $p(k+1)$도 참이 된다

를 모두 만족시키면, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

자연수의 정의

수학적 귀납법의 증명

명제함수 p의 진리집합을 T라고 하자. 즉 다음과 같이 정의하자.

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid p(n)\text{은 참이다}\,\}.$$

먼저 조건 (i)에 의하여 $1 \in T$이다. 또한 $k \in T$라고 하면 조건 (ii)에 의하여 $k+1 \in T$가 된다. 즉 집합 T는 두 명제

$$1 \in T \quad \text{그리고} \quad k \in T \Rightarrow k+1 \in T$$

가 참이 되도록 하는 집합이다. 이 두 명제를 참이 되도록 하는 집합 중 가장 작은 집합이 자연수 집합이므로 $\mathbb{N} \subseteq T$이다.

한편 T의 모든 원소는 자연수 중에서 모은 것이므로 $T \subseteq \mathbb{N}$이다. 따라서 $T = \mathbb{N}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. □

자연수의 덧셈

자연수의 덧셈의 정의

정의. 자연수 m과 n에 대하여 **덧셈**을 다음과 같이 정의한다.

(i) $n+1 = n \cup \{n\}$,

(ii) $m+(n+1) = (m+n)+1$.

자연수의 덧셈

예제 1. 다음을 증명하시오.

(1) $1+1=2$

(2) $3+2=5$

풀이.

(1) $1+1=1\cup\{1\}=\{0\}\cup\{1\}=\{0,\ 1\}=2$.

(2) $3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=(3\cup\{3\})+1=(\{0,\ 1,\ 2\}\cup\{3\})+1$

$=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}+1=4+1=4\cup\{4\}$

$=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}\cup\{4\}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}=5$. □

자연수의 덧셈

자연수의 덧셈의 성질

정리 2. 덧셈은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

(1) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(m+n)+p=m+(n+p)$이다. (덧셈의 결합법칙)

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $n+1=1+n$이다. ((3)을 위한 보조정리)

(3) 임의의 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n=n+m$이다. (덧셈의 교환법칙)

(4) 세 자연수 m, n, p에 대하여 $m+p=n+p$이면 $m=n$이다. (덧셈의 소거법칙)

자연수의 덧셈

(1) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(m+n)+p=m+(n+p)$이다. (덧셈의 결합법칙)

증명. m과 n이 임의의 자연수라고 하자. 먼저 덧셈의 정의에 의하여

$$(m+n)+1=m+(n+1)$$

이므로 $p=1$일 때에는 참이다. 이제 $p=k$일 때

$$(m+n)+p=m+(n+p)$$

가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(m+n)+(k+1)&=((m+n)+k)+1=(m+(n+k))+1\\&=m+((n+k)+1)=m+(n+(k+1))\end{aligned}$$

이므로 $p=k+1$일 때에도 참이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 p에 대하여 참이다. □

자연수의 덧셈

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $n+1=1+n$이다. ((3)을 위한 보조정리)

증명. 먼저 $n=1$일 때

$$n+1=1+1=1+n$$

이므로 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 그러면

$$(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1)$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 참이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 참이다. $\square$

자연수의 덧셈

(3) 임의의 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n=n+m$이다. (덧셈의 교환법칙)

증명. m이 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$m+1=1+m$$

이므로 $n=1$일 때 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $m+k=k+m$이라고 가정하자. 그러면

$$m+(k+1)=(m+k)+1=1+(m+k)=1+(k+m)=(1+k)+m=(k+1)+m$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 참이다

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 참이다. □

자연수의 덧셈

(4) 세 자연수 m, n, p에 대하여 $m+p=n+p$이면 $m=n$이다. (덧셈의 소거법칙)

증명. m과 n이 임의의 자연수라고 하자. 먼저 $m+1=n+1$이라고 가정하자. 그러면

$$m \cup \{m\} = m+1 = n+1 = n \cup \{n\}$$

이다. 즉 m은 $n \cup \{n\}$의 원소이므로 $m \in n$이거나 $m=n$이다.

같은 방법으로 생각하면 n은 $m \cup \{m\}$의 원소이므로 $n \in m$이거나 $n=m$이다.

만약 $m \in n$이면 $n \notin m$이고 $n \neq m$이므로 $m \in n$이 될 수 없다. 따라서 $m=n$이다. □

자연수의 곱셈

자연수의 곱셈의 정의

정의. 자연수 m과 n에 대하여 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

(i) $n \times 1 = n$,

(ii) $m \times (n+1) = (m \times n) + m$.

문자와 수 사이의 곱셈 기호, 문자와 문자 사이의 곱셈 기호는 생략한다.
따라서 위 정의는 다음과 같이 쓸 수 있다.

(i) $n1 = n$

(ii) $m(n+1) = (mn) + m$

자연수의 곱셈

예제 2. 다음을 증명하시오. (단, 덧셈의 증명 과정은 생략할 것.)

(1) $1 \times 1 = 1$

(2) $5 \times 2 = 10$

(3) $5 \times 3 = 15$

(4) $5 \times 4 = 20$

풀이.

(1) 자연수의 곱셈의 정의에 의하여 당연하다.
즉 곱셈의 정의 (i)에서 $n = 1$로 두면 $1 \times 1 = n \times 1 = n = 1$이다.

(2) $5 \times 2 = 5 \times (1 + 1) = (5 \times 1) + 5 = 5 + 5 = 10$.

(3) $5 \times 3 = 5 \times (2 + 1) = (5 \times 2) + 5 = 10 + 5 = 15$.

(4) $5 \times 4 = 5 \times (3 + 1) = (5 \times 3) + 5 = 15 + 5 = 20$. □

자연수의 곱셈

자연수의 곱셈의 성질

정리 3. 곱셈은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

(1) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(m+n)p = mp + np$이다. (우분배법칙)

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $1n = n$이다. ((3)을 위한 보조정리)

(3) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(mn)p = m(np)$이다. (곱셈의 결합법칙)

(4) 임의의 자연수 m, n에 대하여 $mn = nm$이다. (곱셈의 교환법칙)

(5) 임의의 자연수 m, n, p에 대하여 $p(m+n) = pm + pn$이다. (좌분배법칙)

자연수의 곱셈

(1) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(m+n)p = mp + np$이다. (우분배법칙)

증명. m과 n이 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$(m+n)1 = m+n = m1+n1$$

이므로 $p=1$일 때 참이다. 이제 $p=k$일 때 참이라고 가정하자.

즉 $(m+n)k = mk+nk$라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(m+n)(k+1) &= (m+n)k+(m+n) = (mk+nk)+(m+n)\\ &= ((mk+nk)+m)+n = (mk+(nk+m))+n\\ &= (mk+(m+nk))+n = ((mk+m)+nk)+n\\ &= (mk+m)+(nk+n) = m(k+1)+n(k+1)\end{aligned}$$

이므로 $p=k+1$일 때에도 참이다. □

자연수의 곱셈

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $1n = n$이다. ((3)을 위한 보조정리)

증명. 먼저 $n = 1$일 때 $1n = 1 \times 1 = 1 = n$이므로 참이다. 이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $1k = k$라고 가정하자. 그러면

$$1(k+1) = 1k + 1 = k + 1$$

이므로 $n = k + 1$일 때에도 참이다. □

자연수의 곱셈

(3) 임의의 세 자연수 m, n, p에 대하여 $(mn)p = m(np)$이다. (곱셈의 결합법칙)

증명. n과 p가 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$1(mn) = mn = (1m)n$$

이므로 $m = 1$일 때 참이다. 이제 $m = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $(kn)p = k(np)$라고 가정하자. 그러면

$$((k+1)n)p = (kn+1n)p = (kn)p + (1n)p = k(np) + 1(np) = (k+1)(np)$$

이므로 $m = k+1$일 때에도 참이다.

자연수의 곱셈

(4) 임의의 자연수 m, n에 대하여 $mn = nm$이다. (곱셈의 교환법칙)

증명. n이 임의의 자연수라고 하자. 그러면

$$1n = n = n1$$

이므로 $m = 1$일 때 참이다. 이제 $m = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $kn = nk$라고 가정하자. 그러면

$$(k+1)n = kn + 1n = nk + n1 = nk + n = n(k+1)$$

이므로 $m = k+1$일 때에도 참이다. □

자연수의 곱셈

(5) 임의의 자연수 m, n, p에 대하여 $p(m+n) = pm + pn$이다. (좌분배법칙)

증명. 앞에서 증명한 (1)과 (4)를 결합하면 (5)를 얻는다. □

자연수의 순서

자연수의 순서관계의 정의

자연수는 크기를 비교할 수 있다. 즉 두 자연수 m, n에 대하여

$$m < n \text{ 또는 } m = n \text{ 또는 } m > n$$

중 하나가 성립한다. 이 절에서는 자연수의 순서를 논리적으로 정의하고 그 성질을 살펴보자.

정의. 집합 ω에서 순서관계 $<$와 $\leq$를 다음과 같이 정의한다.

(1) ω의 원소 m, n에 대하여 $m \in n$일 때 'm보다 n이 **크다**'라고 말하고 이것을 $m < n$으로 나타낸다.

(2) ω의 원소 m, n에 대하여 '$m < n$ 또는 $m = n$'인 것을 $m \leq n$으로 나타낸다.

자연수의 순서

예제 3. 다음을 증명하시오.

(1) $0 < 1$

(2) $1 < 3$

(3) 임의의 자연수 n에 대하여 $0 < n$이다.

풀이.

(1) $0 = \varnothing \in \{\varnothing\} = 1$이므로 $0 < 1$이다.

(2) $1 \in \{0, 1, 2\} = 3$이므로 $1 < 3$이다.

(3) 먼저 $0 < 1$이므로 $n = 1$일 때에는 참이다. $n = k$일 때 $0 < n$이라고 가정하면

$$0 \in k \subseteq k \cup \{k\} = k + 1$$

이므로 $n = k + 1$일 때에도 $0 < n$이다. □

자연수의 순서

정리 4. 자연수 m, n에 대하여 $m \in n$이면 $m \subseteq n$이다.

증명. $n = 1$일 때는 참이다. 왜냐하면 $n = 1 = \{\varnothing\}$이므로 어떠한 자연수 m에 대해서도 $m \in n$이 될 수 없다. 따라서 $m \in n \to m \subseteq n$의 가정이 모순이므로 결론에 상관없이 이 명제는 참이다.

이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 그리고 $m \in (k+1)$이라고 하자.
그러면 $m \in k \cup \{k\}$이다. 따라서

$$m \in k \text{ 또는 } m = k$$

이다. 그런데 $m \in k$이면 $m \subseteq k$이다. 따라서 위 명제는

$$m \subseteq k \text{ 또는 } m = k$$

가 된다. 따라서 $m \subseteq k \cup \{k\} = k + 1$이므로 $n = k + 1$일 때에도 참이다. □

자연수의 순서

자연수의 순서관계의 성질

정리 5. 자연수의 순서관계는 다음과 같은 성질을 가진다.

(1) 자연수 m, n, p에 대하여 $m < n$이고 $n < p$이면 $m < p$이다.

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $1 \leq n$이다.

(3) 자연수 m, n에 대하여 $m < n$이면, $m + 1 = n$이거나 $m + 1 < n$이다.

(4) 임의의 자연수 m, n에 대하여 $m < n$ 또는 $m = n$ 또는 $n < m$이 성립한다.

자연수의 순서

(1) 자연수 m, n, p에 대하여 $m < n$이고 $n < p$이면 $m < p$이다.

증명. $m < n$이고 $n < p$라고 가정하자. $m < n$이므로 $m \in n$이다.

$n < p$이므로 $n \in p$이고 정리 4에 의하여 $n \subseteq p$가 된다. 즉 $m \in n \subseteq p$이므로 $m \in p$이다.

따라서 $m < p$이다. □

자연수의 순서

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $1 \leq n$이다.

증명. 먼저 $1 \leq 1$이므로 $n = 1$일 때 참이다. 이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉

$$1 < k \text{ 또는 } 1 = k$$

가 성립한다고 가정하자. 이것은 $1 \in k$ 또는 $1 = k$가 성립한다는 것을 의미한다.

그런데 $k \subseteq k + 1$이므로 위 명제에 의하여 $1 \in k + 1$이 성립한다. 즉 $1 < k + 1$이다.

따라서 $n = k + 1$일 때에도 참이다. □

자연수의 순서

(3) 자연수 m, n에 대하여 $m<n$이면, $m+1=n$이거나 $m+1<n$이다.

증명. 먼저 $n=1$일 때에는 참이다. 왜냐하면 $m<n$인 자연수 m이 존재하기 때문에

$$(m<n)\rightarrow(m+1=n \ \vee \ m+1<n)$$

의 가정이 거짓이 되어, 결론에 상관없이 이 명제는 참이다.

이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉

$$(m<k)\Rightarrow(m+1=k \ \vee \ m+1<k)$$

가 성립한다고 가정하자. 이것은

$$(m\in k)\Rightarrow(m+1=k \ \vee \ m+1\in k)$$

으로 쓸 수 있다. (뒷장 계속)

자연수의 순서

앞의 명제를 이용하면

$$\begin{aligned} m \in k+1 &\Rightarrow m \in k \cup \{k\} \Rightarrow m \in k \ \vee \ m = k \\ &\Rightarrow (m+1 \in k \ \vee \ m+1 = k) \ \vee \ m = k \end{aligned} \qquad (*)$$

를 얻는다. 한편

$$m = k \Rightarrow m+1 = m \cup \{m\} = k \cup \{k\} = k+1 \quad \text{그리고} \quad k \in k+1 \quad \text{그리고} \quad k \subseteq k+1$$

이므로 (*)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m \in k+1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (m+1 \in k+1 \ \vee \ m+1 = k+1) \ \vee \ m+1 = k+1$$

이것은

$$m < k+1 \Rightarrow (m+1 < k+1 \ \vee \ m+1 = k+1)$$

을 의미한다. 따라서 $n = k+1$일 때에도 참이다. □

자연수의 순서

(4) 임의의 자연수 m, n에 대하여 $m < n$ 또는 $m = n$ 또는 $n < m$이 성립한다.

증명. m이 임의로 주어진 자연수라고 하자. 먼저 $1 < m$ 또는 $m = 1$이 성립하므로 $n = 1$일 때에는 참이다. 이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉

$$m < k \quad \text{또는} \quad m = k \quad \text{또는} \quad k < m$$

중 하나가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} m < k\text{이면}\ & m < k+1, \\ m = k\text{이면}\ & m < k+1, \\ k < m\text{이면}\ & k+1 = m \ \text{또는}\ k+1 < m \end{aligned}$$

이므로 $m < k+1$ 또는 $m = k+1$ 또는 $k+1 < m$ 중 하나가 성립한다.
따라서 $n = k+1$일 때에도 참이다. □

공부한 내용

- ✓ 자연수의 정의
- ✓ 자연수의 덧셈
- ✓ 자연수의 곱셈
- ✓ 자연수의 순서