

수학의 언어

집합의 논리적 이해

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, <https://iseulbee.com>

이 자료의 저작권은 만든이에게 있습니다. 상업성/공익성 상관없이, 이 자료를 만든이가 직접 운영하는 커뮤니티 외의 곳에서 배포하는 것을 금지하며, 개인 학습이 아닌 다른 용도로 사용하는 것을 금지합니다.

공부할 내용

- ✓ 집합의 연산
- ✓ 집합의 연산의 성질
- ✓ 연습문제

※ 집합의 관계와 연산을 논리적으로 정의하고, 그 성질을 증명하는 방법을 살펴보자.

집합의 연산

부분집합과 초집합

정의. A 와 B 가 집합이라고 하자. 만약 A 의 원소가 모두 B 에 포함되면, 즉 $a \in A \Rightarrow a \in B$ 가 성립하면 A 를 B 의 **부분집합**이라고 부르고 B 를 A 의 **초집합**이라고 부른다.

이것을 기호로는 $A \subseteq B$ 또는 $B \supseteq A$ 로 나타낸다.

집합의 연산

예제 1. 집합 $S = \{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 구하시오. (단, $a \neq b \neq c \neq a$.)

집합의 연산

예제 1. 집합 $S = \{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 구하시오. (단, $a \neq b \neq c \neq a$.)

풀이. 각각의 원소가 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 생각하면 모두 $2^3 = 8$ 가지 경우가 나온다. 따라서 S 의 부분집합은 8개이며 이것을 나열하면 다음과 같다.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S$$

□

집합의 연산

동치와 부분집합

두 집합 A 와 B 에 대하여 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ 가 성립하면 ‘두 집합 A 와 B 는 동치이다’ 또는 간단하게 ‘두 집합이 같다’라고 하며 $A = B$ 로 나타낸다.

집합 S 에 대하여 $A \subseteq S$ 이면서 $A \neq S$ 인 집합 A 를 S 의 **진부분집합**이라고 부른다.

예를 들어, 집합 $S = \{a, b, c\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면 다음과 같다.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

A 가 S 의 진부분집합일 때 $A \subsetneq B$ 라고 나타낸다. 책에 따라서는 부분집합의 기호와 진부분집합의 기호를 혼용하여 사용하기도 한다.

집합의 연산

정리 1. 임의의 집합 A 에 대하여 $\emptyset \subseteq A$ 이다.

집합의 연산

정리 1. 임의의 집합 A 에 대하여 $\emptyset \subseteq A$ 이다.

증명. 정리를 증명하기 위해서는 임의의 집합 A 에 대하여

$$a \in \emptyset \rightarrow a \in A$$

가 참임을 보이면 된다. 그런데 공집합은 어떠한 원소도 포함하고 있지 않으므로 $a \in \emptyset$ 는 항상 거짓이다. 가정이 거짓이므로 결론에 상관없이 본 명제는 항상 참이다. \square

집합의 연산

멱집합

정의 2. 집합 A 의 부분집합을 모두 모아놓은 집합을 A 의 **멱집합**이라고 부르며 $\wp(A)$ 로 나타낸다.

예제 2. $A = \{1, 2\}$ 일 때 $\wp(A)$ 를 구하시오.

풀이. $\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

□

집합의 연산

예제 3. 공집합 \emptyset 에 대하여 $\wp(\wp(\emptyset))$ 를 구하십시오.

풀이. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\wp(\wp(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.



집합의 연산

집합의 연산

정의. 두 집합 A 와 B 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) 합집합 : $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

(2) 교집합 : $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(3) 차집합 : $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

집합의 연산

집합의 원소의 개수

합집합의 정의에 의하여

$$n(A) + n(B) \geq n(A \cup B)$$

임을 알 수 있다. 예컨대 두 집합

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}$$

의 합집합을 구하면

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

이다. 따라서 $n(A) + n(B) = 6$ 이지만 합집합의 원소의 개수인 $n(A \cup B) = 5$ 이므로 서로 같지 않다.

그런데 앞의 두 집합의 교집합을 구하면 $A \cap B = \{2\}$ 이 되어 각각의 원소의 개수를 더한 값에서 합집합의 원소의 개수를 뺀 것과 일치함을 알 수 있다. 즉 다음과 같은 공식을 얻는다.

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

집합의 연산

서로소

만약에 두 집합이 공통원소를 갖고 있지 않으면 두 집합의 교집합은 공집합이 된다. 이를테면 두 유한집합 X, Y 에 대하여 $X \cap Y = \emptyset$ 이면

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$$

가 성립한다. 이와 같이 두 집합이 공통원소를 갖지 않을 때, 즉 두 집합의 교집합이 공집합이 될 때 ‘두 집합은 서로소이다’라고 말한다.

집합의 연산

여집합

정의. 전체집합 U 와 그 부분집합 A 에 대하여, A 의 **여집합**은 A 에 속하지 않는 원소를 모두 모은 집합으로 정의하며 A^c 로 나타낸다. 즉, $A^c = U \setminus A$ 이다.

원소 x 가 $A \cap B^c$ 에 속한다고 가정하고 이를 전개해보면

$$x \in A \cap B^c \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B^c) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \setminus B$$

가 된다. 따라서 $A \setminus B = A \cap B^c$ 임을 알 수 있다.

집합의 연산의 성질

정리 2. 집합 A, B, C 에 대하여 다음이 성립한다.

- | | |
|--|--------|
| (1) $A \cup A = A$ | (역등법칙) |
| (2) $A \cap A = A$ | (역등법칙) |
| (3) $A \cup B = B \cup A$ | (교환법칙) |
| (4) $A \cap B = B \cap A$ | (교환법칙) |
| (5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | (분배법칙) |
| (6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | (분배법칙) |
| (7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | (결합법칙) |
| (8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | (결합법칙) |

집합의 연산의 성질

(7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 의 증명

집합의 연산의 성질

정리 3. 집합 A , B 와 전체집합 U 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) A \cup \emptyset = A$$

$$(2) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(3) A \cap A^c = \emptyset$$

$$(4) (A^c)^c = A$$

$$(5) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(6) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

여기서 (5)와 (6)을 드 모르간의 법칙이라고 부른다.

집합의 연산의 성질

(6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 의 증명

연습문제

문제 1. 다음 집합의 포함관계, 즉 어느 것이 어느 것의 부분집합인지 판별하시오.

(1) $A = \{x \mid x^2 - 8x + 17 = 0\}$

(2) $B = \{2, 4, 6\}$

(3) $C = \{2k \mid k \text{는 자연수}\}$

(4) $D = \{6\}$

연습문제

문제 2. 두 집합 A 와 B 가 동치일 필요충분조건은 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 임을 보이시오.

연습문제

문제 3. A 가 집합일 때, $A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ 임을 보이시오.

연습문제

문제 4. A, B, C 가 집합일 때,

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

가 성립함을 증명하십시오.

연습문제

문제 5. 집합 $\{x, \{y, z\}\}$ 의 모든 부분집합을 구하시오. (단, $x \neq y \neq z \neq x$)

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하시오.

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하십시오.

$$(2) [(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하십시오.

$$(3) [(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$$

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하십시오.

(4) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하십시오.

(5) $A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$

연습문제

문제 6. A, B, C 가 집합일 때, 다음을 증명하십시오.

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow (B \setminus A) \cup B = A$

연습문제

문제 7. 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오. 그것이 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 드시오.

(1) $[x \in A \text{이고 } A \in B]$ 이면 $x \in B$ 이다.

(2) $[A \subseteq B \text{이고 } B \in C]$ 이면 $A \in C$ 이다.

(3) $[A \not\subseteq B \text{이고 } B \subseteq C]$ 이면 $A \not\subseteq C$ 이다.

연습문제

문제 7. 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오. 그것이 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 드시오.

(4) $[A \not\subseteq B \text{이고 } B \not\subseteq C]$ 이면 $A \not\subseteq C$ 이다.

(5) $[x \in A \text{이고 } A \not\subseteq B]$ 이면 $x \notin B$ 이다.

연습문제

문제 7. 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하십시오. 그것이 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 드시오.

(6) $[A \subseteq B$ 이고 $x \notin B]$ 이면 $x \notin A$ 이다.

공부한 내용

- ✓ 집합의 연산
- ✓ 집합의 연산의 성질
- ✓ 연습문제