수학의 언어

집합의 논리적 이해

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

✓ 집합의 연산
✓ 집합의 연산의 성질
✓ 연습문제

※ 집합의 관계와 연산을 논리적으로 정의하고, 그 성질을 증명하는 방법을 살펴보자.

집합의 연산

부분집합과 초집합

정의. A와 B가 집합이라고 하자. 만약 A의 원소가 모두 B에 포함되면, 즉 $a \in A \implies a \in B$가 성립하면 A를 B의 **부분집합**이라고 부르고 B를 A의 **초집합**이라고 부른다.

이것을 기호로는 $A \subseteq B$ 또는 $B \supseteq A$로 나타낸다.

집합의 연산

예제 1. 집합 $S=\{a,\ b,\ c\}$의 부분집합을 모두 구하시오. (단, $a \neq b \neq c \neq a$.)

풀이. 각각의 원소가 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 생각하면 모두 $2^3=8$가지 경우가 나온다. 따라서 S의 부분집합은 8개이며 이것을 나열하면 다음과 같다.

$$\varnothing\,,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ S$$

□

집합의 연산

동치와 부분집합

두 집합 A와 B에 대하여 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$가 성립하면 '두 집합 A와 B는 **동치**이다' 또는 간단하게 '두 집합이 **같다**'라고 하며 $A = B$로 나타낸다.

집합 S에 대하여 $A \subseteq S$이면서 $A \neq S$인 집합 A를 S의 **진부분집합이**라고 부른다.

예를 들어, 집합 $S = \{a, b, c\}$의 진부분집합을 모두 구하면 다음과 같다.

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

A가 S의 진부분집합일 때 $A \subsetneq B$라고 나타낸다. 책에 따라서는 부분집합의 기호와 진부분집합의 기호를 혼용하여 사용하기도 한다.

집합의 연산

정리 1. 임의의 집합 A에 대하여 $\varnothing \subseteq A$이다.

증명. 정리를 증명하기 위해서는 임의의 집합 A에 대하여

$$a \in \varnothing \ \rightarrow \ a \in A$$

가 참임을 보이면 된다. 그런데 공집합은 어떠한 원소도 포함하고 있지 않으므로 $a \in \varnothing$는 항상 거짓이다. 가정이 거짓이므로 결론에 상관없이 본 명제는 항상 참이다. □

집합의 연산

멱집합

정의 2. 집합 A의 부분집합을 모두 모아놓은 집합을 A의 **멱집합**이라고 부르며 $\wp(A)$로 나타낸다.

예제 2. $A = \{1, 2\}$일 때 $\wp(A)$를 구하시오.

풀이. $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ □

예제 3. 공집합 $\varnothing$에 대하여 $\wp(\wp(\varnothing))$를 구하시오.

풀이. $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\wp(\wp(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. □

집합의 연산

집합의 연산

정의. 두 집합 A와 B에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) **합집합** : $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$

(2) **교집합** : $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

(3) **차집합** : $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

집합의 연산

집합의 원소의 개수

합집합의 정의에 의하여

$$n(A)+n(B) \geq n(A \cup B)$$

임을 알 수 있다. 예컨대 두 집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\}$$

의 합집합을 구하면

$$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$$

이다. 따라서 $n(A)+n(B)=6$이지만 합집합의 원소의 개수인 $n(A \cup B)=5$이므로 서로 같지 않다.

그런데 앞의 두 집합의 교집합을 구하면 $A \cap B=\{3\}$이 되어 각각의 원소의 개수를 더한 값에서 합집합의 원소의 개수를 뺀 것과 일치함을 알 수 있다. 즉 다음과 같은 공식을 얻는다.

$$n(A \cap B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$$

집합의 연산

서로소

만약에 두 집합이 공통원소를 갖고 있지 않으면 두 집합의 교집합은 공집합이 된다. 이를테면 두 유한집합 X, Y에 대하여 $X \cap Y = \varnothing$이면

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$$

가 성립한다. 이와 같이 두 집합이 공통원소를 갖지 않을 때, 즉 두 집합의 교집합이 공집합이 될 때 '두 집합은 **서로소**이다'라고 말한다.

집합의 연산

여집합

정의. 전체집합 U와 그 부분집합 A에 대하여, A의 **여집합**은 A에 속하지 않는 원소를 모두 모은 집합으로 정의하며 A^c로 나타낸다. 즉, $A^c = U \setminus A$이다.

원소 x가 $A \cap B^c$에 속한다고 가정하고 이를 전개해보면

$$x \in A \cap B^c \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B^c) \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \setminus B$$

가 된다. 따라서 $A \setminus B = A \cap B^c$임을 알 수 있다.

집합의 연산의 성질

정리 2. 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \cup A = A$ (멱등법칙)

(2) $A \cap A = A$ (멱등법칙)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (교환법칙)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (교환법칙)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (결합법칙)

(6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (결합법칙)

(7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (분배법칙)

(8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (분배법칙)

집합의 연산의 성질

정리 3. 집합 A, B와 전체집합 U에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \cup \varnothing = A$

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $A \cap A^c = \varnothing$

(4) $(A^c)^c = A$

(5) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

여기서 (5)와 (6)을 **드 모르간의 법칙**이라고 부른다.

연습문제

문제 1. 다음 집합의 포함관계, 즉 어느 것이 어느 것의 부분집합인지 판별하시오.

(1) $A = \{x \mid x^2 - 8x + 17 = 0\}$

(2) $B = \{2,\ 4,\ 6\}$

(3) $C = \{2k \mid k\text{는 자연수}\}$

(4) $D = \{6\}$

연습문제

문제 2. 두 집합 A와 B가 동치일 필요충분조건은 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$임을 보이시오.

문제 3. A가 집합일 때, $A \subseteq \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$임을 보이시오.

문제 4. A, B, C가 집합일 때,

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

가 성립함을 증명하시오.

문제 5. 집합 $\{x, \{y, z\}\}$의 모든 부분집합을 구하시오. (단, $x \neq y \neq z \neq x$)

연습문제

문제 6. A, B, C가 집합일 때, 다음을 증명하시오.

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

(2) $[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

(3) $[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$

(4) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

(5) $A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow (B \setminus A) \cup B = A$

연습문제

문제 7. 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오. 그것이 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 드시오.

(1) [$x \in A$이고 $A \in B$]이면 $x \in B$이다.

(2) [$A \subseteq B$이고 $B \in C$]이면 $A \in C$이다.

(3) [$A \not\subseteq B$이고 $B \subseteq C$]이면 $A \not\subseteq C$이다.

(4) [$A \not\subseteq B$이고 $B \not\subseteq C$]이면 $A \not\subseteq C$이다.

(5) [$x \in A$이고 $A \not\subseteq B$]이면 $x \notin B$이다.

(6) [$A \subseteq B$이고 $x \notin B$]이면 $x \notin A$이다.

공부한 내용

- ✓ 집합의 연산
- ✓ 집합의 연산의 성질
- ✓ 연습문제