

수학의 언어  
**수학의 논리**

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, [designeralice@daum.net](mailto:designeralice@daum.net), <https://iseulbee.com>

이 자료의 저작권은 만든이에게 있습니다. 상업성/공익성 상관없이, 이 자료를 만든이가 직접 운영하는 커뮤니티 외의 곳에서 배포하는 것을 금지하며, 개인 학습이 아닌 다른 용도로 사용하는 것을 금지합니다.

## 공부할 내용

---

- ✓ 명제의 뜻
- ✓ 함의와 동치
- ✓ 정리와 증명
- ✓ 한정명제
- ✓ 한정명제의 부정
- ✓ 한정명제의 순서

# 명제의 뜻

---

## 명제의 뜻

명제는 참이나 거짓이 분명히 판단되는 문장을 말한다.

- “3은 홀수이다.”
- “독도는 한국 땅이다.”
- “자연수의 개수는 유한이다.”
- “고구마 케이크는 맛있다.”
- “너는 좋으냐, 낙엽 밟는 소리가.”

수를 나타낼 때 문자를 사용하듯이, 명제를 나타낼 때  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\dots$  와 같은 문자를 사용한다.

# 명제의 뜻

---

## 단순명제와 합성명제

단순명제: 하나의 진술만을 포함하고 있는 명제

합성명제: 둘 이상의 단순명제가 결합된 것

- “나는 여자이고 내 동생은 남자이다.”

## 명제의 뜻

### 명제의 결합자

기호	이름	표기	의미
$\sim$	부정	$\sim p$	$p$ 가 아니다.
$\wedge$	논리곱	$p \wedge q$	$p$ 이고 $q$ 이다.
$\vee$	논리합	$p \vee q$	$p$ 이거나 또는 $q$ 이다.
$\rightarrow$	조건	$p \rightarrow q$	$p$ 이면 $q$ 이다.
$\leftrightarrow$	쌍조건	$p \leftrightarrow q$	$p$ 이면 $q$ 이고, $q$ 이면 $p$ 이다.

괄호가 없을 때 연결사의 우선순위는 ‘ $\sim$ ’, ‘ $\wedge$ ,  $\vee$ ’, ‘ $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ’라고 약속한다.

## 명제의 뜻

---

### 명제의 부정

$p$	$\sim p$
T	F
F	T

- $p$ 를 명제 ‘나는 여자이다’라고 할 때, 그 부정  $\sim p$ 는 ‘나는 여자가 아니다’이다.

# 명제의 뜻

---

## 논리곱과 논리합

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

## 명제의 뜻

---

### 논리적 동치

단순명제 또는 합성명제  $p$ 와  $q$ 가 모든 논리적 가능성의 각각의 경우 진릿값이 같으면

“ $p$ 와  $q$ 는 논리적 동치이다.” 또는 간단하게 “ $p$ 와  $q$ 는 동치이다.”

라고 말하고, 이것을  $p \equiv q$ 와 같이 나타낸다.

즉 두 명제가 논리적으로 동치라는 것은 두 명제의 진리표가 같다는 뜻이다.



## 명제의 뜻

문제 1. 두 명제  $p, q$ 에 대하여  $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ 임을 보이시오.

풀이 명제  $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ 의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
단계		1	1	2	3

따라서 명제  $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$ 의 진릿값은 앞서 살펴본  $p \vee q$ 의 진릿값과 같다. □

## 명제의 뜻

문제 1. 두 명제  $p, q$ 에 대하여  $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ 임을 보이시오.

풀이 명제  $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ 의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F
단계		1	1	2	3

따라서 명제  $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$ 의 진릿값은 앞서 살펴본  $p \vee q$ 의 진릿값과 같다. □

## 명제의 뜻

---

### 조건

합성명제  $p \rightarrow q$ 는  $\sim p \vee q$ 와 동치인 것으로 정의되며, 진리표로 나타내면 다음과 같다.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

조건부의 진리표를 살펴보면,  $p$ 가 참이고  $q$ 가 거짓인 경우를 제외하면  $p \rightarrow q$ 는 참이다.

## 명제의 뜻

---

합성명제  $p \rightarrow q$ 의 진릿값이  $\sim p \vee q$ 로 정의된 이유를 살펴보자. 참인 합성명제

「실수  $x$ 에 대하여  $x > 3$ 이면  $x > 1$ 이다」

에 대하여  $p$ 를 ' $x > 3$ 이다',  $q$ 를 ' $x > 1$ 이다'라고 정의하면 위 명제는

$$p \rightarrow q$$

라고 나타낼 수 있다. 이때 다음과 같은 세 가지 경우가 존재한다.

- (i)  $x \leq 1$ 이면  $p$ 와  $q$ 가 모두 거짓,
- (ii)  $1 < x \leq 3$ 이면  $p$ 는 거짓이지만  $q$ 는 참,
- (iii)  $x > 3$ 이면  $p$ 와  $q$ 가 모두 참

즉, 참인 명제  $p \rightarrow q$ 에 대하여  $(p, q)$ 의 진릿값이 (T, T), (F, T), (F, F)로서 세 가지가 존재한다.

$p$ 가 거짓이면  $q$ 의 참, 거짓에 상관없이  $p \rightarrow q$ 는 참이 되고,  $q$ 가 참이면 마찬가지로  $p$ 의 참, 거짓에 상관없이  $p \rightarrow q$ 는 참이 된다. 따라서  $p \rightarrow q$ 를  $\sim p \vee q$ 로 정의한다.

## 명제의 뜻

---

### 형식적 언어

일상적인 언어에서는 ‘토끼가 식물이면 감자는 동물이다’와 같은 말은 토끼가 식물이 아니고 감자는 동물이 아니기 때문에 무의미한 문장이 된다.

하지만 이 문장을 명제로서 살펴보면 참인 명제가 된다. 이처럼 일상 언어에서는 의미 없이 결합된 문장이라도 논리적으로 보면 참, 거짓을 정할 수 있는 명제가 될 수 있는데 이러한 문장을 **형식적 언어**라고 한다.

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(1)  $(p \wedge q) \wedge r$

(2)  $p \wedge (q \wedge r)$

(3)  $(p \vee \sim q) \wedge r$

(4)  $\sim (p \wedge q) \vee r$

(5)  $p \leftrightarrow q$

(6)  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(1)  $(p \wedge q) \wedge r$

$p$	$q$	$r$	

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(2)  $p \wedge (q \wedge r)$

$p$	$q$	$r$	



## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(3)  $(p \vee \sim q) \wedge r$

$p$	$q$	$r$	

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

$$(4) \sim (p \wedge q) \vee r$$

$p$	$q$	$r$	

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(5)  $p \leftrightarrow q$

$p$	$q$	

## 명제의 뜻

---

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(6)  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$p$	$q$	

## 명제의 뜻

---

문제 2. 명제  $p$ 가 '나는 둘리이다',  $q$ 가 '나는 공룡이다'일 때, 다음 합성명제를 자연스러운 문장으로 표현하시오.

(1)  $p \vee q$

(2)  $p \wedge q$

(3)  $p \rightarrow q$

## 명제의 뜻

---

문제 2. 명제  $p$ 가 '나는 둘리이다',  $q$ 가 '나는 공룡이다'일 때, 다음 합성명제를 자연스러운 문장으로 표현하시오.

(4)  $\sim p \rightarrow \sim q$

(5)  $\sim q \rightarrow \sim p$

(6)  $\sim p \wedge q$

## 명제의 뜻

---

문제 3. 명제  $p$ 가 '나는 동물이다',  $q$ 가 '나는 재미있기이다'일 때, 문장으로 된 다음 명제를 기호로 나타내시오.

- (1) 나는 동물이지만 재미있기는 아니다.
- (2) 나는 재미있기이므로 동물이다.
- (3) 내가 재미있기하려면 나는 동물이어야 한다.
- (4) 동물은 재미있기가 아니다.

## 함의와 동치

---

### 항진명제와 모순명제

**항진명제:** 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 참인 명제 (주로 't'로 나타낸다.)

**모순명제:** 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 거짓인 명제 (주로 'c'로 나타낸다.)

### 함의

두 명제  $p$ ,  $q$ 에 대하여, 조건문  $p \rightarrow q$ 가 항진일 때 이 조건문을 **함의**라 부르고  $p \Rightarrow q$ 와 같이 나타내며 'p는 q를 함의한다'라고 읽는다.

이때  $p$ 를  $q$ 이기 위한 **충분조건**이라고 부르며  $q$ 를  $p$ 이기 위한 **필요조건**이라고 부른다.



## 함의와 동치

---

### 동치와 필요충분조건

쌍조건문  $p \leftrightarrow q$ 가 항진일 때 이것을  $p \Leftrightarrow q$ 로 나타내고, ' $p$ 와  $q$ 는 동치이다'라고 읽는다.

이때  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이며  $q$ 는  $p$ 이기 위한 필요충분조건이다.

쌍조건문  $p \Leftrightarrow q$ 는 다음과 같이 읽는다.

“ $p$ 와  $q$ 는 서로 필요충분조건이다.”

“ $p$ 이면  $q$ 이고,  $q$ 이면  $p$ 이다.”

“ $p$ 이면 그리고 그 때에만  $q$ 이다.”

## 함의와 동치

예제 2. 합성명제  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$ 의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$r$	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)]$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					
단계			1	2	1	3	1

이 진리표를 통해  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$ 는 항상 참임을 알 수 있다.

따라서  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ 은  $(p \rightarrow r)$ 을 함의한다. □

## 함의와 동치

예제 2. 합성명제  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$ 의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$r$	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)]$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T
단계			1	2	1	3	1

이 진리표를 통해  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$ 는 항상 참임을 알 수 있다.

따라서  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ 은  $(p \rightarrow r)$ 을 함의한다. □

## 함의와 동치

예제 3. 논리합, 논리곱, 쌍조건의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	T						
F	T						
F	F						
F	F						

이 진리표를 통해  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ ,  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ,  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ 임을 알 수 있다.  
즉 논리합, 논리곱, 쌍조건의 교환법칙이 성립한다. □

## 함의와 동치

예제 3. 논리합, 논리곱, 쌍조건의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	T	T

이 진리표를 통해  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ ,  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ,  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ 임을 알 수 있다.  
즉 논리합, 논리곱, 쌍조건의 교환법칙이 성립한다. □

## 함의와 동치

예제 4. 논리합과 논리곱에 대한 다음의 진리표를 살펴보자.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

이 진리표를 통해 논리합과 논리곱의 분배법칙이 성립함을 알 수 있다. □

## 함의와 동치

예제 4. 논리합과 논리곱에 대한 다음의 진리표를 살펴보자.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

이 진리표를 통해 논리합과 논리곱의 분배법칙이 성립함을 알 수 있다. □

# 정리와 증명

---

## 정리와 증명

정리: 참인 명제

증명: 참인 명제인 정리의 정당성을 밝히는 일



## 정리와 증명

정리 1. 임의의 명제  $p, q$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1)  $p \Rightarrow p \vee q$

(합의 법칙)

(2)  $p \wedge q \Rightarrow p, p \wedge q \Rightarrow q$

(단순화 법칙)

(3)  $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

(논리합삼단법)

증명. 조건문  $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$ 의 진리표를 작성해 보면 다음과 같다.

$p$	$q$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	$q$
T	T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F
단계		1	2	1	3	2	4	1

따라서  $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ 이다. □

## 정리와 증명

정리 1. 임의의 명제  $p, q$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1)  $p \Rightarrow p \vee q$

(합의 법칙)

(2)  $p \wedge q \Rightarrow p, p \wedge q \Rightarrow q$

(단순화 법칙)

(3)  $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

(논리합삼단법)

명제  $p$ 를 ‘나는 고구마이다’,  $q$ 를 ‘나는 한국인이다’라고 하면,

(1) “나는 고구마이다, 따라서 나는 고구마이거나 한국인이다.”

(2) “나는 고구마이고 한국인이므로 나는 고구마이다.”

## 정리와 증명

---

정리 2. 임의의 두 명제  $p, q$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- |  |         |
|--|---------|
| (1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$   | (이중부정법) |
| (2) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ | (교환법칙)  |
| (3) $p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p$                 | (역등법칙)  |
| (4) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$            | (대우법칙)  |

## 정리와 증명

### 드 모르간의 법칙

정리 3. 임의의 두 명제  $p, q$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$(2) \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

“나는 감자를 좋아하거나 고구마를 좋아하거나 토마토를 좋아한다.”를 부정하면

“나는 감자를 싫어하고 고구마도 싫어하며 토마토도 싫어한다.”가 된다.

“나는 토마토이고 한국인이다.”를 부정하면 “나는 토마토가 아니거나 한국인이 아니다.”가 된다.

문제 4. 수학적 귀납법을 이용하여 드 모르간의 법칙을  $n$ 개의 명제로 확장하시오.

## 정리와 증명

---

### 드 모르간의 법칙

문제 4. 수학적 귀납법을 이용하여 드 모르간의 법칙을  $n$ 개의 명제로 확장하시오.

## 정리와 증명

정리 4. 임의의 세 명제  $p, q, r$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad (\text{결합법칙})$$

$$(2) (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \quad (\text{결합법칙})$$

$$(3) p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (\text{분배법칙})$$

$$(4) p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{분배법칙})$$

$$(5) (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r) \quad (\text{추이법칙})$$

## 정리와 증명

---

결합법칙에 의하여

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r), \quad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

에 있는 괄호는 불필요하게 된다. 그리하여 두 명제

$$p \wedge q \wedge r, \quad p \vee q \vee r$$

는 각각 일정한 뜻을 지닌다.

마찬가지로  $n$ 개의 명제  $p_i$ 를 결합하여 만든 두 명제

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n, \quad p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$$

도 같은 방법으로 생각한다.

## 정리와 증명

---

### 연역적 추론

예제 5. 대우법칙  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ 를 다른 추론규칙과 정의를 사용하여 증명하시오.

풀이  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$  □

위와 같이 진리표를 사용하지 않고 정의, 전제로 세운 공리, 이미 증명한 정리, 추론규칙 등을 활용하여 증명하는 것을 **연역적 추론**이라고 부른다.



## 정리와 증명

---

### 역, 이, 대우

조건명제  $p \rightarrow q$ 에서  $p$ 를 **가정**이라고 부르고  $q$ 를 **결론**이라고 부른다.

- $q \rightarrow p$ 를  $p \rightarrow q$ 의 **역**이라고 부른다.
- $\sim p \rightarrow \sim q$ 를  $p \rightarrow q$ 의 **이**라고 부른다.
- $\sim q \rightarrow \sim p$ 를  $p \rightarrow q$ 의 **대우**라고 부른다.

※ 임의의 조건명제와 그 대우는 서로 동치이다.

## 정리와 증명

---

### 간접증명법

명제  $p \rightarrow q$ 가 참임을 증명하는 대신, ‘ $p$ 는 참이고  $q$ 는 거짓이라고 하면 모순이다’를 증명하기도 한다. 왜냐하면

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow q) \rightarrow c \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow c$$

이기 때문이다.

비슷하게 명제  $p$ 가 참임을 증명하는 대신, ‘ $p$ 가 거짓이면 모순이다’는 것을 보이기도 한다. 왜냐하면

$$p \Leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow \sim p \rightarrow c$$

이기 때문이다. 이처럼 다음과 같은 추론 방법을 **간접증명법** 또는 **배리법**이라고 부른다.

- (i) 명제  $p \rightarrow q$ 가 참임을 보이기 위해  $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참임을 보인다.
- (ii) 명제  $p$ 가 참임을 보이기 위해  $\sim p \rightarrow c$ 가 참임을 보인다.

## 정리와 증명

---

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하십시오.

$$(1) (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$$

$$(2) (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$(3) \sim (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$$

$$(4) \sim (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$$

## 정리와 증명

---

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하십시오.

$$(1) (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$$

$p$	$q$	$r$	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

## 정리와 증명

---

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하십시오.

$$(2) (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$p$	$q$	

## 정리와 증명

---

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하십시오.

$$(3) \sim (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$$

$p$	$q$	$r$	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

## 정리와 증명

---

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하십시오.

$$(4) \sim (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$$

$p$	$q$	$r$	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

## 정리와 증명

---

문제 6. 다음 명제의 부정을 구하시오.

- (1) 토끼는 하얗지도 않고 귀엽지도 않다.
- (2) 비가 오면 우산이 잘 팔린다.
- (3) 애인이 생기면 학업 성적이 좋아진다.
- (4) 부업을 하면 돈은 벌지만 여유는 줄어든다.



## 정리와 증명

---

문제 7. 다음 명제를 연역적으로 증명하시오.

$$(1) (p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

## 정리와 증명

---

문제 7. 다음 명제를 연역적으로 증명하시오.

$$(2) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$$

## 정리와 증명

---

문제 7. 다음 명제를 연역적으로 증명하시오.

$$(3) (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim q)$$

## 정리와 증명

---

문제 8. 다음 분배법칙을 증명하시오.

$$(1) p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$$

## 정리와 증명

---

문제 8. 다음 분배법칙을 증명하시오.

$$(2) p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_n)$$

# 한정명제

---

## 명제함수

명제는 그 자체로서 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있지만, 대상이 주어져야 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있다. 예컨대

「 $x$ 는 동물이다.」

라는 명제는  $x$ 가 무엇인지에 따라 참, 거짓이 달라진다.  $x$ 가 국화라면 위 명제는 거짓이 되고,  $x$ 가 고양이라면 위 명제는 참이다. 이처럼 명제 안에 미지개념이 포함되어 있을 때 이것을 **명제함수**라고 한다.

위 명제는 다음과 같이 기호로 나타낼 수 있다.

$$p(x) \equiv \text{「}x\text{는 동물이다.」}$$

$$p(x) \Leftrightarrow \text{「}x\text{는 동물이다.」}$$

# 한정명제

---

## 전칭명제

추론할 때에는 염두에 둔 성질을 지닌 모임, 즉 대상영역 또는 모집단을 고려하게 된다. 예를 들어

「모든 토끼는 동물이다.」

의 대상 영역은 토끼의 집합이다.

대상영역  $U$ 를 ‘모든 토끼의 집합’이라고 정의하고 대상 영역의 한 구성원을  $x$ 라고 표시함으로써 앞의 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「대상영역의 모든  $x$ 에 대하여  $x$ 는 동물이다.」

$$\forall x \in U : p(x)$$

여기서  $\forall$  을 ‘전칭기호’라고 부른다.

# 한정명제

---

## 존재명제

다음과 같은 명제를 생각하자.

「어떤 토끼는 검은색이다.」

명제함수  $q(x)$ 를 「 $x$ 는 검은색이다.」라고 정의하면 위 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「검은색인 토끼가 적어도 한 마리 존재한다.」

「적어도 한 마리의  $x$ 가 존재하여  $x$ 는 검은색이다.」

「적어도 하나의  $x$ 가 존재하여  $q(x)$ .」

$$\exists x \in U : q(x)$$

여기서  $\exists$ 를 ‘존재기호’라고 부른다.

전칭기호와 존재기호를 통틀어 ‘한정기호’라고 부른다.



## 한정명제

---

중등학교의 수학에서는 흔히 한정기호를 생략한다. 예를 들어 항등식

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

은 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하는 것으로 이해된다. 이와 같은 식은 사실

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

이라고 써야 정확하다.

## 한정명제의 부정

---

### 한정명제의 부정 규칙

논리와 수학에 있어서 한정기호의 부정 규칙은 다음과 같다.

$$\sim [\forall x \in U, p(x)] \Leftrightarrow [\exists x \in U, \sim p(x)]$$

$$\sim [\exists x \in U, p(x)] \Leftrightarrow [\forall x \in U, \sim p(x)]$$

## 한정명제의 부정

---

대상영역이 유한집합  $U = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 일 때, 한정명제의 부정규칙이 성립함을 살펴보자.

$$\forall x \in U : p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \dots \wedge p(a_n),$$

$$\exists x \in U : p(x) \text{는} \equiv p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \vee \dots \vee p(a_n).$$

따라서

$$\begin{aligned}(\forall x \in U : p(x) \text{의 부정}) &\equiv \sim p(a_1) \vee \sim p(a_2) \vee \sim p(a_3) \vee \dots \vee \sim p(a_n) \\ &\equiv \exists x \in U : \sim p(x).\end{aligned}$$

마찬가지로

$$(\exists x \in U : p(x) \text{의 부정}) \equiv \forall x \in U : \sim p(x).$$

## 한정명제의 부정

---

예제 6. 다음 명제의 부정을 구하시오.

- (1) 모든 사람은 머리가 있다.
- (2) 우리 반 학생은 모두 엑스맨이다.
- (3) 머리카락이 하얀 사람도 있다.

## 한정명제의 부정

---

예제 6. 다음 명제의 부정을 구하시오.

- (4) 해산물을 먹지 못하는 사람이 있다.
- (5) 휴대전화를 소유하지 않은 사람은 없다.
- (6) 누구나 자전거를 탈 수 있다.

## 한정명제의 순서

---

한정기호는 일반적으로 그것을 표시하는 순서에 따라서 의미가 달라진다.

예컨대 대상 영역  $U$ 가 모든 자연수의 집합일 때

$$\begin{aligned} &\forall x \in U : [\exists y \in U : (y \text{는 } x \text{의 배수이다})], \\ &\exists y \in U : [\forall x \in U : (y \text{는 } x \text{의 배수이다})] \end{aligned}$$

를 각각 풀어서 표현하면 다음과 같다.

「모든 자연수  $x$ 에 대하여  $x$ 의 배수인 자연수  $y$ 가 존재한다」,  
「어떤 자연수  $y$ 가 모든 자연수  $x$ 의 배수이다」.

배수가 없는 자연수는 없으므로 첫 번째 문장은 참이다.

그러나 한 자연수가 모든 자연수의 배수일 수는 없으므로 두 번째 문장은 거짓이다.

## 한정명제의 순서

---

예제 7. 대상 영역이 실수 전체일 때, 다음 두 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1)  $\forall x \exists y : y > x$

(2)  $\exists y \forall x : y > x$

## 한정명제의 순서

---

같은 종류의 한정기호가 거듭하여 사용된 경우에는 그 순서가 바뀌어도 의미가 변하지 않는 경우가 많다. 이를테면 대상 영역이 실수 전체의 집합일 때 다음과 같은 두 존재명제

$$\exists x \exists y : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0,$$

$$\exists y \exists x : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

는 모두 참이다. 왜냐면  $x = 1$ ,  $y = 2$ 를 대입하면 등식이 성립하기 때문이다. 또한 다음과 같은 두 전칭명제

$$\forall x \forall y : x^2 + (y+2)^2 \geq 0,$$

$$\forall y \forall x : x^2 + (y+2)^2 \geq 0$$

도 모두 참이다. 임의의 실수를 제공하면 0 이상인 실수가 되며, 0 이상인 두 실수를 더하면 0 이상인 실수가 되기 때문이다.



## 한정명제의 순서

---

### ‘유일하다’의 정의

대상 영역의 원소  $x$  중에서 명제함수  $p(x)$ 를 만족시키는  $x$ 가 단 하나만 존재할 때, ‘ $p(x)$ 인  $x$ 는 유일하다’라고 표현한다. 이것을 논리적으로 정의하면 다음과 같다.

**정의.** 대상 영역이  $U$ 일 때 명제함수  $p(x)$ 가 두 조건

(i)  $\exists x \in U : p(x),$

(ii)  $p(x_1) \wedge p(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

를 모두 만족시키면 ‘ $U$ 에서  $p(x)$ 를 만족시키는  $x$ 는 유일하다’라고 말한다.

이것을 기호로  $\exists ! x : p(x)$ 로 나타낸다.

## 한정명제의 순서

---

예제 8. 대상 영역이 자연수 전체일 때, 다음 한정명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 명제함수  $p(x) \equiv (x^2 < 3)$ 이 참이 되게 하는  $x$ 는 유일하다.

(2)  $\exists ! x : \lceil x^2 + 2x + 1 = 0 \rceil$

## 한정명제의 순서

---

예제 8. 대상 영역이 자연수 전체일 때, 다음 한정명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(3)  $\forall x \exists! y : (y = 2^x)$

(4)  $\forall x \exists! y : (x \text{는 } y \text{로 나누어 떨어진다})$

## 한정명제의 순서

---

문제 9. 모든 실수가 대상 영역인 명제

「방정식  $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에 해가 존재한다」

를 한정기호를 사용하여 표현하시오.

## 한정명제의 순서

---

문제 10. 다음 명제의 부정을 구하시오. (참, 거짓을 판별하라는 문제가 아님.)

- (1) 모든 뱀은 파충류이다.
- (2) 말 중에는 온순한 것도 있다.
- (3) 수학자 중에는 사교적인 사람이 있다.
- (4) 모든 강아지는 매력이 있거나 똑똑하다.
- (5) 귀엽지 않은 아기는 없다.

## 한정명제의 순서

---

문제 10. 다음 명제의 부정을 구하십시오. (참, 거짓을 판별하라는 문제가 아님.)

- (1) 모든 뱀은 파충류이다.
- (2) 말 중에는 온순한 것도 있다.
- (3) 수학자 중에는 사교적인 사람이 있다.
- (4) 모든 강아지는 매력이 있거나 똑똑하다.
- (5) 귀엽지 않은 아기는 없다.

문제 11. 위 문제 10의 각 명제에서 생각할 수 있는 대상영역을 말하십시오.

## 한정명제의 순서

---

※ 다음 각 논증을 연역적 방법으로 증명하십시오. (12~13)

**문제 12.** 미정이나 소라가 반장에 당선되면 영민이와 보람이가 손을 흔들 것이다. 보람이가 손을 흔들지 않는다. 따라서 소라가 반장에 당선되지 않았다.

## 한정명제의 순서

---

※ 다음 각 논증을 연역적 방법으로 증명하시오. (12~13)

**문제 13.** 내가 이 과목을 신청하여 열심히 공부한다면 좋은 학점을 받을 것이다. 내가 좋은 학점을 받으면 행복할 것이다. 나는 행복하지 않다. 그러므로 나는 이 과목을 신청하지 않았거나 열심히 공부하지 않았다.



## 공부한 내용

---

- ✓ 명제의 뜻
- ✓ 함의와 동치
- ✓ 정리와 증명
- ✓ 한정명제
- ✓ 한정명제의 부정
- ✓ 한정명제의 순서