수학의 언어

수학의 논리

2020학년도 영재수업

만든이: 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com

HWP: [Ctrl]+[K], [P]
Adobe Reader: [Ctrl]+[L]

공부할 내용

- ✓ 명제의 뜻
- ✓ 함의와 동치
- ✓ 정리와 증명
- ✓ 한정명제
- ✓ 한정명제의 부정
- ✓ 한정명제의 순서

명제의 뜻

명제의 뜻

명제는 참이나 거짓이 분명히 판단되는 문장을 말한다.

- "3은 홀수이다."
- "독도는 한국 땅이다."
- "자연수의 개수는 유한이다."
- "고구마 케이크는 맛있다."
- "너는 좋으냐, 낙엽 밟는 소리가."

수를 나타낼 때 문자를 사용하듯이, 명제를 나타낼 때 p, q, r, $\cdots$ 와 같은 문자를 사용한다.

명제의 뜻

단순명제와 합성명제

단순명제: 하나의 진술만을 포함하고 있는 명제

합성명제: 둘 이상의 단순명제가 결합된 것

- "나는 여자이고 내 동생은 남자이다."

명제의 뜻

명제의 결합자

기호	이름	표기	의미
$\sim$	부정	$\sim p$	p가 아니다.
$\wedge$	논리곱	$p \wedge q$	p이고 q이다.
$\vee$	논리합	$p \vee q$	p이거나 또는 q이다.
$\rightarrow$	조건	$p \rightarrow q$	p이면 q이다.
$\leftrightarrow$	쌍조건	$p \leftrightarrow q$	p이면 q이고, q이면 p이다.

괄호가 없을 때 연결사의 우선순위는 '$\sim$', '$\wedge$, $\vee$', '$\rightarrow$, $\leftrightarrow$'라고 약속한다.

명제의 뜻

명제의 부정

p	$\sim p$
T	F
F	T

- p를 명제 ‘나는 여자이다’라고 할 때, 그 부정 $\sim p$는 ‘나는 여자가 아니다’이다.

명제의 뜻

논리곱과 논리합

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

명제의 뜻

논리적 동치

단순명제 또는 합성명제 p와 q가 모든 논리적 가능성의 각각의 경우 진릿값이 같으면

"p와 q는 **논리적 동치**이다." 또는 간단하게 "p와 q는 **동치**이다."

라고 말하고, 이것을 $p \equiv q$와 같이 나타낸다.

즉 두 명제가 논리적으로 동치라는 것은 두 명제의 진리표가 같다는 뜻이다.

명제의 뜻

문제 1. 두 명제 p, q에 대하여 $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$임을 보이시오.

풀이 명제 $\sim(\sim p \wedge \sim q)$의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F
단계		1	1	2	3

따라서 명제 $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$의 진릿값은 앞서 살펴본 $p \vee q$의 진릿값과 같다. □

명제의 뜻

조건

합성명제 $p \to q$는 $\sim p \vee q$와 동치인 것으로 정의되며, 진리표로 나타내면 다음과 같다.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

조건부의 진리표를 살펴보면, p가 참이고 q가 거짓인 경우를 제외하면 $p \to q$는 참이다.

명제의 뜻

합성명제 $p \to q$의 진릿값이 $\sim p \vee q$로 정의된 이유를 살펴보자. 참인 합성명제

「실수 x에 대하여 $x > 3$이면 $x > 1$이다」

에 대하여 p를 '$x > 3$이다', q를 '$x > 1$이다'라고 정의하면 위 명제는

$$p \to q$$

라고 나타낼 수 있다. 이때 다음과 같은 세 가지 경우가 존재한다.

(ⅰ) $x \leq 1$이면 p와 q가 모두 거짓,
(ⅱ) $1 < x \leq 3$이면 p는 거짓이지만 q는 참,
(ⅲ) $x > 3$이면 p와 q가 모두 참

즉, 참인 명제 $p \to q$에 대하여 $(p,\ q)$의 진릿값이 $(\mathrm{T},\ \mathrm{T})$, $(\mathrm{F},\ \mathrm{T})$, $(\mathrm{F},\ \mathrm{F})$로서 세 가지가 존재한다.

p가 거짓이면 q의 참, 거짓에 상관없이 $p \to q$는 참이 되고, q가 참이면 마찬가지로 p의 참, 거짓에 상관없이 $p \to q$는 참이 된다. 따라서 $p \to q$를 $\sim p \vee q$로 정의한다.

명제의 뜻

형식적 언어

일상적인 언어에서는 ‘토끼가 식물이면 감자는 동물이다’와 같은 말은 토끼가 식물이 아니고 감자는 동물이 아니기 때문에 무의미한 문장이 된다.

하지만 이 문장을 명제로서 살펴보면 참인 명제가 된다. 이처럼 일상 언어에서는 의미 없이 결합된 문장이라도 논리적으로 보면 참, 거짓을 정할 수 있는 명제가 될 수 있는데 이러한 문장을 **형식적 언어**라고 한다.

명제의 뜻

문제 1. 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(1) $(p \wedge q) \wedge r$

(2) $p \wedge (q \wedge r)$

(3) $(p \vee \sim q) \wedge r$

(4) $\sim (p \wedge q) \vee r$

(5) $p \leftrightarrow q$

(6) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

명제의 뜻

문제 2. 명제 p가 ‘나는 둘리이다’, q가 ‘나는 공룡이다’일 때, 다음 합성명제를 자연스러운 문장으로 표현하시오.

(1) $p \vee q$

(2) $p \wedge q$

(3) $p \rightarrow q$

(4) $\sim p \rightarrow \sim q$

(5) $\sim q \rightarrow \sim p$

(6) $\sim p \wedge q$

명제의 뜻

문제 3. 명제 p가 '나는 동물이다', q가 '나는 개미핥기이다'일 때, 문장으로 된 다음 명제를 기호로 나타내시오.

(1) 나는 동물이지만 개미핥기는 아니다.

(2) 나는 개미핥기이므로 동물이다.

(3) 내가 개미핥기이려면 나는 동물이어야 한다.

(4) 동물은 개미핥기가 아니다.

함의와 동치

항진명제와 모순명제

항진명제: 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 참인 명제 (주로 't'로 나타낸다.)
모순명제: 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 거짓인 명제 (주로 'c'로 나타낸다.)

함의

두 명제 p, q에 대하여, 조건문 $p \to q$가 항진일 때 이 조건문을 **함의**라 부르고 $p \Rightarrow q$와 같이 나타내며 'p는 q를 함의한다'라고 읽는다.

이때 p를 q이기 위한 **충분조건**이라고 부르며 q를 p이기 위한 **필요조건**이라고 부른다.

함의와 동치

동치와 필요충분조건

쌍조건문 $p \leftrightarrow q$가 항진일 때 이것을 $p \Leftrightarrow q$로 나타내고, ‘p와 q는 **동치**이다’라고 읽는다.

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이며 q는 p이기 위한 필요충분조건이다.

쌍조건문 $p \Leftrightarrow q$는 다음과 같이 읽는다.

“p와 q는 서로 필요충분조건이다.”
“p이면 q이고, q이면 p이다.”
“p이면 그리고 그 때에만 q이다.”

함의와 동치

예제 2. 합성명제 $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to [p \to r]$의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to r)]$	$\to$	$(p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T
단계			1	2	1	3	1

이 진리표를 통해 $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to [p \to r]$는 항상 참임을 알 수 있다.
따라서 $(p \to q) \wedge (q \to r)$은 $(p \to r)$을 함의한다. □

함의와 동치

예제 3. 논리합, 논리곱, 쌍조건의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	T	T

이 진리표를 통해 $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$임을 알 수 있다.
즉 논리합, 논리곱, 쌍조건의 교환법칙이 성립한다. □

함의와 동치

예제 4. 논리합과 논리곱에 대한 다음의 진리표를 살펴보자.

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

이 진리표를 통해 논리합과 논리곱의 분배법칙이 성립함을 알 수 있다. □

정리와 증명

정리와 증명

정리: 참인 명제

증명: 참인 명제인 정리의 정당성을 밝히는 일

정리와 증명

정리 1. 임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $p \Rightarrow p \vee q$ (합의 법칙)

(2) $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$ (단순화 법칙)

(3) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (논리합삼단법)

증명. 조건문 $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$의 진리표를 작성해 보면 다음과 같다.

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
T	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F
단계		1	2	1	3	2	4	1

따라서 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$이다. □

정리와 증명

정리 1. 임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $p \Rightarrow p \vee q$ (합의 법칙)

(2) $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$ (단순화 법칙)

(3) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (논리합삼단법)

명제 p를 '나는 고구마이다', q를 '나는 한국인이다'라고 하면,

(1) "나는 고구마이다, 따라서 나는 고구마이거나 한국인이다."

(2) "나는 고구마이고 한국인이므로 나는 고구마이다."

정리와 증명

정리 2. 임의의 두 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ (이중부정법)

(2) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (교환법칙)

(3) $p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$ (멱등법칙)

(4) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (대우법칙)

정리와 증명

드 모르간의 법칙

정리 3. 임의의 두 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \; \sim p \vee \sim q$

(2) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \; \sim p \wedge \sim q$

"나는 감자를 좋아하거나 고구마를 좋아하거나 토마토를 좋아한다."를 부정하면
"나는 감자를 싫어하고 고구마도 싫어하며 토마토도 싫어한다."가 된다.

"나는 토마토이고 한국인이다."를 부정하면 "나는 토마토가 아니거나 한국인이 아니다."가 된다.

문제 4. 수학적 귀납법을 이용하여 드 모르간의 법칙을 n개의 명제로 확장하시오.

정리와 증명

정리 4. 임의의 세 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (결합법칙)

(2) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (결합법칙)

(3) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (분배법칙)

(4) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (분배법칙)

(5) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (추이법칙)

정리와 증명

결합법칙에 의하여

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r), \quad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

에 있는 괄호는 불필요하게 된다. 그리하여 두 명제

$$p \wedge q \wedge r, \quad p \vee q \vee r$$

는 각각 일정한 뜻을 지닌다.

마찬가지로 n개의 명제 p_i를 결합하여 만든 두 명제

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \ \wedge p_n, \quad p_1 \vee p_2 \vee \ \dots \ \vee p_n$$

도 같은 방법으로 생각한다.

정리와 증명

연역적 추론

예제 5. 대우법칙 $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$를 다른 추론규칙과 정의를 사용하여 증명하시오.

풀이 $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$ □

위와 같이 진리표를 사용하지 않고 정의, 전제로 세운 공리, 이미 증명한 정리, 추론규칙 등을 활용하여 증명하는 것을 **연역적 추론**이라고 부른다.

정리와 증명

역, 이, 대우

조건명제 $p \to q$에서 p를 **가정**이라고 부르고 q를 **결론**이라고 부른다.

- $q \to p$를 $p \to q$의 **역**이라고 부른다.
- $\sim p \to \sim q$를 $p \to q$의 **이**라고 부른다.
- $\sim q \to \sim p$를 $p \to q$의 **대우**라고 부른다.

※ 임의의 조건명제와 그 대우는 서로 동치이다.

정리와 증명

간접증명법

명제 $p \to q$가 참임을 증명하는 대신, 'p는 참이고 q는 거짓이라고 하면 모순이다'를 증명하기도 한다. 왜냐하면

$$(p \to q) \Leftrightarrow \ \sim (p \to q) \to c \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \to c$$

이기 때문이다.

비슷하게 명제 p가 참임을 증명하는 대신, 'p가 거짓이면 모순이다'는 것을 보이기도 한다. 왜냐하면

$$p \Leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow \ \sim p \to c$$

이기 때문이다. 이처럼 다음과 같은 추론 방법을 **간접증명법** 또는 **배리법**이라고 부른다.

(i) 명제 $p \to q$가 참임을 보이기 위해 $\sim q \to \ \sim p$가 참임을 보인다.
(ii) 명제 p가 참임을 보이기 위해 $\sim p \to c$가 참임을 보인다.

정리와 증명

문제 5. 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하시오.

(1) $(p \to q) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee r)$

(2) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(3) $\sim (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

(4) $\sim (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

정리와 증명

문제 6. 다음 명제의 부정을 구하시오.

(1) 토끼는 하얗지도 않고 귀엽지도 않다.

(2) 비가 오면 우산이 잘 팔린다.

(3) 애인이 생기면 학업 성적이 좋아진다.

(4) 부업을 하면 돈은 벌지만 여유는 줄어든다.

정리와 증명

문제 7. 다음 명제를 연역적으로 증명하시오.

(1) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

(2) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (p \to q \wedge r)$

(3) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \to q \wedge \sim q)$

정리와 증명

문제 8. 다음 분배법칙을 증명하시오.

(1) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$

(2) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_n)$

한정명제

명제함수

명제는 그 자체로서 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있지만, 대상이 주어져야 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있다. 예컨대

「x는 동물이다.」

라는 명제는 x가 무엇인지에 따라 참, 거짓이 달라진다. x가 국화라면 위 명제는 거짓이 되고, x가 고양이라면 위 명제는 참이다. 이처럼 명제 안에 미지개념이 포함되어 있을 때 이것을 **명제함수**라고 한다.

위 명제는 다음과 같이 기호로 나타낼 수 있다.

$$p(x) \equiv \text{「}x\text{는 동물이다.」}$$
$$p(x) \Leftrightarrow \text{「}x\text{는 동물이다.」}$$

한정명제

전칭명제

추론할 때에는 염두에 둔 성질을 지닌 모임, 즉 대상영역 또는 모집단을 고려하게 된다. 예를 들어

「모든 토끼는 동물이다.」

의 대상 영역은 토끼의 집합이다.

대상영역 U를 '모든 토끼의 집합'이라고 정의하고 대상 영역의 한 구성원을 x라고 표시함으로써 앞의 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「대상영역의 모든 x에 대하여 x는 동물이다.」

$$\forall\, x \in U : p(x)$$

여기서 $\forall$ 을 '**전칭기호**'라고 부른다.

한정명제

존재명제

다음과 같은 명제를 생각하자.

「어떤 토끼는 검은색이다.」

명제함수 $q(x)$를 「x는 검은색이다.」라고 정의하면 위 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「검은색인 토끼가 적어도 한 마리 존재한다.」
「적어도 한 마리의 x가 존재하여 x는 검은색이다.」
「적어도 하나의 x가 존재하여 $q(x)$.」

$$\exists\, x \in U : q(x)$$

여기서 $\exists$ 를 ‘**존재기호**’라고 부른다.

전칭기호와 존재기호를 통틀어 ‘**한정기호**’라고 부른다.

한정명제

중등학교의 수학에서는 흔히 한정기호를 생략한다. 예를 들어 항등식

$$(x+1)(x-1)=x^2-1$$

은 모든 실수 x에 대하여 성립하는 것으로 이해된다. 이와 같은 식은 사실

$$\forall\, x\in\mathbb{R}:\ (x+1)(x-1)=x^2-1$$

이라고 써야 정확하다.

한정명제의 부정

한정명제의 부정 규칙

논리와 수학에 있어서 한정기호의 부정 규칙은 다음과 같다.

$$\sim [\forall\, x \in U,\ p(x)] \Leftrightarrow [\exists\, x \in U,\ \sim p(x)]$$

$$\sim [\exists\, x \in U,\ p(x)] \Leftrightarrow [\forall\, x \in U,\ \sim p(x)]$$

한정명제의 부정

대상영역이 유한집합 $U = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$일 때, 한정명제의 부정규칙이 성립함을 살펴보자.

$$\forall x \in U : p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \cdots \wedge p(a_n),$$

$$\exists x \in U : p(x) \text{는} \equiv p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \vee \cdots \vee p(a_n).$$

따라서

$$\begin{aligned} (\forall x \in U : p(x) \text{의 부정}) &\equiv \sim p(a_1) \vee \sim p(a_2) \vee \sim p(a_3) \vee \cdots \vee \sim p(a_n) \\ &\equiv \exists x \in U : \sim p(x). \end{aligned}$$

마찬가지로

$$(\exists x \in U : p(x) \text{의 부정}) \equiv \forall x \in U : \sim p(x).$$

한정명제의 부정

예제 6. 다음 명제의 부정을 구하시오.

(1) 모든 사람은 머리가 있다.

(2) 우리 반 학생은 모두 엑스맨이다.

(3) 머리카락이 하얀 사람도 있다.

(4) 해산물을 먹지 못하는 사람이 있다.

(5) 휴대전화를 소유하지 않은 사람은 없다.

(6) 누구나 자전거를 탈 수 있다.

한정명제의 순서

한정기호는 일반적으로 그것을 표시하는 순서에 따라서 의미가 달라진다.

예컨대 대상 영역 U가 모든 자연수의 집합일 때

$$\forall\, x \in U : [\,\exists\, y \in U : (y\text{는 } x\text{의 배수이다})],$$
$$\exists\, y \in U : [\,\forall\, x \in U : (y\text{는 } x\text{의 배수이다})]$$

를 각각 풀어서 표현하면 다음과 같다.

「모든 자연수 x에 대하여 x의 배수인 자연수 y가 존재한다」,
「어떤 자연수 y가 모든 자연수 x의 배수이다」.

배수가 없는 자연수는 없으므로 첫 번째 문장은 참이다.

그러나 한 자연수가 모든 자연수의 배수일 수는 없으므로 두 번째 문장은 거짓이다.

한정명제의 순서

예제 7. 대상 영역이 실수 전체일 때, 다음 두 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $\forall\, x \;\exists\, y \;:\; y > x$

(2) $\exists\, y \;\forall\, x \;:\; y > x$

한정명제의 순서

같은 종류의 한정기호가 거듭하여 사용된 경우에는 그 순서가 바뀌어도 의미가 변하지 않는 경우가 많다. 이를테면 대상 영역이 실수 전체의 집합일 때 다음과 같은 두 존재명제

$$\exists\, x\ \exists\, y\ :\ (x-1)^2+(y-2)^2=0,$$
$$\exists\, y\ \exists\, x\ :\ (x-1)^2+(y-2)^2=0$$

는 모두 참이다. 왜냐면 $x=1$, $y=2$를 대입하면 등식이 성립하기 때문이다. 또한 다음과 같은 두 전칭명제

$$\forall\, x\ \forall\, y\ :\ x^2+(y+2)^2\ \geq\ 0,$$
$$\forall\, y\ \forall\, x\ :\ x^2+(y+2)^2\ \geq\ 0$$

도 모두 참이다. 임의의 실수를 제곱하면 0 이상인 실수가 되며, 0 이상인 두 실수를 더하면 0 이상인 실수가 되기 때문이다.

한정명제의 순서

‘유일하다’의 정의

대상 영역의 원소 x 중에서 명제함수 $p(x)$를 만족시키는 x가 단 하나만 존재할 때, ‘$p(x)$인 x는 유일하다’라고 표현한다. 이것을 논리적으로 정의하면 다음과 같다.

정의. 대상 영역이 U일 때 명제함수 $p(x)$가 두 조건

(i) $\exists\, x \in U : p(x)$,

(ii) $p(x_1) \wedge p(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

를 모두 만족시키면 ‘U에서 $p(x)$를 만족시키는 x는 **유일하다**’라고 말한다.

이것을 기호로 $\exists\, !\, x : p(x)$로 나타낸다.

한정명제의 순서

예제 8. 대상 영역이 자연수 전체일 때, 다음 한정명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 명제함수 $p(x) \equiv (x^2 < 3)$이 참이 되게 하는 x는 유일하다.

(2) $\exists\,!x$: 「$x^2 + 2x + 1 = 0$」

(3) $\forall\, x \;\; \exists\,!y$: $(y = 2^x)$

(4) $\forall\, x \;\; \exists\,!y$: (x는 y로 나누어 떨어진다)

한정명제의 순서

문제 9. 모든 실수가 대상 영역인 명제

「방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$에 해가 존재한다」

를 한정기호를 사용하여 표현하시오.

한정명제의 순서

문제 10. 다음 명제의 부정을 구하시오. (참, 거짓을 판별하라는 문제가 아님.)

(1) 모든 뱀은 파충류이다.

(2) 말 중에는 온순한 것도 있다.

(3) 수학자 중에는 사교적인 사람이 있다.

(4) 모든 강아지는 매력이 있거나 똑똑하다.

(5) 귀엽지 않은 아기는 없다.

문제 11. 위 문제 10의 각 명제에서 생각할 수 있는 대상영역을 말하시오.

한정명제의 순서

※ 다음 각 논증을 연역적 방법으로 증명하시오. (12~13)

문제 12. 미정이나 소라가 반장에 당선되면 영민이와 보람이가 손을 흔들 것이다. 보람이가 손을 흔들지 않는다. 따라서 소라가 반장에 당선되지 않았다.

문제 13. 내가 이 과목을 신청하여 열심히 공부한다면 좋은 학점을 받을 것이다. 내가 좋은 학점을 받으면 행복할 것이다. 나는 행복하지 않다. 그러므로 나는 이 과목을 신청하지 않았거나 열심히 공부하지 않았다.

공부한 내용

✓ 명제의 뜻

✓ 함의와 동치

✓ 정리와 증명

✓ 한정명제

✓ 한정명제의 부정

✓ 한정명제의 순서