| | |
|---|---|
| 주제 | 수학의 언어 |
| 교과 | 수학 |
| 영역 | 논리 |
| 대상 | 초등학교 6학년 ~ 고등학교 1학년 영재교육 대상자 |
| 내용 | 1. 식의 계산<br>2. 집합의 직관적 이해<br>3. 수학의 논리<br>4. 집합의 논리적 이해<br>5. 자연수의 성질 |
| 만든이 | 이슬비, designeralice@daum.net, https://iseulbee.com |
| 저작권 |  |
| 참고문헌 | [1] 노영순(2019), 『집합론』, 도서출판보성.<br>[2] Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach(2011) 『A History of Mathematics』, John Wiley & Sons.<br>[3] Charles C. Pinter(2014), 『A Book of Set Theory』, Courier Corporation.<br>[4] You-Feng Lin(1999), 『Set Theory An Intuitive Approach』, Houghton Mifflin. |

# 수학의 언어

## I 식의 계산

### 1. 정수와 유리수

#### 가. 정수와 유리수의 뜻

**(1) 자연수** : 1부터 시작하여 1씩 더하여 만들 수 있는 수. **양의 정수**라고도 부른다.
**(2) 정수** : 자연수, 0, 음의 정수를 통틀어 이르는 말.
**(3) 유리수** : 정수를 정수로 나누어 만들 수 있는 수. (단, 나누는 수는 0이 될 수 없다.)

**문제 1.** 다음 수를 자연수, 정수, 유리수로 구분하시오.

$$-5 \qquad -1.5 \qquad -\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad +3 \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{1.7}{1}$$

**문제 2.** 다음은 $0.999\cdots = 1$을 증명하는 과정이다.

> $1 \div 3$을 계산하면
> $$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$
> 이므로 양변에 3을 곱하면
> $$(\text{좌변}) = \frac{1}{3} \times 3 = 1,\ (\text{우변}) = 0.333\cdots \times 3 = 0.999\cdots$$
> 이다. 그러므로
> $$1 = 0.999\cdots$$
> 이다.

그런데 소수점 아래 9의 개수가 아무리 많아도 $1 > 0.999999\cdots9$이다. 이것은 모순이 아닐까? 자신의 의견을 논리적으로 서술하시오.

**문제** **3.** 다음 진술의 참 . 거짓 여부를 판별하시오.

(1) 3과 3.0은 같은 수이다.

(2) $\frac{12}{4}$와 3은 같은 수이다.

(3) $\frac{12}{4}$와 3은 같은 분수이다.

(4) 7과 $(8-1)$은 같은 수이다.

(5) 7과 $(8-1)$은 같은 식이다.

(6) $7=8-1$

'같다'라는 말은 어떠한 의미를 가지고 있는가? 자신의 의견을 논리적으로 서술하시오.

## 나. 수의 계산

**(1) 절댓값**: 수직선에서 수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리.

$x$가 수일 때, $x$의 절댓값을 $|x|$로 나타낸다.

**(2) 분수의 곱셈**: 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱한 뒤 약분한다.

예 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{4}=\frac{2\times7}{3\times4}=\frac{\cancel{2}\times7}{3\times\cancel{4}}=\frac{1\times7}{3\times2}=\frac{7}{6}$

**(3) 분수의 덧셈** : 통분한 뒤 분모는 그대로 두고 분자만 더한다.

예 $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$

**(4) 유리수의 덧셈**

① 부호가 같은 두 수의 합은 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙인다.

예 $(-6)+(-2)=-(6+2)=-8$

예 $3+8=+(3+8)=+11$

예 $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3}$

② 부호가 다른 두 수의 합은 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인다.

예 $(+7)+(-2)=+(7-2)=+5$ ← $+7$의 절댓값이 $-2$의 절댓값보다 크다.

예 $(-7)+(+2)=-(7-2)=-5$ ← $-7$의 절댓값이 $+2$의 절댓값보다 크다.

예 $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)=-1$

예 $\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=+\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)=+1$

### (5) 유리수의 뺄셈

① 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 고쳐서 계산한다.

예 $(+3)-(+4)=(+3)+(-4)=-1$

예 $(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8$

② 뺄셈 기호와 음의 부호가 겹쳐 있으면 양수를 더하는 것으로 계산한다.

예 $(+3)-(-7)=(+3)+(+7)=+10$

예 $(-6)-(-11)=(-6)+(+11)=+5$

### (6) 수의 곱셈

① (양수)×(양수)=(양수) ② (음수)×(음수)=(양수)

③ (음수)×(양수)=(음수) ③ (양수)×(음수)=(음수)

### (7) 수의 나눗셈

① (양수)÷(양수)=(양수) ② (음수)÷(음수)=(양수)

③ (음수)÷(양수)=(음수) ③ (양수)÷(음수)=(음수)

### (8) 계산 순서

(괄호) → (거듭제곱) → (곱셈과 나눗셈) → (덧셈과 뺄셈)

### (9) 수의 계산 법칙

① 덧셈에 대한 교환법칙: $a+b = b+a$

② 덧셈에 대한 결합법칙: $(a+b)+c = a+(b+c)$

③ 곱셈에 대한 교환법칙: $a\times b = b\times a$

④ 곱셈에 대한 결합법칙: $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

⑤ 분배법칙: $a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$, $(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$

문제 **4.** 다음을 계산하시오.

(1) $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$

(2) $\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)$

(5) $(-10)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)$

**문제** **5.** 다음을 계산하시오.

(1) $12 \div (-3) \times 2$

(2) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \div (-4)$

(3) $\frac{1}{4} \div \left(-\frac{1}{10}\right) \div (-2)^2$

**문제** **6.** 다음을 계산하시오.

(1) $4 + \{2 + (-4) \times (2-5)\}$

(2) $(-28) \div \left\{(-3)^2 \times \left(-\frac{1}{12}\right) - 1\right\}$

(3) $\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right) \div \frac{4}{15} + 1\right\} - 1$

# 2. 문자의 사용과 식의 계산

## 가. 문자의 사용

### (1) 곱을 나타내는 방법

① 문자를 곱할 때에는 곱셈 기호 ×를 생략한다.

예 $a \times b \times c = abc$, $4 \times x \times y = 4xy$

② 문자와 수의 곱에서는 수를 문자 앞에 쓴다.

③ 문자끼리의 곱에서는 알파벳 순서로 쓴다.

예 $y \times 2 \times x = 2xy$, $c \times a \times 5 = 5ac$

④ 같은 문자의 곱은 거듭제곱을 이용하여 나타낸다.

예 $a \times a \times a \times b \times b = a^3 \times b^2 = a^3b^2$

⑤ 문자에 1을 곱하는 것은 생략하고, $-1$을 곱하는 것은 음의 부호 $-$만 붙인다.

예 $1 \times a = a$, $(-1) \times a = -a$

### (2) 나눗셈을 나타내는 방법

① 문자를 사용한 식에서 나눗셈 기호 ÷는 사용하지 않고 분수로 바꾸어 나타낸다.

예 $a \div 2 = \frac{a}{2}$ 또는 $a \div 2 = \frac{1}{2}a$ 예 $ab \div c = \frac{ab}{c}$

예 $(-4x) \div 3 = -\frac{4x}{3}$ 또는 $(-4x) \div 3 = -\frac{4}{3}x$

**문제** **7.** 다음 식을 곱셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $a\times b\times 5$
(2) $x\times y\times x\times(-3)$
(3) $(-1)\times(x+3)$
(4) $(x+y)\times 6\times a\times a$

**문제** **8.** 다음 식을 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $a\div 3\times x$
(2) $x\times y\div(x+y)$
(3) $(-3)\times(x+y)\div x$
(4) $(-1)\times x\div y\times a$
(5) $a\times(-5)+b\div 8$
(6) $x\times x\times x\times(-2)\div y$

## 나. 식의 계산

(1) 항과 항을 곱할 땐 교환법칙을 이용하여 계산한다.
예 $4x\times 3=4\times x\times 3=4\times 3\times x=12x$
(2) 문자와 차수가 같은 항을 **동류항**이라고 부른다.
예 $3x$와 $2x$는 동류항이다.
예 $4xy$와 $-xy$는 동류항이다.
예 $6x$와 $6y$는 동류항이 아니다.
예 $3x$와 $4x^2$은 동류항이 아니다.
(3) 동류항끼리 더할 때에는 문자는 그대로 두고 계수만 더한다.
예 $3x+2x=5x$
예 $6a-2a=4a$
(4) 괄호 앞에 뺄셈 기호가 있는 경우 괄호 안의 항의 부호가 모두 바뀐다.
예 $-(3x-2)=-3x+2$
예 $-(-4x+2)=4x-2$

**문제** **9.** 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(4x-3)+(5x+6)$
(2) $(-2y+3)+(3y-1)$
(3) $\left(\frac{2}{5}m+3\right)+\left(-\frac{3}{10}m+1\right)$
(4) $\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{4}\right)$

**문제** **12.** 다음 식을 계산하시오.

(1) $(4x-6)-(x+2)$
(2) $(-2y+3)-(y-1)$
(3) $(5a-4)-(-4a+7)$
(4) $\left(\frac{b}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{b}{2}-\frac{1}{4}\right)$

# Ⅱ 집합의 직관적 이해

## 1. 집합의 뜻

**집합의 뜻**

**(1) 집합** : 주어진 조건에 의하여 그 대상이 분명하게 결정되는 모임.

예 '10 이하의 짝수의 모임'은 집합이다.

예 '키가 큰 사람들의 모임'은 집합이 아니다.

**(2) 원소** : 집합을 이루는 대상. $a$가 $A$의 원소인 것을 $a \in A$로 나타낸다. 이것을 '$a$가 $A$에 **속한다**'라고 읽는다.

예 10 이하의 짝수의 집합을 $A$라고 하면 $2 \in A$이고 $4 \in A$이지만 $3 \notin A$이다.

**(3) 집합을 나타내는 방법**

① **원소나열법** : 집합의 원소를 하나씩 나열하고, 중괄호로 묶어서 나타낸다.

예 8의 약수의 집합 : $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

예 모든 자연수의 집합 : $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$

② **조건제시법** : $\{x \mid x$에 대한 조건$\}$으로 나타낸다. ($x$는 다른 문자가 될 수 있다.)

예 8의 약수의 집합 : $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$

예 모든 자연수의 집합 : $\{n \mid n$은 자연수$\}$

**문제 1.** 다음 중 집합인 것을 있는 대로 고르시오.

① 매우 큰 자연수들의 모임
② 모든 짝수들의 모임
③ 인기가 있는 가수들의 모임
④ 음반을 10000장 이상 판매한 가수의 모임
⑤ 멋진 사람들의 모임

**문제 2.** 집합 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 있는 대로 고르시오.

① $2 \notin A$
② $3 \in A$
③ $4 \notin A$
④ $5 \notin A$
⑤ $9 \notin A$

**문제 3.** 집합 $B$가 9보다 작은 홀수의 집합이다. 이때 $B$를 원소나열법으로 바르게 나타낸 것을 고르시오.

① $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
② $B=\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$
③ $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $B=\{n \mid n \leq 9\}$
⑤ $B=\{x \mid x < 9\}$

**문제** **4.** '모든 집합의 모임'이 존재할 수 있는가? 자신의 의견을 논리적으로 기술하시오.

## 2. 집합의 구분

**집합의 구분**

**(1) 무한집합** : 원소가 무한히 많은 집합.

**(2) 유한집합** : 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있는 집합.

- $A$가 유한집합일 때 $A$의 원소의 개수를 $n(A)$로 나타낸다.

**(3) 공집합** : 원소가 하나도 없는 집합.

- 공집합을 기호로 $\varnothing$으로 나타낸다.
- 공집합도 유한집합이다.

**(4) 부분집합** : 집합 $A$의 모든 원소가 집합 $B$에 속할 때, $A$를 $B$의 부분집합이라고 부른다. 이것을 기호로 $A \subset B$로 나타낸다.

→ 즉 $A$가 $B$에 완전히 쏙 들어갈 때 $A$를 $B$의 부분집합이라고 부른다.

예 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때 $A \subset B$이다.

예 $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $D=\{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$일 때 $C \not\subset D$이다.

**문제** **5.** 다음 중 유한집합인 것을 있는 대로 고르시오.

① 모든 자연수의 집합
② 4보다 큰 짝수의 집합
③ 1보다 작은 자연수의 집합
④ 100보다 작은 홀수의 집합
⑤ 짝수가 아닌 자연수의 집합

**문제** **6.** 다음 집합의 원소의 개수를 구하고, 그것을 기호로 나타내시오.

(1) $A=\{0\}$

(2) $B=\{x \mid x$는 18의 약수$\}$

(3) $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 24\}$

(4) $D=\{n \mid n$은 0 이하의 자연수$\}$

**문제** **7.** 다음 중에서 집합 $\{3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합을 있는 대로 고르시오.

① $\phi$
② $\{3\}$
③ $\{0,\ 3\}$
④ $\{4,\ 5\}$
⑤ $\{3,\ 4,\ 5\}$
⑥ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

**문제** **8.** 다음 빈칸에 ⊂, ⊃, = 중 알맞은 기호를 써 넣으시오.

(1) $\{2,\ 3,\ 4\}\square\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

(2) $\{x\,|\,x$는 10 이하의 홀수$\}\square\{x\,|\,x$는 9 이하의 홀수$\}$

## 3. 집합의 계산

**집합의 계산**

**(1) 교집합** : 두 집합에 공통으로 들어 있는 원소만 모은 집합.

예 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때 $A\cap B=\{2,\ 3\}$이다.

**(2) 합집합** : 두 집합에 있는 원소들을 모두 모은 집합.

예 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.

**(3) 차집합** : 한 집합에서 다른 집합의 원소를 제외한 집합.

예 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때 $A-B=\{1\}$이다.

**(4) 전체집합** : 부분집합을 생각할 때 기본 바탕이 되는 집합.

**(5) 여집합** : 어떠한 집합에 들어 있지 않은 원소만 모은 집합.

예 전체집합이 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$일 때 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$의 여집합은 $A^c=\{3,\ 5,\ 6\}$이다. (전체집합이 있어야 여집합을 구할 수 있다.)

**문제** **9.** $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Q=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$일 때 다음을 구하시오.

(1) $P\cup Q$

(2) $P\cap Q$

(3) $P-Q$

(4) $P^c$

**문제** **10.** 전체집합이 $U=\{n\,|\,n$은 10 이하의 자연수$\}$이고

$$A=\{1,\ 2,\ 4\},\ B=\{x\,|\,x\text{는 10 미만의 짝수}\}$$

일 때 다음을 구하시오.

(1) $A^c$

(2) $B^c$

(3) $A\cap B^c$

(4) $A-B$

(5) $A^c\cup B$

**문제** **11.** 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 $A\cap X=X$, $n(X)=3$을 모두 만족시키는 집합 $X$의 개수를 구하시오.

# Ⅲ 수학의 논리

## 가. 명제의 뜻

명제와 그것을 이용한 기초적인 논리를 살펴 보자. 명제와 집합에 대하여 설명하는 과정에서 많은 예를 들 것인데, 예에서 나오는 개념 중에는 이 책에서 정확하게 정의하지 않은 것도 있다. 하지만 이러한 것들은 어디까지나 명제와 집합을 이해하기 위한 보조 도구이므로 직관적인 수준에서 받아들이기로 하자. 먼저 논리의 기본 단위인 명제를 정의한다.

| |
|---|
| **정의 1.** **명제**는 참이나 거짓이 분명히 판단되는 문장을 말한다. |

예를 들어 ‘3은 홀수이다’, ‘독도는 한국 땅이다’는 참인 명제이며 ‘자연수의 개수는 유한이다’는 거짓인 명제이다. 그러나 ‘고구마 케이크는 맛있다’, ‘너는 좋으냐, 낙엽 밟는 소리가’와 같은 문장은 명제가 아니다.

명제에는 참, 거짓 중 어느 한쪽이어야 함을 분명히 가릴만한 조건이 갖추어져 있어야 한다. 명제의 참, 거짓은 곧바로 정할 수 있을 때도 있고 경우에 따라서는 노력이 다소 들 때가 있으며, 결론에 도달할 수 없는 경우도 있다. (참 또는 거짓을 가릴 수 없는 명제가 존재하지만 이것은 이 수업의 수준에서 벗어나므로 여기서는 깊이 다루지 않는다. 관심 있는 사람은 ‘괴델의 불완전성 정리’, ‘유클리드의 평행선 공리’, ‘연속체 가설’을 찾아보기 바란다.)

참, 거짓 여부를 결정하는 하나의 진술만을 포함하고 있는 명제를 **단순명제**(simple statement)라고 부르고, 둘 이상의 단순명제가 결합된 것을 **합성명제**(compounded statement)라고 부른다. 이를테면,

「나는 여자이고 내 동생은 남자이다.」

라는 명제는 ‘나는 여자이다’라는 명제와 ‘내 동생은 남자이다’라는 명제가 합성된 것이다.

수를 나타낼 때 문자를 사용하듯이, 논리에 있어서도 명제를 나타낼 때 $p$, $q$, $r$, $\cdots$ 와 같은 문자를 사용한다. 이때 $p$와 같은 하나의 문자는 단순명제 또는 합성명제를 나타낸다. 명제를 연결하여 합성명제를 구성하는 방법은 여러 가지가 있으나 흔히 사용되고 있는 것으로는 다섯 가지가 있다.

(뒷장 계속)

이 다섯 가지의 **결합자**(connective)는 다음과 같다.

| 기호 | 이름 | 표기 | 의미 |
|---|---|---|---|
| $\sim$ | 부정 | $\sim p$ | $p$가 아니다. |
| $\wedge$ | 논리곱 | $p \wedge q$ | $p$이고 $q$이다. |
| $\vee$ | 논리합 | $p \vee q$ | $p$이거나 또는 $q$이다. |
| $\rightarrow$ | 조건 | $p \rightarrow q$ | $p$이면 $q$이다. |
| $\leftrightarrow$ | 쌍조건 | $p \leftrightarrow q$ | $p$이면 $q$이고, $q$이면 $p$이다. |

위 정의만으로는 결합자의 의미를 정확하게 파악할 수 없으므로 지금부터 진리표를 이용하여 결합자의 의미를 살펴보자.

하나의 명제 $p$에 대하여 '$p$가 아니다' 또는 '$p$의 **부정**'이라고 불리는 $\sim p$는 명제 $p$가 거짓일 때에 참이고, $p$가 참일 때에 거짓인 명제이다. 이를테면 $p$를 명제 '나는 여자이다'라고 할 때 그 부정 $\sim p$는 '나는 여자가 아니다'를 나타내는 명제이다. 명제 $\sim p$의 참, 거짓 여부는 명제 $p$의 참, 거짓에 달려있다. 이러한 의존성을 다음과 같은 **진리표**(truth table)에 실어두면 편리하다.

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

여기서 문자 T는 **참**, 문자 F는 **거짓**을 나타낸다. 위 표의 첫째 열에는 $p$에 대한 두 가지 가능한 **진릿값**(truth value) 즉 T 또는 F를 기록하기로 한다.

다음으로 논리곱과 논리합을 진리표로 나타내보면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

논리곱 $p \wedge q$와 같은 합성명제에 대하여 각각의 명제 $p$, $q$를 그 **성분**(component)이라고 부른다. 합성명제의 성분은 단순명제이거나 합성명제일 수도 있다. $p \wedge q$와 같이 두 성분으로 이루어진 합성명제에 있어서 검토해야 할 모든 가능성, 이른바 **논리적 가능성**(logical possibility)은 4가지이다. 참고로 $n$개의 성분으로 이루어진 합성명제에 있어서 검토해야 할 모든 가능성은 $2^n$가지이다.

명제를 합성할 때에는 괄호를 통해 우선순위를 정해준다. 예를 들어 $(q \wedge r) \vee p$는 $q$와 $r$의 논리곱의 결과와 $p$를 논리합 하는 것을 뜻한다. 그리고 괄호가 없을 때 연결사의 우선순위는 '$\sim$', '$\wedge$, $\vee$', '$\rightarrow$, $\leftrightarrow$'라고 약속한다.

다음으로 논리적 동치를 정의한다.

> **정의 2.** 단순명제 또는 합성명제 $p$와 $q$가 모든 논리적 가능성의 각각의 경우 진릿값이 같으면 $p$와 $q$는 '**논리적 동치**(logically equivalent)이다' 또는 간단하게 '**동치**(equivalent)이다'라고 말하고, 이것을 $p \equiv q$와 같이 나타낸다.

즉 두 명제가 논리적으로 동치라는 것은 두 명제의 진리표가 같다는 뜻이다.

**예제 1.** 두 명제 $p$, $q$에 대하여 $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$임을 보이시오.

**풀이** 명제 $\sim(\sim p \wedge \sim q)$의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \wedge (\sim q)$ | $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | T |
| T | F | F | T | F | T |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | T | T | F |
| 단계 | | 1 | 1 | 2 | 3 |

따라서 명제 $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$의 진릿값은 앞서 살펴본 $p \vee q$의 진릿값과 같다. □

임의의 두 명제 $p$와 $q$ 사이에 **조건부**(conditional)라고 불리는 결합자 '$\rightarrow$'를 붙여서 만든 합성명제 $p \rightarrow q$는 $\sim p \vee q$와 동치인 것으로 정의되며 진리표로 나타내면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

조건부의 진리표를 살펴보면, $p$가 참이고 $q$가 거짓인 경우를 제외하면 $p \rightarrow q$는 참이다. 일상적인 언어에서는 '토끼가 식물이면 감자는 동물이다'와 같은 말은 토끼가 식물이 아니고 감자는 동물이 아니기 때문에 무의미한 문장이 된다. (뒷장 계속)

하지만 이 문장을 명제로서 살펴보면 참인 명제가 된다. 이처럼 일상 언어에서는 의미 없이 결합된 문장이라도 논리적으로 보면 참, 거짓을 정할 수 있는 명제가 될 수 있는데 이러한 문장을 **형식적 언어**라고 한다.

합성명제 $p \to q$의 진릿값이 $\sim p \vee q$로 정의된 이유를 살펴보자. 참인 합성명제

「실수 $x$에 대하여 $x > 3$이면 $x > 1$이다」

에 대하여 $p$를 '$x > 3$이다', $q$를 '$x > 1$이다'라고 정의하면 위 명제는

$$p \to q$$

라고 나타낼 수 있다. 이때

(ⅰ) $x \le 1$이면 $p$와 $q$가 모두 거짓,
(ⅱ) $1 < x \le 3$이면 $p$는 거짓이지만 $q$는 참,
(ⅲ) $x > 3$이면 $p$와 $q$가 모두 참

이다. 즉, 참인 명제 $p \to q$에 대하여 $(p,\ q)$의 진릿값이 (T, T), (F, T), (F, F)로서 세 가지가 존재한다. $p$가 거짓이면 $q$의 참, 거짓에 상관없이 $p \to q$는 참이 되고, $q$가 참이면 마찬가지로 $p$의 참, 거짓에 상관없이 $p \to q$는 참이 된다. 따라서 $p \to q$를 $\sim p \vee q$로 정의한다.

두 조건문 $p \to q$와 $q \to p$를 논리곱으로 묶은 명제 $(p \to q) \wedge (q \to p)$를 $p \leftrightarrow q$로 나타내며 **쌍조건**(biconditional)이라고 부른다.

**문제 1.** 다음 명제의 진리표를 작성하시오.

(1) $(p \wedge q) \wedge r$
(2) $p \wedge (q \wedge r)$
(3) $(p \vee \sim q) \wedge r$
(4) $\sim (p \wedge q) \vee r$
(5) $p \leftrightarrow q$
(6) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

**문제 2.** 명제 $p$가 '나는 둘리이다', $q$가 '나는 공룡이다'일 때, 다음 합성명제를 자연스러운 문장으로 표현하시오.

(1) $p \vee q$
(2) $p \wedge q$
(3) $p \to q$
(4) $\sim p \to \sim q$
(5) $\sim q \to \sim p$
(6) $\sim p \wedge q$

**문제** **3.** 명제 $p$가 '나는 동물이다', $q$가 '나는 개미핥기이다'일 때, 문장으로 된 다음 명제를 기호로 나타내시오.

(1) 나는 동물이지만 개미핥기는 아니다.
(2) 나는 개미핥기이므로 동물이다.
(3) 내가 개미핥기이려면 나는 동물이어야 한다.
(4) 동물은 개미핥기가 아니다.

## 나. 함의와 동치

합성명제 중에는 $\sim p \vee p$와 같이 그 진릿값이 항상 참인 것이 있다. 그리고 $\sim p \wedge p$와 같이 그 진릿값이 항상 거짓인 것도 있다. 이렇게 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 참인 명제를 **항진명제**(tautology)라고 부르며, 모든 논리적 가능성의 각 경우마다 진릿값이 거짓인 명제를 **모순명제**(contradiction)라고 한다. 항진명제는 보통 $t$로 나타내며, 모순명제는 보통 $c$로 나타낸다.

두 명제 $p$, $q$에 대하여, 조건문 $p \rightarrow q$가 항진일 때 이 조건문을 **함의**(implication)라 부르고 $p \Rightarrow q$와 같이 나타내며 '$p$는 $q$를 **함의한다**'라고 읽는다. 이때 $p$를 $q$이기 위한 **충분조건**이라고 부르며 $q$를 $p$이기 위한 **필요조건**이라고 부른다.

쌍조건문 $p \leftrightarrow q$가 항진일 때 이것을 $p \Leftrightarrow q$로 나타내고, '$p$와 $q$는 **동치**이다'라고 읽는다. 이때 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이며 $q$는 $p$이기 위한 필요충분조건이다.

쌍조건문 $p \Leftrightarrow q$는 다음과 같이 읽는다.

"$p$와 $q$는 서로 필요충분조건이다."
"$p$이면 $q$이고, $q$이면 $p$이다."
"$p$이면 그리고 그 때에만 $q$이다."

기호 '$\Leftrightarrow$'와 '$\equiv$'는 두 명제가 동치라는 것을 나타낼 때 사용되기도 하지만 수학적 개념을 정의할 때에도 사용된다. 이를테면 부등호 '$\leq$'를 다음과 같이 정의했다.

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad (a < b \ \vee \ a = b)$$

이것은 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$a \leq b \ \equiv \ (a < b \ \vee \ a = b)$$

또한 기호 '≡'는 문자나 개념을 정의할 때에 등호를 대신하여 사용되기도 한다.

$$f(x) \equiv x^2+3\text{일 때 } f(1)=4\text{이다.}$$

위 문장은 '함수 $f$를 $x^2+3$으로 정의하면 $f(1)$의 값은 4이다'라는 뜻이다.

**예제 2.** 합성명제 $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to [p \to r]$의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $r$ | $[(p\to q)$ | $\wedge$ | $(q\to r)]$ | $\to$ | $(p\to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | T | F |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | T | T |
| 단계 | | | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |

이 진리표를 통해 $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to [p \to r]$는 항상 참임을 알 수 있다.
따라서 $(p \to q) \wedge (q \to r)$은 $(p \to r)$을 함의한다. □

**예제 3.** 논리합, 논리곱, 쌍조건의 진리표를 작성하면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $q \vee p$ | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ | $p \leftrightarrow q$ | $q \leftrightarrow p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | T | T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | T | T |

이 진리표를 통해 $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$임을 알 수 있다. 즉 논리합, 논리곱, 쌍조건의 교환법칙이 성립한다. □

**예제 4.** 논리합과 논리곱에 대한 다음의 진리표를 살펴보자.

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F | T | T |
| F | T | F | F | F | F | F |
| F | F | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F |

이 진리표를 통해 논리합과 논리곱의 분배법칙이 성립함을 알 수 있다. □

## 다. 정리와 증명

수학이나 논리에서 **정리**(theorem)는 참인 명제이다. 참인 명제인 정리의 정당성을 밝히는 일을 **증명**(proof)이라고 한다. 보통, 명제는 '…일 때 …가 성립한다'와 같이 가정과 결론으로 이루어져 있다. 수학에서 다루는 모든 정리가 '$p \Rightarrow q$'의 모양이라고 해도 과언이 아니다. 가정으로부터 결론까지 도달하는 과정을 논리적으로 설명할 때에는 정의와 기존에 증명했던 정리만을 사용해야 한다.

**정리 1.** 임의의 명제 $p$, $q$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $p \Rightarrow p \vee q$ (합의 법칙)

(2) $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$ (단순화 법칙)

(3) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (논리합삼단법)

**증명** 여기서는 (3)만 증명해 보겠다. 조건문 $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$의 진리표를 작성해 보면 다음과 같다.

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\vee$ | $q)$ | $\wedge$ | $\sim p$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | F | T | T |
| F | T | T | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | T | T | T | T | T | T |
| F | F | F | F | F | F | T | T | F |
| 단계 | | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |

따라서 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$이다. □

앞의 정리에서 살펴본 합성명제를 일상 언어로 표현해보면 참임을 쉽게 알 수 있다. 예컨대 명제 $p$를 '나는 고구마이다', $q$를 '나는 한국인이다'라고 하면, 위 정리의 (1)의 명제는 '나는 고구마이다, 따라서 나는 고구마이거나 한국인이다'가 된다. 또한 위 정리의 (2)의 명제는 '나는 고구마이고 한국인이므로 나는 고구마이다'가 된다. 실생활에서는 사용되지 않는 의미없는 문장이지만 논리적으로 보면 참이다.

**정리 2.** 임의의 두 명제 $p$, $q$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ (이중부정법)

(2) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (교환법칙)

(3) $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$ (멱등법칙)

(4) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (대우법칙)

다음은 **드 모르간의 법칙**(De Morgan's rule)으로서, 논리적 추론에서 편리한 수단으로 이용되고 있는 정리이다.

**정리 3.** 임의의 두 명제 $p$, $q$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(2) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

명제 "나는 감자를 좋아하거나 고구마를 좋아하거나 토마토를 좋아한다"를 부정하면 "나는 감자를 싫어하고 고구마도 싫어하며 토마토도 싫어한다"가 된다. 또한, "나는 토마토이고 한국인이다"를 부정하면 "나는 토마토가 아니거나 한국인이 아니다"가 되어 드 모르간의 법칙이 성립함을 확인할 수 있다.

**문제 4.** 수학적 귀납법을 이용하여 드 모르간의 법칙을 $n$개의 명제로 확장하시오.

**정리 4.** 임의의 세 명제 $p$, $q$, $r$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (결합법칙)

(2) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (결합법칙)

(3) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (분배법칙)

(4) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (분배법칙)

(5) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (추이법칙)

결합법칙에 의하여

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

에 있는 괄호는 불필요하게 된다. 그리하여 $p \wedge q \wedge r$과 $p \vee q \vee r$은 각각 일정한 뜻을 지닌다. 마찬가지로 명제 $p_i$에 대하여 $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$과 $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$도 같은 방법으로 생각한다.

지금까지 살펴본 여러 가지 법칙들은 다음의 예제에서와 같이 논리적 동치와 함의에 대한 정당성을 주장하는데 있어서 매우 중요한 수단이 된다. 이른바 추론규칙이라고 불리는 이들 법칙은 단지 편리하게 활용하고자 택한 것일 뿐 규칙 상호간의 독립성은 염두에 두지 않고 있다. 이를테면 대우법칙의 경우 이 법칙과는 다른 법칙과 정의를 사용하여 연역적으로(deductively) 증명할 수 있다.

**예제 5.** 대우법칙 $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$를 다른 추론규칙과 정의를 사용하여 증명하시오.

**풀이** $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$ □

위 예제에서와 같이 진리표를 사용하지 않고 정의, 전제로 세운 공리, 이미 증명한 정리, 추론규칙 등을 활용하여 증명하는 것을 **연역적 추론**(deductive reasoning)이라고 부른다.

조건명제 $p \to q$에서 $p$를 **가정**이라고 부르고 $q$를 **결론**이라고 부른다. 이때, 가정과 결론의 위치를 바꾼 $q \to p$를 $p \to q$의 **역**이라고 부른다. 그리고 가정과 결론을 부정한 조건문 $\sim p \to \sim q$를 $p \to q$의 **이**라고 부른다. 또한, 가정과 결론을 부정하고 역을 취한 조건문 $\sim q \to \sim p$를 $p \to q$의 **대우**라고 부른다.

앞의 예제에서 살펴본 바와 같이 $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$이므로 임의의 조건명제와 그 대우는 서로 동치이다.

명제 $p \to q$가 참임을 증명하는 대신, '$p$는 참이고 $q$는 거짓이라고 하면 모순이다'를 증명하기도 한다. 왜냐하면

$$(p \to q) \Leftrightarrow \sim(p \to q) \to c \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \to c$$

이기 때문이다. 비슷하게 명제 $p$가 참임을 증명하는 대신, '$p$가 거짓이면 모순이다'는 것을 보이기도 한다. 왜냐하면 $p \Leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow \sim p \to c$이기 때문이다. 이처럼 다음과 같은 추론 방법을 **간접증명법** 또는 **배리법**이라고 부른다.

(ⅰ) 명제 $p \to q$가 참임을 보이기 위해 $\sim q \to \sim p$가 참임을 보인다.

(ⅱ) 명제 $p$가 참임을 보이기 위해 $\sim p \to c$가 참임을 보인다.

**문제** **5.** 다음 명제를 진리표를 사용하여 증명하시오.

(1) $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$
(2) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
(3) $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$
(4) $\sim(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

**문제** **6.** 다음 명제의 부정을 구하시오.

(1) 토끼는 하얗지도 않고 귀엽지도 않다.
(2) 비가 오면 우산이 잘 팔린다.
(3) 애인이 생기면 학업 성적이 좋아진다.
(4) 부업을 하면 돈은 벌지만 여유는 줄어든다.

**문제** **7.** 다음 명제를 연역적으로 증명하시오.

(1) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
(2) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$
(3) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim q)$

**문제** **8.** 다음 분배법칙을 증명하시오.

(1) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$
(2) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_n)$

## 라. 한정명제

명제는 그 자체로서 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있지만, 대상이 주어져야 참, 거짓을 판별할 수 있는 경우도 있다. 예컨대

「$x$는 동물이다.」

라는 명제는 $x$가 무엇인지에 따라 참, 거짓이 달라진다. $x$가 국화라면 위 명제는 거짓이 되고, $x$가 고양이라면 위 명제는 참이다. 이처럼 명제 안에 미지개념이 포함되어 있을 때 이것을 명제함수라고 한다. 위 명제는 다음과 같이 기호로 나타낼 수 있다.

$p(x) \equiv$「$x$는 동물이다.」
$p(x) \Leftrightarrow$「$x$는 동물이다.」

추론할 때에는 염두에 둔 성질을 지닌 모임, 즉 대상영역 또는 모집단을 고려하게 된다. 이를테면

「모든 토끼는 동물이다.」

의 대상 영역은 토끼의 집합이다. 이와 같이 대상영역 $U$를 '모든 토끼의 집합'이라고 정의하고 대상 영역의 한 구성원을 $x$라고 표시함으로써 앞의 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「대상영역의 모든 $x$에 대하여 $x$는 동물이다.」

여기서 관용구 '대상영역의 모든 $x$에 대하여'를 **전칭기호**(universal quantifier)라고 부르고 이것을 $(\forall x \in U)$ 또는 간단하게 $\forall x \in U$로 나타낸다. 그리고 전칭기호와 명제를 구분하기 위하여 그 사이에 쉼표(,)나 콜론(:), 세미콜론(;), 바(|), 또는 'such that'의 약자로서 's.t.'를 표기하기도 한다. 위 명제를 앞서 정의한 명제함수 $p(x)$와 결합하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\forall x \in U : p(x)$$

다음으로 명제

「어떤 토끼는 검은색이다.」

를 생각할 경우 대상영역은 역시 모든 토끼다. 이러한 대상영역을 염두에 두고 명제함수 $q(x)$를 「$x$는 검은색이다.」라고 정의하면 위 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

「검은색인 토끼가 적어도 한 마리 존재한다.」
「적어도 한 마리의 $x$가 존재하여 $x$는 검은색이다.」
「적어도 하나의 $x$가 존재하여 $q(x)$.」

여기서 관용구 '적어도 한 마리의 $x$가 존재하여'를 **존재기호**(existential quantifier)라고 부르고 이것을 $(\exists x \in U)$ 또는 간단히 $\exists x \in U$로 나타낸다. 지금까지 소개한 존재기호를 써서 위의 명제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\exists x \in U : q(x)$$

대상 영역이 확실하여 혼동할 염려가 없을 때에는 $\forall x \in U$와 $\exists x \in U$를 각각 $\forall x$, $\exists x$로 표기하기도 한다.

전칭기호와 존재기호를 통틀어 **한정기호**(quantifier)라고 한다. 그리고 전칭기호나 존재기호가 들어있는 명제를 차례로 **전칭명제**, **존재명제**라고 부르며 이 둘을 통틀어 **한정명제**라고 부른다. 중등학교의 수학에서는 흔히 한정기호를 생략한다. 이를테면

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

은 모든 실수 $x$에 대하여 성립하는 것으로 이해된다.

수학에서 '임의의 $x$에 대하여' 또는 '모든 $x$에 대하여'는 같은 뜻으로 받아들이며 어느때나 $(\forall x)$로 나타낸다. 그리고 '적당한 $x$에 대하여', '$x$가 존재하여' 또는 '~인 $x$가 존재한다'는 같은 뜻으로 받아들이며 어느때나 $(\exists x)$로 나타낸다.

## 마. 한정명제의 부정

논리와 수학에 있어서 한정기호의 부정 규칙은 다음과 같다.

$$\sim[\forall x \in U,\ p(x)] \Leftrightarrow [\exists x \in U,\ \sim p(x)]$$
$$\sim[\exists x \in U,\ p(x)] \Leftrightarrow [\forall x \in U,\ \sim p(x)]$$

전칭명제와 존재명제를 더욱 잘 이해하기 위하여 대상영역이 유한집합

$$U = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$$

인 경우를 살펴보자. 이 때 $\forall x \in U : p(x)$는

「모든 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$에 대하여 $p(x)$가 참이다」

이고, 이것은

$$p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

과 동치인 명제이다. 마찬가지로 $\exists x \in U : p(x)$는

$$p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

을 뜻한다. 따라서 $\forall x \in U : p(x)$를 부정하면 드 모르간의 법칙에 의하여

$$\sim p(a_1) \vee \sim p(a_2) \vee \sim p(a_3) \vee \cdots \vee \sim p(a_n)$$

이 되는데 이것은 $\exists x \in U : \sim p(x)$와 같은 의미이다.

따라서 한정명제 $\forall x \in U : p(x)$의 부정은 $\exists x \in U : \sim p(x)$임을 알 수 있다.
같은 맥락에서 한정명제 $\exists x \in U : p(x)$의 부정은 $\forall x \in U : \sim p(x)$이다.

**예제 6.** 다음 명제의 부정을 말하시오.

(1) 모든 사람은 머리가 있다.
(2) 우리 반 학생은 모두 엑스맨이다.
(3) 머리카락이 하얀 사람도 있다.
(4) 해산물을 먹지 못하는 사람이 있다.
(5) 휴대전화를 소유하지 않은 사람은 없다.
(6) 누구나 자전거를 탈 수 있다.

**풀이** (1) 모든 사람의 집합을 $A$, 「$x$는 머리를 가지고 있다」라는 명제를 $p(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\forall x \in A : p(x)$가 된다. 이것을 부정하면 $\exists x \in A : \sim p(x)$이고, 이것을 일상적인 말로 나타내면 '머리가 없는 사람이 존재한다'가 된다.

(2) 우리 반 학생의 집합을 $B$, 「$x$는 엑스맨이다」라는 명제를 $q(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\forall x \in B : q(x)$가 된다. 이것을 부정하면 $\exists x \in B : \sim q(x)$이고, 이것을 일상적인 말로 나타내면 '우리 반에 엑스맨이 아닌 사람이 존재한다'이다.

(3) 모든 사람의 집합을 $A$, 「$x$의 머리카락이 하얗다」라는 명제를 $r(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\exists x \in A : r(x)$가 된다. 이것을 부정하면 $\forall x \in A : \sim r(x)$이고 이것을 일상적인 말로 나타내면 '모든 사람의 머리카락은 하얗지 않다'이다. 이것을 더 자연스러운 말로 바꾸면 '머리카락이 하얀 사람은 없다'가 된다.

(4) 모든 사람의 집합을 $A$, 「$x$는 해산물을 먹을 수 있다」라는 명제를 $t(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\exists x \in A : \sim t(x)$가 된다. 이것을 부정하면 $\forall x \in A : t(x)$이고 이것을 일상적인 말로 나타내면 '모든 사람은 해산물을 먹을 수 있다'가 된다.

(5) 모든 사람의 집합을 $A$, 「$x$는 휴대전화를 소유하고 있다」라는 명제를 $u(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\sim [\exists x \in A : \sim u(x)]$가 된다. 이것을 부정하면

$$\sim [\sim [\exists x \in A : \sim u(x)]] \Leftrightarrow \exists x \in A : \sim u(x)$$

이고 이것을 일상적인 말로 나타내면 '휴대전화를 소유하지 않은 사람이 있다'가 된다.

(6) 모든 사람의 집합을 $A$, 「$x$는 자전거를 탈 수 있다」라는 명제를 $v(x)$라고 하면 주어진 명제는 $\forall x \in A : v(x)$가 된다. 이것을 부정하면 $\exists x \in A : \sim v(x)$이고 이것을 일상적인 말로 나타내면 '자전거를 탈 수 없는 사람이 있다'가 된다. □

## 바. 한정명제의 순서

한정기호는 일반적으로 그것을 표시하는 순서에 따라서 의미가 달라진다. 예컨대 대상영역 $U$가 모든 자연수의 집합일 때

$$\forall x \in U : [\exists y \in U : (y\text{는 } x\text{의 배수이다})],$$
$$\exists y \in U : [\forall x \in U : (y\text{는 } x\text{의 배수이다})]$$

를 각각 말로 표현해보면 다음과 같다.

「모든 자연수 $x$에 대하여 $x$의 배수인 자연수 $y$가 존재한다」,
「어떤 자연수 $y$가 모든 자연수 $x$의 배수이다」.

배수가 없는 자연수는 없으므로 첫 번째 문장은 참이다. 그러나 한 자연수가 모든 자연수의 배수일 수는 없으므로 두 번째 문장은 거짓이다.

즉, $\forall x\ \exists y$는 $x$가 임의로 선택되면 그에 알맞은 $y$가 존재한다는 뜻이며 $\exists y\ \forall x$는 [모든 $x$에 대하여 주어진 명제(조건)를 만족]시키는 $y$가 존재한다는 뜻이다.

**예제 7.** 대상 영역이 실수 전체일 때, 다음 두 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $\forall x\ \exists y : y > x$

(2) $\exists y\ \forall x : y > x$

**풀이** (1) 실수 $x$에 대하여 $x+1 > x$이므로 $y = x+1$이라고 두면 $y > x$이다. 즉 어떠한 실수 $x$가 주어지더라도 $y > x$인 실수 $y$가 존재한다. 따라서 (1)은 참이다.

(2) 모든 실수 $x$보다 큰 실수는 존재하지 않는다. 즉 $\forall x$: $y > x$를 만족시키는 $y$가 존재하지 않는다. 따라서 (2)는 거짓이다. □

같은 종류의 한정기호가 거듭하여 사용된 경우에는 그 순서가 바뀌어도 의미가 변하지 않는 경우가 많다. 이를테면 대상 영역이 실수 전체의 집합일 때 다음과 같은 두 존재명제

$$\exists x\ \exists y : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$\exists y\ \exists x : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

는 모두 참이다. 왜냐면 $x=1$, $y=2$를 대입하면 등식이 성립하기 때문이다. 또한 다음과 같은 두 전칭명제

$$\forall x\ \forall y : x^2 + (y+2)^2 \geq 0$$

$$\forall y\ \forall x : x^2 + (y+2)^2 \geq 0$$

도 모두 참이다. 임의의 실수를 제곱하면 0 이상인 실수가 되며, 0 이상인 두 실수를 더하면 0 이상인 실수가 되기 때문이다.

거듭 표시된 한정기호는 가장 오른쪽에 있는 것의 우선순위가 가장 높다. 이를테면 $\forall x\ \exists y : y = f(x)$라고 표현된 한정명제는 $\forall x : [\exists y : (y = f(x))]$으로 표현된 한정명제와 동치이다.

대상 영역의 원소 $x$ 중에서 명제함수 $p(x)$를 만족시키는 $x$가 단 하나만 존재할 때, '$p(x)$인 $x$는 **유일하다**'라고 표현한다. 이것을 논리적으로 정의하면 다음과 같다.

**정의 3.** 대상 영역이 $U$일 때 명제함수 $p(x)$가 두 조건

(ⅰ) $\exists x \in U : p(x)$,

(ⅱ) $p(x_1) \wedge p(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

를 모두 만족시키면 '$U$에서 $p(x)$를 만족시키는 $x$는 **유일하다**'라고 말한다. 기호로는 $\exists ! x : p(x)$로 나타낸다.

**예제 8.** 대상 영역이 자연수 전체일 때, 다음 한정명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 명제함수 $p(x) \equiv (x^2 < 3)$이 참이 되게 하는 $x$는 유일하다.

(2) $\exists ! x$ : 「$x^2+2x+1=0$」

(3) $\forall x \ \exists ! y : (y=2^x)$

(4) $\forall x \ \exists ! y$ : ($x$는 $y$로 나누어 떨어진다)

**풀이** (1) 제곱했을 때 3보다 작은 자연수는 1밖에 없으므로 참이다.

(2) 식 $x^2+2x+1=0$를 변형시키면 $(x+1)^2=0$이다. 이 등식을 만족시키는 실수는 $x=-1$밖에 없다. 그런데 $-1$은 자연수가 아니므로 대상 영역에서 주어진 명제함수가 참이 되게 하는 $x$는 없다. 따라서 거짓이다.

(3) 주어진 $x$가 자연수일 때 $2^x$의 값은 하나의 자연수로 결정되므로 참이다.

(4) $x=1$일 때에는 1의 약수는 1밖에 없으므로 주어진 명제의 뒷부분, 즉

$\exists ! y$ : ($x$는 $y$로 나누어 떨어진다) (*)

는 참이 된다. 그러나 $x \geq 2$일 때에는 $x$의 약수가 두 개 이상 존재하므로 (*)의 뒷부분이 거짓이 된다. 즉 (*)이 모든 $x$에 대하여 성립하는 것이 아니므로 문제에서 주어진 명제는 거짓이다. □

**문제 9.** 모든 실수가 대상 영역인 명제「방정식 $x^2-3x+2=0$에는 해가 존재한다」를 한정기호를 사용하여 표현하시오.

**문제** **10.** 다음 명제의 부정을 구하시오. (참, 거짓을 판별하라는 문제가 아님.)

(1) 모든 뱀은 파충류이다.
(2) 말 중에는 온순한 것도 있다.
(3) 수학자 중에는 사교적인 사람이 있다.
(4) 모든 강아지는 매력이 있거나 똑똑하다.
(5) 귀엽지 않은 아기는 없다.

**문제** **11.** 위 문제 10의 각 명제에서 생각할 수 있는 대상영역을 말하시오.

※ 다음 각 논증을 연역적 방법으로 증명하시오. (12~13)

**문제** **12.** 미정이나 소라가 반장에 당선되면 영민이와 보람이가 손을 흔들 것이다. 보람이가 손을 흔들지 않는다. 따라서 소라가 반장에 당선되지 않았다.

**문제** **13.** 내가 이 과목을 신청하여 열심히 공부한다면 좋은 학점을 받을 것이다. 내가 좋은 학점을 받으면 행복할 것이다. 나는 행복하지 않다. 그러므로 나는 이 과목을 신청하지 않았거나 열심히 공부하지 않았다.

# IV 집합의 논리적 이해

이 단원에서는 집합의 관계와 연산을 논리적으로 정의하고, 그 성질을 증명하는 방법을 살펴보자.

> **정의 1.** $A$와 $B$가 집합이라고 하자. 만약 $A$의 원소가 모두 $B$에 포함되면, 즉 $a \in A \Rightarrow a \in B$가 성립하면 $A$를 $B$의 **부분집합**(subset)이라고 부르고 $B$를 $A$의 **초집합**(superset)이라고 부른다. 이것을 기호로는 $A \subseteq B$ 또는 $B \supseteq A$로 나타낸다.

**예제** **1.** 집합 $S = \{a, b, c\}$의 부분집합을 모두 구하시오. (단, $a \neq b \neq c \neq a$.)

**풀이** 각각의 원소가 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 생각하면 모두 $2^3 = 8$가지 경우가 나온다. 따라서 $S$의 부분집합은 8개이며 이것을 나열하면 다음과 같다.

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S \qquad \square$$

두 집합 $A$와 $B$에 대하여 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$가 성립하면 '두 집합 $A$와 $B$는 **동치**이다' 또는 간단하게 '두 집합이 **같다**'라고 하며 $A = B$로 나타낸다.

집합 $S$에 대하여 $A \subseteq S$이면서 $A \neq S$인 집합 $A$를 $S$의 **진부분집합**이라고 부른다. 이를테면 집합 $S = \{a, b, c\}$의 진부분집합을 모두 구하면

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

이다. $A$가 $S$의 진부분집합일 때 $A \subsetneq B$라고 나타낸다. 책에 따라서는 부분집합의 기호와 진부분집합의 기호를 혼용하여 사용하기도 한다.

> **정리 1.** 임의의 집합 $A$에 대하여 $\varnothing \subseteq A$이다.

**증명** 정리를 증명하기 위해서는 임의의 집합 $A$에 대하여 $a \in \varnothing \rightarrow a \in A$가 참임을 보이면 된다. 그런데 공집합은 어떠한 원소도 포함하고 있지 않으므로 $a \in \varnothing$는 항상 거짓이다. 가정이 거짓이므로 결론에 상관없이 본 명제는 항상 참이다. □

> **정의 2.** 집합 $A$의 부분집합을 모두 모아놓은 집합을 $A$의 **멱집합**(power set)이라고 부르며 $\wp(A)$로 나타낸다.

**예제 2.** $A = \{1, 2\}$일 때 $\wp(A)$를 구하시오.

**풀이** $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ □

**예제 3.** 공집합 $\varnothing$에 대하여 $\wp(\wp(\varnothing))$를 구하시오.

**풀이** $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\wp(\wp(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. □

> **정의 3.** 두 집합 $A$와 $B$에 대하여 다음과 같이 정의한다.
> (1) 합집합 : $A \cup B = \{x \in U | x \in A \ \vee \ x \in B\}$
> (2) 교집합 : $A \cap B = \{x \in U | x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
> (3) 차집합 : $A \setminus B = \{x \in U | x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

합집합의 정의에 의하여 $n(A) + n(B) \geq n(A \cup B)$임을 알 수 있다. 예컨대 두 집합

$$A = \{1, 2, 3\}, \ B = \{2, 4, 6\}$$

의 합집합을 구하면 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$이다. (뒷장 계속)

따라서 $n(A)+n(B)=6$이지만 합집합의 원소의 개수인 $n(A\cup B)=5$이므로 서로 같지 않다. 그런데 앞의 두 집합의 교집합을 구하면 $A\cap B=\{3\}$이 되어 각각의 원소의 개수를 더한 값에서 합집합의 원소의 개수를 뺀 것과 일치함을 알 수 있다. 즉,

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

이다. 만약에 두 집합이 공통원소를 갖고 있지 않으면 두 집합의 교집합은 공집합이 된다. 이를테면 두 유한집합 $X$, $Y$에 대하여 $X\cap Y=\varnothing$이면

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)$$

가 성립한다. 이와 같이 두 집합이 공통원소를 갖지 않을 때, 즉 두 집합의 교집합이 공집합이 될 때 '두 집합은 **서로소**(relative prime)이다'라고 말한다.

**정의 4.** 전체집합 $U$와 그 부분집합 $A$에 대하여, $A$의 **여집합**은 $A$에 속하지 않는 원소를 모두 모은 집합으로 정의하며 $A^c$로 나타낸다. 즉, $A^c=U\setminus A$이다.

원소 $x$가 $A\cap B^c$에 속한다고 가정하고 이를 전개해보면

$$x\in A\cap B^c \Leftrightarrow (x\in A \ \wedge\ x\in B^c) \Leftrightarrow (x\in A \ \wedge\ x\notin B) \Leftrightarrow x\in A\setminus B$$

가 된다. 따라서 $A\setminus B=A\cap B^c$임을 알 수 있다.

**정리 2.** 집합 $A$, $B$, $C$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A\cup A=A$ (멱등법칙)

(2) $A\cap A=A$ (멱등법칙)

(3) $A\cup B=B\cup A$ (교환법칙)

(4) $A\cap B=B\cap A$ (교환법칙)

(5) $A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (결합법칙)

(6) $A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (결합법칙)

(7) $A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$ (분배법칙)

(8) $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$ (분배법칙)

**증명** (1) $x\in A\cup A \Leftrightarrow (x\in A \ \vee\ x\in A) \Leftrightarrow x\in A$.

(2) $x\in A\cap A \Leftrightarrow (x\in A \ \wedge\ x\in A) \Leftrightarrow x\in A$.

(3) $x\in A\cup B \Leftrightarrow (x\in A \ \vee\ x\in B) \Leftrightarrow (x\in B \vee x\in A) \Leftrightarrow x\in B\cup A$.

(4) $x\in A\cap B \Leftrightarrow (x\in A \ \wedge\ x\in B) \Leftrightarrow (x\in B \wedge x\in A) \Leftrightarrow x\in B\cap A$.

(5) $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B \cup C)$
$\Leftrightarrow [x \in A \ \vee \ (x \in B \ \vee \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \vee \ x \in C]$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B \ \vee \ x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C.$

(6) $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B \cap C)$
$\Leftrightarrow [x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C]$
$\Leftrightarrow (x \in A \cap B \ \vee \ x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C.$

(7) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B \cap C)$
$\Leftrightarrow [x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(8) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C)$
$\Leftrightarrow [x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C)]$
$\Leftrightarrow (x \in A \cap B \ \vee \ x \in A \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$ □

**정리 3.** 집합 $A$, $B$와 전체집합 $U$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \cup \varnothing = A$ (2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $A \cap A^c = \varnothing$ (4) $(A^c)^c = A$

(5) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

여기서 (5)와 (6)을 **드 모르간의 법칙**이라고 부른다.

**증명** (1) $x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in \varnothing) \Leftrightarrow x \in A.$

(2) $x \in A \cap \varnothing \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in \varnothing) \Leftrightarrow x \in A.$

(3) $x \in A \cap A^c \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin A) \Leftrightarrow c.$

(4) $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow \ \sim (x \notin A) \Leftrightarrow \ \sim (\sim (x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$

(뒷장 계속)

(5) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B)$
$\Leftrightarrow \sim (x \in A \ \vee \ x \in B)$
$\Leftrightarrow [\sim (x \in A) \ \wedge \ \sim (x \in B)]$
$\Leftrightarrow (x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c)$
$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c.$

(6) $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B)$
$\Leftrightarrow \sim (x \in A \ \wedge \ x \in B)$
$\Leftrightarrow [\sim (x \in A) \ \vee \ \sim (x \in B)]$
$\Leftrightarrow (x \in A^c \ \vee \ x \in B^c)$
$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c.$ □

**문제 1.** 다음 집합의 포함관계, 즉 어느 것이 어느 것의 부분집합인지 판별하시오.

(1) $A = \{x \mid x^2 - 8x + 17 = 0\}$
(2) $B = \{2, \ 4, \ 6\}$
(3) $C = \{2k \mid k$는 자연수$\}$
(4) $D = \{6\}$

**문제 2.** 두 집합 $A$와 $B$가 동치일 필요충분조건은 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$임을 보이시오.

**문제 3.** $A$가 집합일 때, $A \subseteq \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$임을 보이시오.

**문제 4.** $A$, $B$, $C$가 집합일 때,

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

가 성립함을 증명하시오.

**문제 5.** 집합 $\{x, \ \{y, \ z\}\}$의 모든 부분집합을 구하시오. (단, $x \neq y \neq z \neq x$)

**문제 6.** $A$, $B$, $C$가 집합일 때, 다음을 증명하시오.

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

(2) $[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

(3) $[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$

(4) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

(5) $A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow (B \setminus A) \cup B = A$

**문제 7.** 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오. 그것이 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 드시오.

(1) $[x \in A$이고 $A \in B]$이면 $x \in B$이다.

(2) $[A \subseteq B$이고 $B \in C]$이면 $A \in C$이다.

(3) $[A \not\subseteq B$이고 $B \subseteq C]$이면 $A \not\subseteq C$이다.

(4) $[A \not\subseteq B$이고 $B \not\subseteq C]$이면 $A \not\subseteq C$이다.

(5) $[x \in A$이고 $A \not\subseteq B]$이면 $x \notin B$이다.

(6) $[A \subseteq B$이고 $x \notin B]$이면 $x \notin A$이다.

# V 자연수의 성질

## 가. 자연수의 정의

자연수를 만드는 방법은 여러 가지가 있다. 여기서는 집합을 이용하여 자연수를 만들어 보자. 0 이상의 정수는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
&0=\varnothing, \\
&1=0\cup\{0\}=\{0\}, \\
&2=1\cup\{1\}=\{0,\ 1\}, \\
&3=2\cup\{2\}=\{0,\ 1,\ 2\}, \\
&4=3\cup\{3\}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \\
&5=4\cup\{4\}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}, \\
&\quad\vdots \\
&n+1=n\cup\{n\}, \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

이러한 수 0, 1, 2, 3, 4, …를 모두 모은 집합을 $\omega$로 표기한다. 또 $\omega$의 원소 중에서 0을 제외한 것을 모은 집합을 $\mathbb{N}$으로 나타내고 자연수 집합이라고 부른다. 자연수 집합을 논리적으로 정의하면 다음과 같다.

**정의 1.** 두 조건 $1\in X$와 $n\in X \Rightarrow n+1\in X$를 모두 만족시키는 집합 $X$ 중에서 가장 작은 것을 **자연수 집합**이라고 부르며 $\mathbb{N}$으로 나타낸다. 그리고 $\mathbb{N}$의 원소를 **자연수**(natural number)라고 부른다.

자연수 집합의 성질을 증명할 때에는 다음과 같은 수학적 귀납법을 사용할 수 있다.

**정리 1.** 정의역이 자연수 집합인 명제함수 $p$가 두 조건

(ⅰ) $p(1)$은 참이다,

(ⅱ) $p(k)$가 참일 때마다 $p(k+1)$도 참이 된다

를 모두 만족시키면, 모든 자연수 $n$에 대하여 $p(n)$은 참이다.

**증명** 명제함수 $p$의 진리집합을 $T$라고 하자. 즉

$$T=\{n\in\mathbb{N}\mid p(n)\text{은 참이다}\}$$

라고 하자.

(뒷장 계속)

먼저 조건 (ⅰ)에 의하여 $1 \in T$이다. 또한 $k \in T$라고 하면 조건 (ⅱ)에 의하여 $k+1 \in T$가 된다. 즉 집합 $T$는 두 명제 $1 \in T$와 $k \in T \Rightarrow k+1 \in T$가 참이 되도록 하는 집합이다. 이 두 명제를 참이 되도록 하는 집합 중 가장 작은 집합이 자연수 집합이므로 $\mathbb{N} \subseteq T$이다. 한편 $T$의 모든 원소는 자연수 중에서 모은 것이므로 $T \subseteq \mathbb{N}$이다. 따라서 $T = \mathbb{N}$이므로 모든 자연수 $n$에 대하여 $p(n)$은 참이다. □

## 나. 자연수의 덧셈

자연수의 덧셈을 논리적으로 정의해보자.

**정의 2.** 자연수 $m$과 $n$에 대하여 덧셈을 다음과 같이 정의한다.
(ⅰ) $n+1 = n \cup \{n\}$,
(ⅱ) $m+(n+1) = (m+n)+1$.

덧셈의 정의를 이용하여 덧셈의 다양한 성질을 증명할 수 있다.

**예제 1.** 다음을 증명하시오.
(1) $1+1=2$ (2) $3+2=5$

**증명** (1) $1+1 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,\ 1\} = 2$.
(2) $3+2 = 3+(1+1) = (3+1)+1 = (3 \cup \{3\})+1 = (\{0,\ 1,\ 2\} \cup \{3\})+1$
$= \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}+1 = 4+1 = 4 \cup \{4\}$
$= \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} \cup \{4\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} = 5$. □

자연수의 덧셈과 관련된 성질을 논리적으로 증명할 수 있다.

**정리 2.** 덧셈은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.
(1) 임의의 세 자연수 $m,\ n,\ p$에 대하여 $(m+n)+p = m+(n+p)$이다. (덧셈의 결합법칙)
(2) 임의의 자연수 $n$에 대하여 $n+1 = 1+n$이다. ((3)을 위한 보조정리)
(3) 임의의 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m+n = n+m$이다. (덧셈의 교환법칙)
(4) 세 자연수 $m,\ n,\ p$에 대하여 $m+p = n+p$이면 $m = n$이다. (덧셈의 소거법칙)

**증명** (1) $m$과 $n$이 임의의 자연수라고 하자. 먼저 덧셈의 정의에 의하여

$$(m+n)+1=m+(n+1)$$

이므로 $p=1$일 때에는 참이다. 이제 $p=k$일 때 $(m+n)+p=m+(n+p)$가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(m+n)+(k+1)&=((m+n)+k)+1\\&=(m+(n+k))+1\\&=m+((n+k)+1)\\&=m+(n+(k+1))\end{aligned}$$

이므로 $p=k+1$일 때에도 참이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 $p$에 대하여 참이다.

(2) 먼저 $n=1$일 때

$$n+1=1+1=1+n$$

이므로 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 그러면

$$(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1)$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 참이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 $n$에 대하여 참이다.

(3) $m$이 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$m+1=1+m$$

이므로 $n=1$일 때 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $m+k=k+m$이라고 가정하자. 그러면

$$m+(k+1)=(m+k)+1=1+(m+k)=1+(k+m)=(1+k)+m=(k+1)+m$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 참이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 $n$에 대하여 참이다.

(4) $m$과 $n$이 임의의 자연수라고 하자. 먼저 $m+1=n+1$이라고 가정하자. 그러면

$$m\cup\{m\}=m+1=n+1=n\cup\{n\}$$

이다. 즉 $m$은 $n\cup\{n\}$의 원소이므로 $m\in n$이거나 $m=n$이다. 같은 방법으로 생각하면 $n$은 $m\cup\{m\}$의 원소이므로 $n\in m$이거나 $n=m$이다. 만약 $m\in n$이면 $n\notin m$이고 $n\neq m$이므로 $m\in n$이 될 수 없다. 따라서 $m=n$이다. □

## 다. 자연수의 곱셈

이번에는 자연수의 곱셈을 논리적으로 정의해보자.

> **정의 3.** 자연수 $m$과 $n$에 대하여 곱셈을 다음과 같이 정의한다.
> (ⅰ) $n \times 1 = n$,
> (ⅱ) $m \times (n+1) = (m \times n) + m$.

문자와 수 사이의 곱셈 기호, 문자와 문자 사이의 곱셈기호는 생략한다. 따라서 위 정의는 다음과 같이 쓸 수 있다.

(ⅰ) $n1 = n$
(ⅱ) $m(n+1) = (mn) + m$

이제 곱셈의 정의를 이용하여 곱셈의 다양한 성질을 증명해 보자.

**예제 2.** 다음을 증명하시오. (단, 덧셈의 증명 과정은 생략할 것.)

(1) $1 \times 1 = 1$　　(2) $5 \times 2 = 10$
(3) $5 \times 3 = 15$　　(4) $5 \times 4 = 20$

**증명** (1) 자연수의 곱셈의 정의에 의하여 당연하다.
즉 곱셈의 정의 (ⅰ)에서 $n = 1$로 두면 $1 \times 1 = n \times 1 = n = 1$이다.
(2) $5 \times 2 = 5 \times (1+1) = (5 \times 1) + 5 = 5 + 5 = 10$.
(3) $5 \times 3 = 5 \times (2+1) = (5 \times 2) + 5 = 10 + 5 = 15$.
(4) $5 \times 4 = 5 \times (3+1) = (5 \times 3) + 5 = 15 + 5 = 20$. □

자연수의 덧셈의 성질을 논리적으로 증명한 것처럼, 자연수의 곱셈의 성질도 논리적으로 증명할 수 있다.

> **정리 3.** 곱셈은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.
> (1) 임의의 세 자연수 $m$, $n$, $p$에 대하여 $(m+n)p = mp + np$이다. (우분배법칙)
> (2) 임의의 자연수 $n$에 대하여 $1n = n$이다. ((3)을 위한 보조정리)
> (3) 임의의 세 자연수 $m$, $n$, $p$에 대하여 $(mn)p = m(np)$이다. (곱셈의 결합법칙)
> (4) 임의의 자연수 $m$, $n$에 대하여 $mn = nm$이다. (곱셈의 교환법칙)
> (5) 임의의 자연수 $m$, $n$, $p$에 대하여 $p(m+n) = pm + pn$이다. (좌분배법칙)

**증명** (1) $m$과 $n$이 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$(m+n)1 = m+n = m1+n1$$

이므로 $p=1$일 때 참이다. 이제 $p=k$일 때 참이라고 가정하자.
즉 $(m+n)k = mk+nk$라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(m+n)(k+1) &= (m+n)k+(m+n)\\ &= (mk+nk)+(m+n)\\ &= ((mk+nk)+m)+n\\ &= (mk+(nk+m))+n\\ &= (mk+(m+nk))+n\\ &= ((mk+m)+nk)+n\\ &= (mk+m)+(nk+n)\\ &= m(k+1)+n(k+1)\end{aligned}$$

이므로 $p=k+1$일 때에도 참이다.

(2) 먼저 $n=1$일 때 $1n = 1\times 1 = 1 = n$이므로 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $1k=k$라고 가정하자. 그러면

$$1(k+1) = 1k+1 = k+1$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 참이다.

(3) $n$과 $p$가 임의의 자연수라고 하자. 먼저

$$1(mn) = mn = (1m)n$$

이므로 $m=1$일 때 참이다. 이제 $m=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $(kn)p = k(np)$라고 가정하자. 그러면

$$((k+1)n)p = (kn+1n)p = (kn)p+(1n)p = k(np)+1(np) = (k+1)(np)$$

이므로 $m=k+1$일 때에도 참이다.

(4) $n$이 임의의 자연수라고 하자. 그러면

$$1n = n = n1$$

이므로 $m=1$일 때 참이다. 이제 $m=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉 $kn = nk$라고 가정하자. 그러면

$$(k+1)n = kn+1n = nk+n1 = nk+n = n(k+1)$$

이므로 $m=k+1$일 때에도 참이다.

(5) 앞에서 증명한 (1)과 (4)를 결합하면 (5)를 얻는다. □

## 라. 자연수의 순서

자연수는 크기를 비교할 수 있다. 즉 두 자연수 $m$, $n$에 대하여

$$m < n \text{ 또는 } m = n \text{ 또는 } m > n$$

중 하나가 성립한다. 이 절에서는 자연수의 순서를 논리적으로 정의하고 그 성질을 살펴보자.

> **정의 4.** 집합 $\omega$에서 순서관계 $<$와 $\leq$를 다음과 같이 정의한다.
> (1) $\omega$의 원소 $m$, $n$에 대하여 $m \in n$일 때 '$m$보다 $n$이 크다'라고 말하고 이것을 $m < n$으로 나타낸다.
> (2) $\omega$의 원소 $m$, $n$에 대하여 '$m < n$ 또는 $m = n$'인 것을 $m \leq n$으로 나타낸다.

**예제 3.** 다음을 증명하시오.

(1) $0 < 1$

(2) $1 < 3$

(3) 임의의 자연수 $n$에 대하여 $0 < n$이다.

**증명** (1) $0 = \varnothing \in \{\varnothing\} = 1$이므로 $0 < 1$이다.

(2) $1 \in \{0, 1, 2\} = 3$이므로 $1 < 3$이다.

(3) 먼저 $0 < 1$이므로 $n = 1$일 때에는 참이다. $n = k$일 때 $0 < n$이라고 가정하면

$$0 \in k \subseteq k \cup \{k\} = k + 1$$

이므로 $n = k + 1$일 때에도 $0 < n$이다. □

> **정리 4.** 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m \in n$이면 $m \subseteq n$이다.

**증명** $n = 1$일 때는 참이다. 왜냐하면 $n = 1 = \{\varnothing\}$이므로 어떠한 자연수 $m$에 대해서도 $m \in n$이 될 수 없다. 따라서 $m \in n \rightarrow m \subseteq n$의 가정이 모순이므로 결론에 상관없이 이 명제는 참이다.

이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 그리고 $m \in (k+1)$이라고 하자.
그러면 $m \in k \cup \{k\}$이다. 따라서

$$m \in k \text{ 또는 } m = k$$

이다. 그런데 $m \in k$이면 $m \subseteq k$이다. 따라서 위 명제는

$$m \subseteq k \text{ 또는 } m = k$$

가 된다. 따라서 $m \subseteq k \cup \{k\} = k + 1$이므로 $n = k + 1$일 때에도 참이다. □

**정리 5.** 자연수의 순서관계는 다음과 같은 성질을 가진다.
(1) 자연수 $m$, $n$, $p$에 대하여 $m<n$이고 $n<p$이면 $m<p$이다.
(2) 임의의 자연수 $n$에 대하여 $1 \le n$이다.
(3) 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m<n$이면, $m+1=n$이거나 $m+1<n$이다.
(4) 임의의 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m<n$ 또는 $m=n$ 또는 $n<m$이 성립한다.

**증명** (1) $m<n$이고 $n<p$라고 가정하자. $m<n$이므로 $m \in n$이다. $n<p$이므로 $n \in p$이고 정리 4에 의하여 $n \subseteq p$가 된다. 즉 $m \in n \subseteq p$이므로 $m \in p$이다. 따라서 $m<p$이다.

(2) 먼저 $1 \le 1$이므로 $n=1$일 때 참이다. 이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉
$$1<k \text{ 또는 } 1=k$$
가 성립한다고 가정하자. 이것은 $1 \in k$ 또는 $1=k$가 성립한다는 것을 의미한다. 그런데 $k \subseteq k+1$이므로 위 명제에 의하여 $1 \in k+1$이 성립한다. 즉 $1<k+1$이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 참이다.

(3) 먼저 $n=1$일 때에는 참이다. 왜냐하면 $m<n$인 자연수 $m$이 존재하기 때문에
$$(m<n) \to (m+1=n \ \lor \ m+1<n)$$
의 가정이 거짓이 되어, 결론에 상관없이 이 명제는 참이다.

이제 $n=k$일 때 참이라고 가정하자. 즉
$$(m<k) \Rightarrow (m+1=k \ \lor \ m+1<k)$$
가 성립한다고 가정하자. 이것은
$$(m \in k) \Rightarrow (m+1=k \ \lor \ m+1 \in k)$$
으로 쓸 수 있다. 위 명제를 이용하면
$$\begin{aligned} m \in k+1 &\Rightarrow m \in k \cup \{k\} \\ &\Rightarrow m \in k \ \lor \ m=k \\ &\Rightarrow (m+1 \in k \ \lor \ m+1=k) \ \lor \ m=k \qquad (*) \end{aligned}$$
를 얻는다. 한편
$$\begin{aligned} m=k \Rightarrow m+1=m \cup \{m\}=k \cup \{k\}=k+1, \\ k \in k+1, \\ k \subseteq k+1 \end{aligned}$$
이므로 (*)은 다음과 같이 쓸 수 있다.
$$m \in k+1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (m+1 \in k+1 \ \lor \ m+1=k+1) \ \lor \ m+1=k+1$$

이것은

$$m < k+1 \Rightarrow (m+1 < k+1 \ \vee \ m+1 = k+1)$$

을 의미한다. 따라서 $n = k+1$일 때에도 참이다.

(4) $m$이 임의로 주어진 자연수라고 하자. 먼저 $1 < m$ 또는 $m = 1$이 성립하므로 $n = 1$일 때에는 참이다. 이제 $n = k$일 때 참이라고 가정하자. 즉

$$m < k \quad \text{또는} \quad m = k \quad \text{또는} \quad k < m$$

중 하나가 성립한다고 가정하자. 그러면

$m < k$이면 $m < k+1$,
$m = k$이면 $m < k+1$,
$k < m$이면 $k+1 = m$ 또는 $k+1 < m$

이므로 $m < k+1$ 또는 $m = k+1$ 또는 $k+1 < m$중 하나가 성립한다.
따라서 $n = k+1$일 때에도 참이다. □

# 참고문헌

[1] 노영순(2019), 『집합론』, 도서출판보성.
[2] Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach(2011) 『A History of Mathematics』, John Wiley & Sons.
[3] Charles C. Pinter(2014), 『A Book of Set Theory』, Courier Corporation.
[4] You-Feng Lin(1999), 『Set Theory An Intuitive Approach』, Houghton Mifflin.