다항함수의 그래프와 도형의 넓이

대수와 기하의 만남 9

2019학년도 영재수업

학습목표

다항함수의 그래프와 x축 사이의 넓이를 구할 수 있다.

그래프로 표현된 도형의 넓이를 적분 기호로 나타낼 수 있다.

미적분의 기본정리를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

$a \le x \le b$일 때 함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있다고 하자.
이때 $a \le x \le b$의 범위에서 $y = f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이를

$$\int_a^b f(x)dx$$

로 나타낸다. (단, $a \le b$)

또한 $a > b$일 때에는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

문제 1. 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\ dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x^2\ dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3 x^2\ dx$

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

$a \le x \le b$일 때 $y = f(x)$의 그래프 중에서 x축보다 위쪽에 있는 부분과 x축 사이의 넓이를 S_1, 그래프 중에서 x축보다 아래쪽에 있는 부분과 x축 사이의 넓이를 S_2라고 하자.

이때 $S_1 - S_2$의 값을

$$\int_a^b f(x)dx$$

로 나타낸다. (단, $a \le b$)

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

문제 2. 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x\ dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\ dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{4} x^4\ dx$

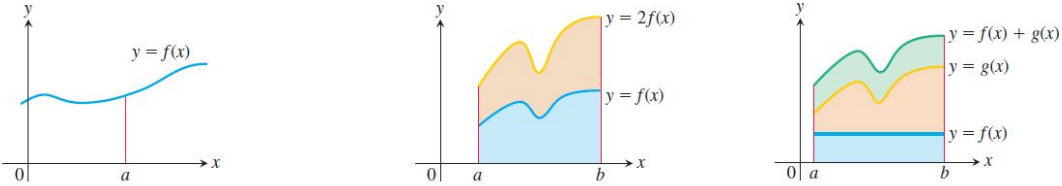
(4) $\displaystyle\int_{-2}^{4} x^5\ dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^4\ dx$

(6) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^5\ dx$

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

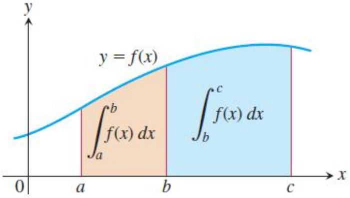
다음 그림을 보고 적분의 성질을 추측해보자. (1)



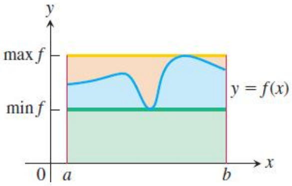
(a) *Zero Width Interval:* (b) *Constant Multiple:* $(k = 2)$ (c) *Sum: (areas add)*

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

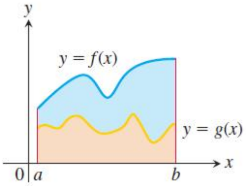
다음 그림을 보고 적분의 성질을 추측해보자. (2)



(d) *Additivity for Definite Integrals:*



(e) *Max-Min Inequality:*



(f) *Domination:*

다항함수의 그래프로 표현된 도형의 넓이

함수 f가 다항함수라고 하자. 이때 $F'(x) = f(x)$를 만족시키는 함수 F에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

즉 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 것은 함수의 그래프의 기울기를 구하는 것과는 반대의 과정으로 계산할 수 있다. 이 공식을 **미적분의 기본정리**라고 부른다.

다항함수의 그래프로 표현된 도형의 넓이

문제 3. 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{4} x^4\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(x^2 - x + 1\right)dx$

(5) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \left(x^3 - x - 3\right)dx$

다항함수의 그래프로 표현된 도형의 넓이

문제 4. 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(t^2 - 2t + 1\right) dt$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (s-1)^2\, ds$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)\left(x^2 + x + 1\right) dx$

다항함수의 그래프로 표현된 도형의 넓이

문제 5. 직선 $y = x - 1$과 곡선 $y = x^2 - 2x - 1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

문제 6. 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2이다. 이 사실을 이용하여 반지름이 r인 구의 부피 공식을 만드시오.

문제 7. 다음을 구하시오.

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x-1} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{t-1} dt$$