

그래프의 기울기

대수와 기하의 만남 6

2019학년도 영재수업

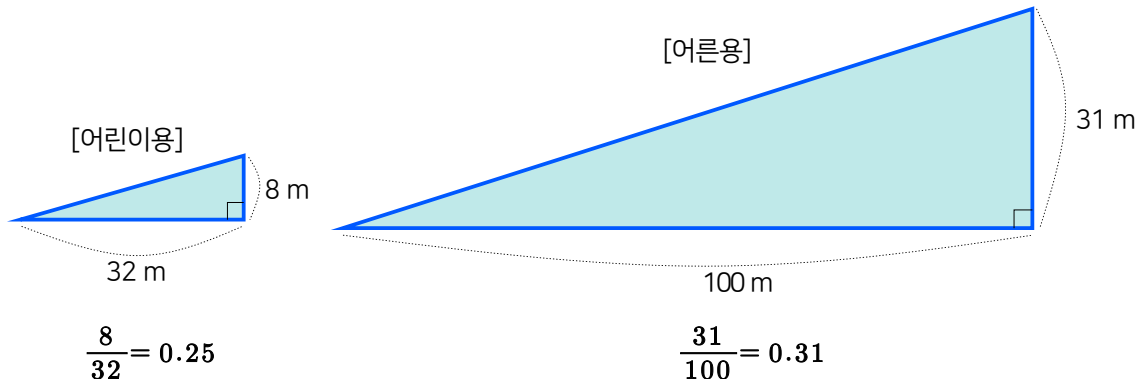
학습목표

기울기의 뜻을 설명하고 일차함수의 그래프의 기울기를 구할 수 있다.

다항함수의 그래프의 기울기를 구하고 그 과정을 설명할 수 있다.

기울기란?

두 눈썰매장의 가파른 정도를 비교해보자.



$$\therefore (\text{기울기}) = \frac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$$

증가량과 기울기

x 의 값이 a 에서 b 까지 증가할 때

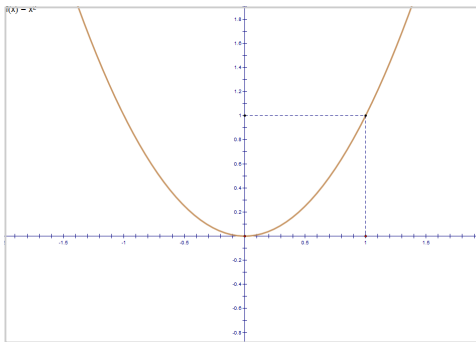
$$\frac{\text{(함숫값의 증가량)}}{\text{(}x\text{값의 증가량)}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

를 함수의 **평균변화율** 또는 그래프의 **평균기울기**라고 부른다. (단, $a \neq b$ 일 때.)

만약 b 가 a 에 한없이 가까이 다가갈 때 함수의 평균변화율이 하나의 값 L 에 한없이 가까이 다가가면, 그 값 L 을 함수의 **순간변화율** 또는 그래프의 **순간기울기**라고 부른다.

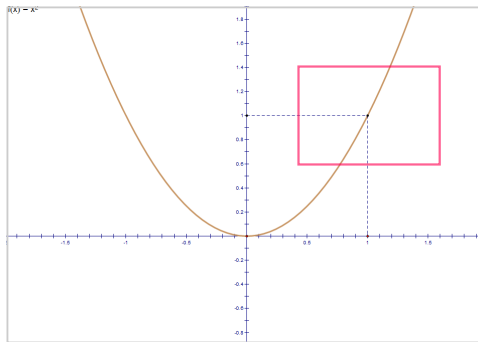
그래프의 순간기울기를 간단하게 한 점에서의 **그래프의 기울기**라고 부른다.

증가량과 기울기



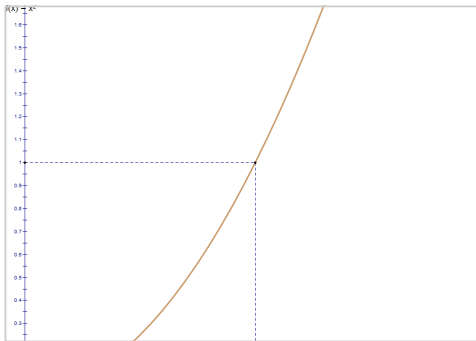
이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기



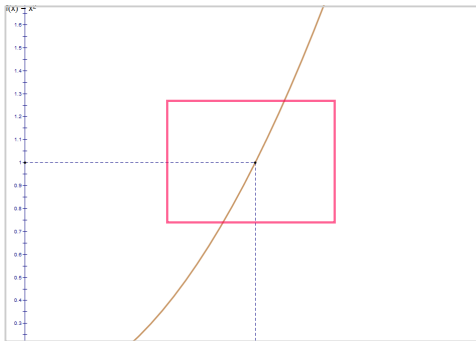
이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기



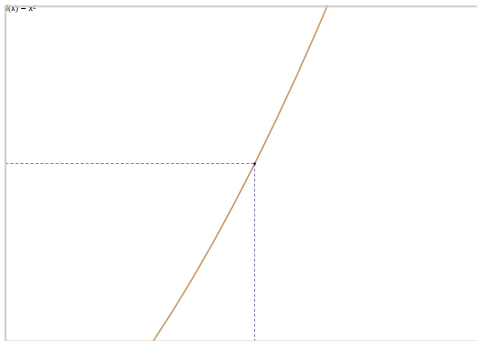
점 (1, 1) 근처에서 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기



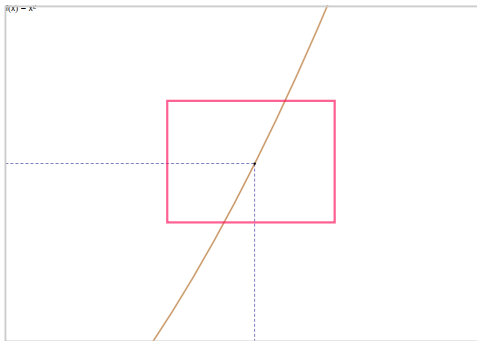
점 (1, 1) 근처에서 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기



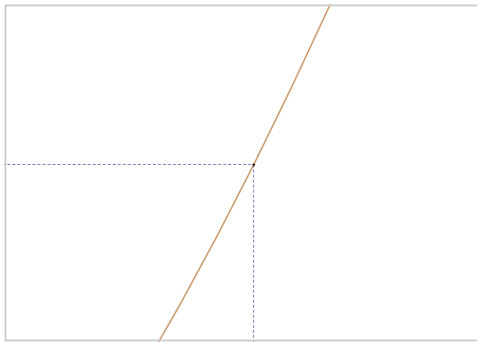
점 $(1, 1)$ 근처에서 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기



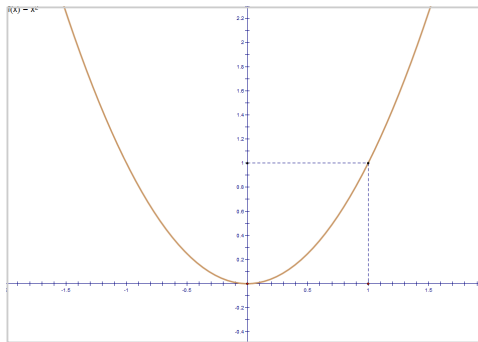
점 $(1, 1)$ 근처에서 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프

증가량과 기울기

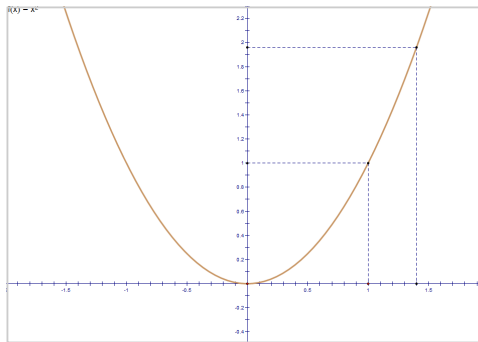


점 $(1, 1)$ 근처에서 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프
거의 직선에 가깝다!

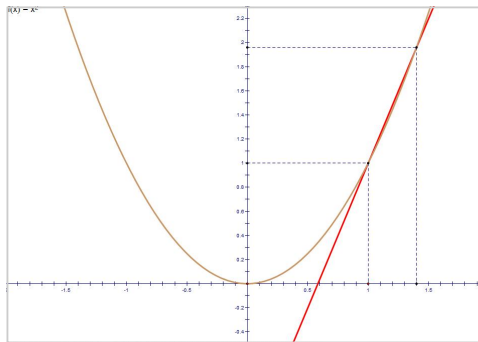
증가량과 기울기



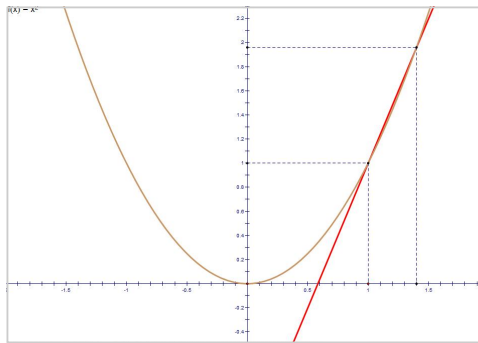
증가량과 기울기



증가량과 기울기

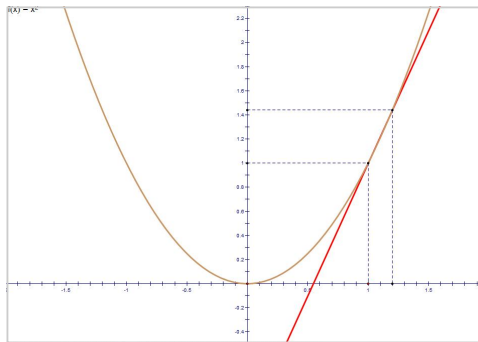


증가량과 기울기



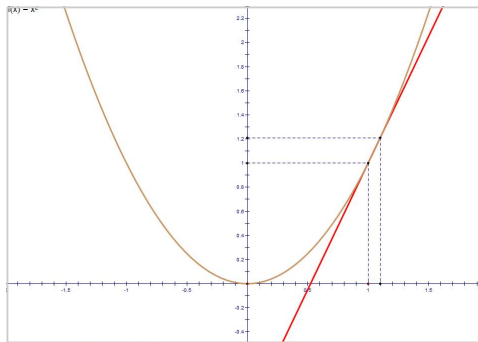
(할선의 기울기) = 2.4

증가량과 기울기



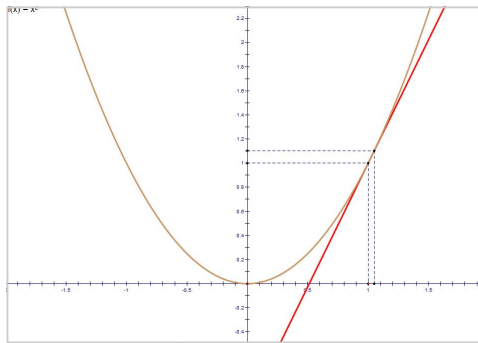
(할선의 기울기) = 2.2

증가량과 기울기



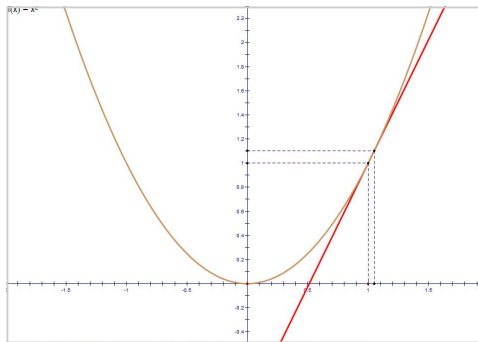
(할선의 기울기) = 2.1

증가량과 기울기



(할선의 기울기) = 2.05

증가량과 기울기



두 점이 한없이 서로 가까워지면 할선의 기울기는 어떻게 될까?

증가량과 기울기

문제 1. 이차함수 $y = x^2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) x 가 1에서 3까지 증가할 때 y 의 증가량을 구하시오.

(2) x 가 1부터 4까지 증가할 때 y 의 증가량을 구하시오.

(3) x 가 1부터 b 까지 증가할 때 y 의 증가량을 구하시오.

(4) x 가 1부터 b 까지 증가할 때 $\frac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$ 을 구하시오.

(5) $x = 1$ 일 때 $y = x^2$ 의 그래프의 기울기를 구하시오.

증가량과 기울기

문제 2. 이차함수 $y = x^2$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) $x = 0$ 일 때 그래프의 기울기
- (2) $x = 1$ 일 때 그래프의 기울기
- (3) $x = 2$ 일 때 그래프의 기울기
- (4) $x = 3$ 일 때 그래프의 기울기
- (5) $x = t$ 일 때 그래프의 기울기

증가량과 기울기

문제 3. 다음을 구하시오.

(1) $x = t$ 일 때 $y = 2x^2$ 의 그래프의 기울기

(2) $x = t$ 일 때 $y = 3x^2$ 의 그래프의 기울기

(3) $x = t$ 일 때 $y = 4x^2$ 의 그래프의 기울기

(4) $x = t$ 일 때 $y = ax^2$ 의 그래프의 기울기

증가량과 기울기

문제 4. 다음을 구하시오.

(1) $f(x) = x^2$ 이고 $x = 3$ 일 때 $y = f(x)$ 의 그래프의 기울기

(2) $f(x) = 5x^2$ 이고 $x = 2$ 일 때 $y = f(x)$ 의 그래프의 기울기

(3) $g(x) = 3x^2$ 이고 $x = -4$ 일 때 $y = g(x)$ 의 그래프의 기울기

그래프의 기울기

함수 $y = f(x)$ 가 주어졌을 때, $x = t$ 에서 f 의 **그래프의 기울기**를 $f'(t)$ 로 나타낸다.

그래프의 기울기는 접선의 방정식의 일차항의 계수와 같으므로, 그래프의 기울기를 **미분계수**라고 부르기도 한다.

문제 5. $f(x) = 7$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(-1)$

(2) $f'(0)$

(3) $f'(2)$

그래프의 기울기

문제 6. $f(x) = 5x + 7$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(-3)$

(2) $f'(0)$

(3) $f'(2)$

문제 7. $f(x) = x^2$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(-2)$

(2) $f'(0)$

(3) $f'(3)$

문제 8. $f(x) = x^2 + 5x + 7$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(0)$

(2) $f'(1)$

(3) $f'(2)$

(4) $f'(3)$

그래프의 기울기

문제 9. $f(x) = x^3$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(0)$

(3) $f'(2)$

(5) $f'(t)$

(2) $f'(1)$

(4) $f'(3)$

(6) $f'(x)$

그래프의 기울기

문제 10. $f(x) = x^4$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(0)$

(2) $f'(1)$

(3) $f'(2)$

(4) $f'(x)$

문제 11. $f(x) = x^5$ 일 때 다음을 구하시오.

(1) $f'(0)$

(2) $f'(1)$

(3) $f'(2)$

(4) $f'(x)$

그래프의 기울기

다항함수의 그래프의 기울기

- ① $f(x) = x^n$ 일 때 $f'(x) = nx^{n-1}$. (단, x^n 과 x^{n-1} 이 모두 정의될 때)
- ② 다항함수의 그래프의 기울기를 구할 때에는 각각의 항의 그래프의 기울기를 구하여 더하면 된다.

그래프의 기울기

문제 12. 다음 함수 f 에 대하여 $f'(x)$ 를 구하시오.

(1) $f(x) = 2x^5$

(2) $f(x) = -4x^3$

(3) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 4x - 1$

(4) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 5$

그래프의 기울기

문제 13. 다음 함수 F 에 대하여 $F'(x)$ 를 구하시오.

$$(1) F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$(2) F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$(3) F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

그래프의 기울기

문제 14. 다음 물음에 답하시오.

(1) $f'(x) = x^2 + x + 1$ 이 되도록 하는 $f(x)$ 를 구하시오.

(2) $f'(x) = -x^3 + x + 2$ 가 되도록 하는 $f(x)$ 를 구하시오.

(3) $F'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ 이 되도록 하는 $F(x)$ 를 구하시오.

(4) $F'(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ 가 되도록 하는 $F(x)$ 를 구하시오.

그래프의 기울기

문제 15. 다음을 구하시오.

- (1) 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점 $(1, 1)$ 에서 이 그래프에 접하는 접선의 방정식
- (2) 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점 $(-2, 4)$ 에서 이 그래프에 접하는 접선의 방정식
- (3) 함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식
- (4) 함수 $y = -x^2 + 4x - 5$ 의 그래프에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식

그래프의 기울기

문제 16. 공중에서 물체를 가만히 떨어뜨렸을 때 t 초 후 물체의 속력을 구하시오.

(단, 중력가속도는 10 m/s^2 으로 계산하고 공기저항은 없는 것으로 간주한다.)