08. 실해석적 함수

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

8.1 (1) 거짓

(2) 거짓

(3) 참

(4) 참

(5) 참

(6) 거짓 ($\sum x^n$의 수렴구간은 $(-1,\ 1)$이지만 이 구간에서 평등수렴하지는 않는다.)

(7) 참 (정확히 말하면, 수렴구간에 포함되는 닫힌구간에서 리만 적분 가능하다.)

8.2 (1) 참

(2) 참

(3) 참

(4) 참

8.3

	수렴반경	수렴구간
(1)	4	$(-4,\ 4)$
(2)	0	$[0,\ 0]$
(3)	∞	$(-\infty,\ \infty)$
(4)	1	$(-1,\ 1)$
(5)	1	$[-1,\ 1)$
(6)	$1/3$	$[-1/3,\ 1/3]$

8.4 모든 실수

8.5 (1) 모든 실수

(2) 모든 실수

(3) $x<1/2$

8.6 (1) 평등수렴

(2) 점별수렴하지만 평등수렴하지는 않는다.

(3) 평등수렴

(4) 점별수렴하지만 평등수렴하지는 않는다.

(5) 점별수렴하지만 평등수렴하지는 않는다.

(6) 점별수렴하지만 평등수렴하지는 않는다.

8.7 (1) $[e-1,\ e+1]$

(2) $\left[\frac{\pi}{4}-1,\ \frac{\pi}{4}+1\right)$

(3) $\left[-1-\frac{1}{e},\ -1+\frac{1}{e}\right]$

(4) $\left[1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}\right)$

8.8 (1) 기하급수의 성질에 의하여

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+-\cdots$$

이므로 양변을 적분하면

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+-\cdots+C$$

를 얻는다. $x=0$을 대입하면 $C=0$이므로

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+-\cdots$$

이다.

(2) 지수함수 exp 의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}7^x&=e^{x\ln 7}\\&=1+(\ln 7)x+\frac{(\ln 7)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln 7)^3}{3!}x^3+\frac{(\ln 7)^4}{4!}x^4+\cdots\end{aligned}$$

(3) $f_r'(0)=+\infty$이므로 f는 0에서 해석적이지 않다.

(4) $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+-\cdots\right)\\&=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\end{aligned}$$

(5) $f'(x)=\frac{d}{dx}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned}&=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+-\cdots\\&\quad+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\\&=2(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\end{aligned}$$

이므로 양변의 부정적분을 구하면

$$f(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7+\frac{2}{9}x^9+\cdots$$

이다.

(6) $e^{-t^2}=1+(-t^2)+\frac{(-t^2)^2}{2!}+\frac{(-t^2)^3}{3!}+\frac{(-t^2)^4}{4!}+\cdots$

$$=1-t^2+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\frac{t^{10}}{5!}+-\cdots$$

이므로 양변의 부정적분을 구하면

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+-\cdots$$

이다.

(7) $\frac{1}{t^2}(1-\cos t)=\frac{1}{t^2}\left(1-1+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}-\frac{t^8}{8!}+-\cdots\right)$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{t^2}{4!}+\frac{t^4}{6!}-\frac{t^6}{8!}+-\cdots$$

이므로 양변의 부정적분을 구하면

$$f(x)=\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\frac{x^7}{7\cdot 8!}+-\cdots$$

이다.

(8) $2\sin t\cos t=\sin 2t$

$$=2t-\frac{(2t)^3}{3!}+\frac{(2t)^5}{5!}-\frac{(2t)^7}{7!}+\frac{(2t)^9}{9!}-\frac{(2t)^{11}}{11!}+-\cdots$$

이므로 양변의 부정적분을 구하면

$$\sin^2 t=t^2-\frac{2^3t^4}{4!}+\frac{2^5t^6}{6!}-\frac{2^7t^8}{8!}+\frac{2^9t^{10}}{10!}-\frac{2^{11}t^{12}}{12!}+-\cdots$$

이다. 따라서

$$\frac{1}{t^2}\sin^2 t=1-\frac{2^3t^2}{4!}+\frac{2^5t^4}{6!}-\frac{2^7t^6}{8!}+\frac{2^9t^8}{10!}-\frac{2^{11}t^{10}}{12!}+-\cdots$$

이다. 다시 양변의 부정적분을 구하면

$$f(x)=x-\frac{2^3x^3}{3\cdot 4!}+\frac{2^5x^5}{5\cdot 6!}-\frac{2^7x^7}{7\cdot 8!}+\frac{2^9x^9}{9\cdot 10!}-\frac{2^{11}x^{11}}{11\cdot 12!}+-\cdots$$

을 얻는다.

8.9 로그함수의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\ln f(x)=\ln\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$$
$$=\ln(x+1)+\ln(x+2)-\ln(x+3)-\ln(x+4)$$

따라서 양변을 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$$

을 얻는다. 양변에 $f(x)$를 곱하면

$$f'(x)=\frac{2x+3}{(x+3)(x+4)}-\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2(x+4)}-\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)^2}$$

를 얻는다. 물론 이 식을 정리하면 더 간단한 식으로 변형할 수 있다.

8.10 먼저 $1/(1+x^3)$을 부분분수로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)$$

위 식을 x에 대하여 적분하면 다음을 얻는다.

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2/\sqrt{3}}{(2x/\sqrt{3}-1/\sqrt{3})^2+1}dx+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

8.11 등식 $h(x)=[f(x)]^{g(x)}$의 양변에 로그를 취하면

$$\ln h(x)=g(x)\ln f(x)$$

를 얻는다. 양변을 미분하면

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

이므로

$$h'(x)=[f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

를 얻는다.

(다른 방법) 먼저 $f(x)$를 상수로 생각하고 미분하면

$$[f(x)]^{g(x)}\ln f(x)\,g'(x)$$

이다. 다음으로 $g(x)$를 상수로 생각하고 미분하면

$$g(x)[f(x)]^{g(x)-1}f'(x)$$

이다. 두 식을 더하면

$$h'(x)=[f(x)]^{g(x)}\ln f(x)\,g'(x)+g(x)[f(x)]^{g(x)-1}f'(x)$$
$$=[f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

8.12 $\sin^{-1}$와 $\cos^{-1}$의 정의역은 $[-1,\ 1]$이다. 이들 함수는 $(-1,\ 1)$에서 미분 가능하다. $|x|<1$일 때

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

이고 $|x|=1$일 때에는 미분 불가능하다.

8.13 (1) 단순한 계산으로 증명된다.

(2) $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

$\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$,

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

8.14 (1) $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

(2) $(-1,\ 1]$

(3) $[-1,\ 1]$

(4) $(-1,\ 1)$

8.15 우함수의 정의에 의하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)=f(-x)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nx^n$$

이 성립한다. 그런데 함수 f의 거듭제곱급수의 계수열은 유일하므로 임의의 n에 대하여

$$a_n=(-1)^na_n$$

이다. 따라서 n이 홀수일 때에는 $a_n=0$이다.

8.16 문제의 조건에 의하여

$$1=\lim_{n\to\infty} a^{1/n} \le \lim_{n\to\infty} {a_n}^{1/n} \le \lim_{n\to\infty} b^{1/n}=1$$
이므로 조임 정리와 제곱근 판정법에 의하여 수렴반경은 1이다.

8.17 $\epsilon=1/2$이라고 하자. 그리고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. $n=N+1$이라고 하면 $n>N$이다. f_n은 $(0,\ 1]$에서 연속이고 $f_n(1)=1$이므로
$$\lim_{x\to 1-} f_n(x)=1$$
이다. 따라서 $x<1$인 x가 존재하여 $f_n(x)\ge 1/2$이다. 즉
$$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)\ge \frac{1}{2}=\epsilon$$
이므로 $\{f_n\}$은 $(-1,\ 1)$에서 평등수렴하지 않는다.

$I=[a,\ b]$가 $(-1,\ 1)$에 포함되는 공집합 아닌 닫힌구간이라고 하자. $c:=\max\{|a|,\ |b|\}$라고 하자. 그러면 $0<c<1$이므로 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $c^N<\epsilon$을 만족시킨다. $n>N,\ x\in I$라고 하면
$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n|\le c^n<c^N<\epsilon$$
이므로 $\{f_n\}$은 I에서 평등수렴한다.

8.18 삼각함수의 성질에 의하여 다음을 얻는다.
$$\begin{aligned}&\left|\sin\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-\sin x\right|\\ &=\left|2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2^n}-x\right)\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2^n}+x\right)\right|\\ &\le\left|2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|\le 2\left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|=\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

8.19 (1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$
$$\Rightarrow \int\frac{f(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C=\frac{x}{1-x}+C$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{x}{1-x^2}$

(3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$
$$\Rightarrow xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$
$$\Rightarrow [xf(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$
$$\Rightarrow [xf(x)]'=\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)+C_1$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow xf(x)&=-\int \ln(1-x)+C_1\,dx\\ &=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)-C_1x+C_2\end{aligned}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+Ax+B] & \text{if } 0<|x|<1\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$
그런데 f가 0에서 연속이므로 $A=-1,\ B=0$이다.

(4) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$
$$\Rightarrow xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$$
$$\Rightarrow [xf(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$
$$\Rightarrow \frac{[xf(x)]'}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$
$$\Rightarrow \int\frac{[xf(x)]'}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C_1=\frac{x}{1-x}+C_1$$
$$\Rightarrow [xf(x)]'=\frac{x}{(1-x)^2}+C_1x$$
$$\Rightarrow xf(x)=\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}+C_2x^2+C_3$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{x(1-x)}+C_2x+\frac{C_3}{x} & \text{if } 0<|x|<1\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$
그런데 f가 0에서 연속이므로 $C_3=-1$이다.

(5) $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n-1}x^n$
$$\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n-1}x^{n-1}+C_1$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{F(x)}{x^2}=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-2}-\frac{2C_1}{x^3}$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow \int x\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{x^2}\right]dx&=\int\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}-\frac{2C_1}{x^2}\,dx\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}x^n+\frac{2C_1}{x}+C_2\\ &=\frac{x^2}{1-x}+\frac{2C_1}{x}+C_2\end{aligned}$$
$$\Rightarrow x\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{x^2}\right]=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}-\frac{2C_1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{F(x)}{x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}-\frac{2C_1}{x^3}$$
$$\Rightarrow \frac{F(x)}{x^2}=\frac{1}{1-x}-\ln(1-x)+\frac{C_1}{x^2}+C_3$$
$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{1-x}-x^2\ln(1-x)+C_1+C_3x^2$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x)&=F'(x)\\ &=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}-2x\ln(1-x)+\frac{x^2}{1-x}+2C_3+x.\end{aligned}$$
그런데 f가 0에서 연속이므로 $C_3=0$이다.

(6) $f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}n^2x^n=x\sum_{n=3}^{\infty}n^2x^{n-1}$
$$\Rightarrow \int\frac{f(x)}{x}dx=\int\sum_{n=3}^{\infty}n^2x^{n-1}dx$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} nx^n + C_1$$

$$= x\sum_{n=3}^{\infty} nx^{n-1} + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right)dx = \sum_{n=3}^{\infty} x^n + C_1 \ln x + C_2$$

$$= \frac{x^3}{1-x} + C_1 \ln x + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2} + \frac{C_1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{3x^3-2x^4}{(1-x)^2} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{4x^4-11x^3+9x^2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^5-11x^4+9x^3}{(1-x)^3}.$$

8.20 (1) $x=1$일 때 급수가 수렴하므로 아벨의 정리에 의하여 주어진 급수는 $[0,\ 1]$에서 평등수렴한다. 따라서 f는 $[0,\ 1]$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

(2) 비판정법을 이용하면 $n \to \infty$일 때

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n-1)(n+1)!}{n!n} \to \infty$$

이므로 f는 $[0,\ 1]$에서 평등수렴한다. 따라서 연속이다.

$$\frac{f(x)}{x^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{t^2}dt = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1 - x\right)$$

$$= \frac{1}{x}(e^x - 1 - x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1.$$

(다른 방법)

$$f(1) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n!} = 1.$$

(3) 앞에서와 같은 방법으로

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + - \cdots\right) = \frac{1}{4}.$$

(4) 앞에서와 같은 방법으로

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

8.21 문제 8.8-(1)에 의하여

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \cdots$$

이다. 위 급수는 $x=1$일 때 교대급수 판정법에 의하여 수렴하므로 아벨의 정리에 의하여 위 급수는 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수에 평등수렴한다. 따라서 $x=1$을 대입하면

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

을 얻는다.

8.22 $M_n := f_n(b)$라고 하자. 그러면 $\|f_n\| \le M_n$이고 $\sum M_n$이 수렴하므로 M-판정법에 의하여 $\sum f_n$은 평등수렴한다. 따라서

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

가 성립한다.

8.23 x_0이 $[a,\ b)$의 내점이라고 하자. 그러면 $x_0 < c < b$인 점 c가 존재한다. 그런데 f_n은 구간 $[a,\ c]$에서 f에 평등수렴하므로 f는 x_0에서 연속이다. 그런데 x_0이 $[a,\ b)$의 임의의 내점이므로 f는 $[a,\ b)$에서 연속이다. 더욱이 f가 $[a,\ b)$에서 유계이므로 f는 $[a,\ b)$에서 적분 가능하다.

함수열 $\{f_n\}$과 함수 f가 유계이므로 양수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $\|f_n\| < M$과 $\|f\| < M$을 만족시킨다.

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta := \epsilon/4M$이라고 하면

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx - \lim_{n\to\infty}\int_a^{b-\delta} f_n(x)dx\right|$$

$$+ \left|\lim_{n\to\infty}\int_a^{b-\delta} f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty}\int_{b-\delta}^b f_n(x)dx\right| + \left|\int_a^{b-\delta} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\delta M + \delta M = \delta M + \delta M = 2\delta M < \epsilon$$

이 성립한다. 여기서 ϵ이 임의의 양수이므로 문제의 등식이 성립한다.

8.24 (1) $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 라고 하고 양변에 $2\sin\frac{1}{2}x$ 를 곱하

면

$$2\sin\frac{x}{2}s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-k\right)x - \cos\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right]$$
$$= \cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,.$$

(2) $c_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 라고 하고 양변에 $2\sin\frac{1}{2}x$ 를 곱하면

$$2\sin\frac{x}{2}c_n(x) = \sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$
$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x\,.$$

8.25 $[a,\ b] \subseteq (0,\ 2\pi)$, $a_n(x) \coloneqq \sin nx$, $b_n(x) \coloneqq 1/n$이라고 하자. 문제 8.24에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

이고 $x \in [a,\ b]$이므로 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 $[a,\ b]$에서 유계이다.

또한 $b_n \geq b_{n+1}$이고 $[a,\ b]$ 위에서 $b_n \rightrightarrows 0$이므로 디리끌레 판정법에 의하여 $\sum a_n b_n$은 평등수렴한다.

8.26 문제의 급수가 $\mathbb{R}$에서 수렴함은 예제 7.3.8의 증명과 같다. 이제 I가 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간이라고 하자. 그러면 I의 임의의 점 x에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 는 유계이다. 한편

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{(n+1)^{\alpha}},\quad \frac{1}{n^{\alpha}} \rightrightarrows 0$$

이므로 디리끌레 판정법에 의하여 $\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 는 I에서 평등수렴한다.

8.27 문제 8.26과 같은 방법으로 증명된다.

8.28
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n\beta} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n\beta}x^{\alpha+n\beta}\right]_0^1$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{\alpha+n\beta-1}dx\right]_0^1$$
$$= \int_0^1 x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n\beta}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\beta}}dt.$$

8.29 I가 유계인 구간이라고 하자. 그러면 양수 a가 존재하여 임의의 $x \in I$에 대하여 $|x| < a$를 만족시킨다. $M_n \coloneqq a^n/n!$이라고 하자. 그러면 $\sum M_n$이 수렴하고 $x \in I$일 때마다

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right|$$

이므로 $\sum x^n/n!$은 I에서 평등수렴한다.

이제 J가 유계가 아닌 구간이라고 하자. J가 위로 유계가 아닌 경우만 증명해도 충분하다. $\epsilon_0 \coloneqq 1$이라고 하고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $n \coloneqq N+1$, $m \coloneqq N+2$라고 하자. 그러면 $m > n > N$이다. 여기서 J가 유계가 아니므로 $x > m!$인 $x \in J$가 존재한다. 따라서

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x^m}{m!}\right| > \left|\frac{m!}{m!}\right| = 1 = \epsilon_0$$

이므로 $\sum x^n/n!$은 J에서 평등수렴하지 않는다.

8.30 $M_n \coloneqq |a_n|$이라고 하면

$$|a_n \sin nx| \leq M_n\,,\quad |a_n \cos nx| \leq M_n$$

이므로 M-판정법에 의하여 두 급수는 평등수렴한다.

8.31 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 각 $n \in I$에 대하여 양수 δ_n이 존재하여

$$|s-t| < \delta_n\text{일 때마다 } |f_n(s) - f_n(t)| < \epsilon$$

이 성립한다. $\delta = \min\{\delta_n \mid n \in I\}$ 라고 하자. 그러면

$$|s-t| < \delta,\ n \in I\text{일 때마다 } |f_n(s) - f_n(t)| < \epsilon$$

이 성립한다.

8.32 $M_n = (2/e)^n$이라고 하자. 먼저 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)^n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n = M_n$$

이 성립한다. 또한 $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) = (xe^{-x})^n$의 도함수를 구하면 $f_n{}'(x) \geq 0$이므로 $f_n(1)$이 최댓값이다. 이때

$$f_n(1) = \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq M_n$$

이다. 한편 $\sum M_n$은 수렴하므로 M-판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다.

8.33 $x = \pi/2$를 대입하면

$$c_{2n-1}\sin(2n-1)x = (-1)c_{2n-1}$$

이다. 그런데 $x = \pi/2$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

가 수렴하므로 일반항 판정법에 의하여 $c_{2n-1} \to 0$이다.

$\{c_n\}$이 단조감소하는 양항수열이므로 $c_n \to 0$이다. 한편 문제 8.24에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ 는 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간에서 유계이다. 따라서 디리끌레 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin kx$ 는 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간에서 평등수렴한다.

8.34 주어진 함수 f의 도함수를 구하면

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x)\end{aligned}$$

를 얻는다. 이것을 변형하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$$

이고 양변의 부정적분을 구하면

$$\ln f(x) = \alpha \ln(1+x) + C$$

이다. $x=0$일 때 $f(x)=1$이므로 $C=0$이다. 따라서

$$\ln f(x) = \alpha\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\alpha}$$

이다. ln 은 일대일함수이므로 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$을 얻는다.

8.35 부분적분법을 이용하면

$$\int_a^b f(x)\cos nx = \frac{1}{n}\left[f(x)\sin nx - \int_a^b f'(x)\sin nx\, dx\right]$$

를 얻는다. 여기에 $n \to \infty$인 극한을 취하면 문제의 등식을 얻는다.

8.36 $nx = t$로 치환하면

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{nx}dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

를 얻는다. 그런데 특이적분

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

가 수렴하므로 연속함수의 성질에 의하여

$$f(x) = \int_0^{x\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$은 $[0,\ \infty)$에서 최댓값을 가진다. 그 최댓값을 K라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{nx}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}K = 0$$

을 얻는다.

(다른 풀이)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nx}{nx}\right|dx &= \int_0^{\pi/n}\left|\frac{\sin nx}{nx}\right|dx + \int_{\pi/n}^{\pi}\left|\frac{\sin nx}{nx}\right|dx \\ &\le \int_0^{\pi/n}1\,dx + \int_{\pi/n}^{\pi}\frac{1}{nx}dx \\ &= \frac{\pi}{n} + \frac{\ln\pi}{n} - \frac{1}{n}\ln\frac{\pi}{n} \quad \to 0.\end{aligned}$$

8.37 (1) $n \to \infty$일 때 $1/n \to 0$이라는 사실을 이용하면 쉽게 증명된다.

(2) $\epsilon_0 := 1$이라고 하고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. $m = n+1 = N+2$라고 하면 $m > n > N$이다. $\{r_k\}$가 위에로의 함수이므로 $[1/2,\ 1]$에 속하는 $\{r_k\}$의 항의 개수는 무한이다. 따라서 $k > 2(n+1)n$, $r_k \in [1/2,\ 1]$인 항 r_k가 존재한다. 여기서

$$\begin{aligned}|f_m(r_k) - f_n(r_k)| &= \left|r_k\frac{m+1}{m}\frac{mk+1}{m} - r_k\frac{n+1}{n}\frac{nk+1}{n}\right| \\ &= \left|\frac{mn(n-m)+mnk(n-m)+(n^2-m^2)}{m^2n^2}r_k\right| \\ &= \frac{(n+1)n+(n+1)nk+(m+n)}{(n+1)^2n^2}r_k \\ &\ge \frac{k}{(n+1)n}r_k \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)n}k > 1 = \epsilon_0\end{aligned}$$

이므로 코시 판정법에 의하여 $\{h_n\}$은 평등수렴하지 않는다.

8.38 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 평등수렴의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$일 때마다 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

이 성립한다. 이때

$$\begin{aligned}|F_n(x) - F(x)| &= \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx\right| \\ &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\le \frac{\epsilon}{2(b-a)}\int_a^b 1dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

을 얻는다.

8.39 먼저 $\sum a_n$이 유계임을 보이자. 만약 $\sum a_n$이 유계가 아니라면

$$n > N \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k > 3\sigma$$

인 자연수 N이 존재한다. $m > n > N$인 m과 n, 그리고 임의의 양수 δ에 대하여 $x^m > 1/2$을 만족시키는 $x \in (1-\delta,\ 1)$이 존재한다. 이러한 x에 대하여

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \ge x^m \sum_{k=0}^{m} a_k > 3\sigma x^m > \frac{3}{2}\sigma$$

이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \geq \frac{3}{2}\sigma$$

가 되어 모순이다. 따라서 $\sum a_n$은 유계이고, 양항급수의 유계 판정법에 의하여 수렴한다.

아벨의 정리에 의하여 $\sum a_n x^n$이 $[0,\ 1]$에서 평등수렴하므로 f는 $[0,\ 1]$에서 연속이다. 따라서

$$\sigma = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \sum a_n$$

이다.

8.40 (1) $[0,\ 1]$에서 f의 최댓값을 M이라고 하면 다음을 얻는다.

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \leq M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

양변에 $n\to\infty$인 극한을 취하면 문제의 등식을 얻는다.

(2) $[0,\ 1]$에서 f의 최댓값을 M이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 1보다 작은 양수 δ가 존재하여 $x\in(\delta,\ 1]$일 때마다

$$|f(x)-f(1)| < \frac{\epsilon}{4}$$

을 만족시킨다. 이제 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다

$$|\delta^{n+1}| < \frac{\epsilon}{4M+1}$$

을 만족시킨다. 한편

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

이므로 동일한 N에 대하여 $n>N$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\int_0^1 x^n f(x)dx}{\int_0^1 x^n dx} - f(1)\right| &\leq \left|\frac{\int_0^1 x^n f(x)dx - \int_0^1 f(1)x^n dx}{\int_0^1 x^n dx}\right| \\
&\leq (n+1)\left|\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx\right| \\
&= (n+1)\left|\int_0^\delta x^n(f(x)-f(1))dx \right.\\
&\qquad \left. + \int_\delta^1 x^n(f(x)-f(1))dx\right| \\
&\leq (n+1)\left(2M\int_0^\delta x^n dx + \frac{\epsilon}{4}\int_0^1 x^n dx\right) \\
&= 2M\delta^{n+1} + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

8.41 (i) $x_0 \neq 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$인 x_0이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 정수 m이 존재하여 $x_0\in(2m\pi,\ (2m+1)\pi)$가 성립한다. 이때 양수 δ가 존재하여

$$x_0\in[2m\pi+\delta,\ (2m+1)\pi-\delta] \subseteq (2m\pi,\ (2m+1)\pi)$$

가 성립한다. 한편

$$\left|\sum_{k=1}^n \cos kx\right| = \left|\frac{\sin nx\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^n \cos kx$$

는 닫힌구간 $[(2m\pi+\delta,\ (2m+1)\pi-\delta]$ 위에서 평등유계이고 수열 $\{1/n\}$은 0에 단조수렴하는 양항수열이므로 디리끌레 판정법에 의하여 급수

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$$

는 $[(2m\pi+\delta,\ (2m+1)\pi-\delta]$에서 평등수렴한다. 한편 급수

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$$

는 $[(2m\pi+\delta,\ (2m+1)\pi-\delta]$에서 점별수렴하므로

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$$

이 성립한다.

(ii) $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$일 때 문제에서 주어진 등식은 양변 모두 양의 무한대로 발산한다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 임의의 x에 대하여 등식이 성립한다.

8.42 $M_n = (3/4)^n$이라고 하면 $\sum M_n$은 수렴하므로 M-판정법에 의하여 주어진 급수는 평등수렴한다. 따라서 f는 연속이다. 이제 실수 x와 자연수 m이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$$

이라고 하자. 여기서 부호는 δ_m이 $4^m x$와 $4^m(x+\delta_m)$ 사이에 놓이도록 택한다. [$4^m|\delta_m| = 1/2$이기 때문에 그러한 δ_m이 존재한다.] 이제

$$\gamma_n = \frac{\phi(4^n(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}$$

라고 하자. $n>m$일 때 $4^n\delta_m$은 짝수이므로 $\gamma_n = 0$이다. 한편 임의의 $s,\ t$에 대하여

$$|\phi(s)-\phi(t)| \leq |s-t|$$

이므로 $0\leq n\leq m$일 때 $|\gamma_n| \leq 4^n$이 성립한다. $|\gamma_m| = 4^m$이므로 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\
&= \frac{1}{2}(3^m+1)
\end{aligned}$$

여기서 $m\to\infty$인 극한을 취하면 $\delta_m\to 0$이지만 마지막 식은 양의 무한대로 발산하므로 f는 x에서 미분 불가능하다.

8.43 $f(x) = \ln x$, $x>0$일 때 $f''(x) = -x^{-2} < 0$이므로 로그함수는 오목 함수이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\ln ab = \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

한편 로그함수는 증가함수이므로 (2)의 부등식을 얻는다. 이제

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |x_k|^p dx\right]^{1/p}$$

이라고 하면 코시-슈바르츠 부등식과 (2)에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} &= \int_a^b \frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q}dx \\ &\le \frac{1}{p}\int_a^b\left[\frac{|f|}{\|f\|_p}\right]^p dx + \frac{1}{q}\int_a^b\left[\frac{|g|}{\|g\|_q}\right]^q dx \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

이므로 양변에 $\|f\|_p\|g\|_q$를 곱하면

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{1/q}$$

을 얻는다.

8.44 (1) $0 < x < \pi/2$일 때 $0 < \sin x < 1$이므로

$$0 < \sin^{n+1} x < \sin^n x < 1$$

이다. 따라서

$$a_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = a_n$$

이므로 $\{a_n\}$은 감소수열이다.

(2) 명백히 $a_1 = 1$, $a_2 = \pi/4$이다. 한편 등식

$$\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$$

와 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n+1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

이므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 문제의 등식이 성립한다.

(3) $a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}$이므로 당연히 성립한다.

(4) 부등식 $a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}$을 변형하면

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2} < \left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

를 얻는다. 여기에 $n \to \infty$인 극한을 취하면 문제의 등식을 얻는다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 17일