07. 실수열의 무한급수

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

7.1 (1) 거짓 ($\because$ 모든 항이 0인 수열의 무한급수)
(2) 거짓
(3) 참
(4) 거짓
(5) 거짓
(6) 참

7.2 (1) 절대수렴
(2) 절대수렴
(3) 조건수렴
(4) 절대수렴
(5) 절대수렴
(6) $p>1$일 때 절대수렴, $p\le 1$일 때 발산
(7) 절대수렴
(8) 절대수렴
(9) 절대수렴

7.3 (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)^2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k(n-k+1)^2}$

(3) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^5}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^3(n-k+1)^3}$$

(4) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\ln(n+2)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2\ln(k+2)\,e^{n-k+1}}$$

7.4 $$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{8}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{10}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}+\cdots$$

n	a_n	S_n	n	a_n	S_n
1	1/1	1.000	11	1/15	1.105
2	1/3	1.333	12	1/17	1.164
3	−1/2	0.833	13	1/19	1.217
4	1/5	1.033	14	−1/8	1.092
5	1/7	1.176	15	1/21	1.139
6	1/9	1.287	16	1/23	1.183
7	−1/4	1.037	17	1/25	1.223
8	1/11	1.128	18	−1/10	1.123
9	1/13	1.205	19	1/27	1.160
10	−1/6	1.038	20	1/29	1.194

7.5 $\{b_n\}$이 유계이므로 양수 K가 존재하여 임의의 n에 대하여 $|b_n|<K$를 만족시킨다. 이때 임의의 n에 대하여 $|a_nb_n|<|a_n|K$이고 $\sum|a_n|K$가 수렴하므로 양항급수의 비교판정법에 의하여 $\sum|a_nb_n|$도 수렴한다.

한편 $a_n=(-1)^n/n$, $b_n=(-1)^n$이면 $\sum a_n$이 수렴하고 $\{b_n\}$은 유계이지만 $\sum a_nb_n$은 발산한다. 즉 $\sum a_n$이 절대수렴한다는 조건을 조건수렴한다는 것으로 바꾸면 $\sum a_nb_n$은 수렴하지 않을 수도 있다.

7.6 $\sum a_n$이 수렴하므로 자연수 N이 존재하여 $k\ge N$일 때마다 $|a_k|<1$이 성립한다. $n>N$일 때

$$\sum_{k=N}^{n}|a_k|^p\le\sum_{k=N}^{n}|a_k|$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p=\sum_{k=1}^{N-1}|a_k|^p+\sum_{k=N}^{n}|a_k|$$

이고, 이 등식의 우변의 급수가 수렴하므로 유계 판정법(또는 비교 판정법)에 의하여 좌변의 급수도 수렴한다.

한편 $p=2$일 때

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

이라고 하면 $\sum a_n$은 수렴하지만 $\sum a_n^2$은 발산한다. 따라서 문제에서 양항급수라는 조건이 빠지면 결론을 얻을 수 없다.

참고로 $p>1$, $p\ne 2$인 경우의 반례는 $\{a_n\}$을 복소수열로 정의함으로써 찾을 수 있다.

7.7 임의의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=2$$

이므로 양항급수의 유계 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 수렴한다.

7.8 주어진 급수를 $\sum a_n$이라고 하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

이므로 양항급수의 유계 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 수렴한다.

7.9 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \le \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

이므로 임의의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\right)$$

이 성립한다. 그런데 $n \to \infty$일 때 우변이 수렴하므로 양항급수의 유계 판정법에 의하여 좌변도 수렴한다.

7.10 $n \ge 2$일 때

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

이므로 교대급수 판정법에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다.

7.11 (1) 주어진 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하면 $\{S_{2n-1}\}$은 교대급수판정법에 의하여 수렴한다. 또한

$$\lim_{n \to \infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = 0$$

이므로 $\{S_{2n}\}$은 $\{S_{2n-1}\}$과 같은 값에 수렴한다. 따라서 $\{S_n\}$은 수렴한다. 즉 주어진 무한급수는 수렴한다.

(2) 주어진 무한급수의 n째 항을 a_n이라고 하면

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{9n^2 - 2}{27n^3 - 27n^2 + 6n}$$

이다. 따라서 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9n^2 - 2}{27n^3 - 27n^2 + 6n}$$

이므로 $n \to \infty$일 때 p-급수 판정법에 의하여 $\{S_{3n}\}$은 발산한다. 따라서 $\{S_n\}$도 발산한다. 즉 주어진 무한급수는 발산한다.

7.12 임의의 자연수 n에 대하여

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

이므로 양변을 x_{n+1}로 나누면

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

이 성립한다. $y_n = x_{n+1}/x_n$이라고 하자. 그러면

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}$$

이므로 $\{y_{2n}\}$과 $\{y_{2n+1}\}$은 모두 단조이고 유계이다.

따라서 $\{y_n\}$은 수렴한다. $\{y_n\}$의 극한을 L이라고 하면

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

을 얻는다. $L \ge 0$이므로 이 방정식을 풀면

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

를 얻는다.

7.13 x가 1 이하의 양수일 때

$$\frac{x}{2} \le \sin x \le x$$

가 성립한다. 따라서

$$\frac{1}{2n^{p+1}} \le \frac{1}{n^p} \sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^{p+1}}$$

이므로 p-급수 판정법에 의하여 주어진 무한급수는 $p > 0$일 때 수렴하고 $p \le 0$일 때 발산한다.

7.14 $\sum b_n$이 조건수렴하므로 $\sum b_n$을 재정렬하여 어느 값에든 수렴하도록 할 수 있다. 즉 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 일대일대응인 수열 $\{r_n\}$과 $\{s_n\}$이 존재하여

$$\sum b_{r_n} = 1, \quad \sum b_{s_n} = 2$$

를 만족시킨다. $a = \sum a_n$이라고 하자. $\sum a_n$은 절대수렴하므로

$$\sum a_{r_n} = \sum a_{s_n} = a$$

가 성립한다. 따라서

$$\sum (a_{r_n} + b_{r_n}) = a + 1, \quad \sum (a_{s_n} + b_{s_n}) = a + 2 \qquad \cdots ㉠$$

를 얻는다. 만약 $\sum (a_n + b_n)$이 절대수렴한다면 재정렬하여도 수렴하는 값이 변하지 않아야 한다. 그러나 ㉠에서처럼 재정렬하여 서로 다른 값에 수렴할 수 있으므로 $\sum (a_n + b_n)$은 절대수렴하지 않는다.

한편 $\sum (a_n + b_n)$이 수렴함은 자명하므로 $\sum (a_n + b_n)$은 조건수렴한다.

7.15 (1) $n \ge 4$일 때 주어진 무한급수의 부분합을

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

이라고 하면

$$s_n = \ln 2 + \ln n - \ln(n+1) \quad = \ln \frac{2n}{n+1}$$

이다. 이때

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \ln 2$$

이므로 주어진 무한급수는 $\ln 2$에 수렴한다.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여

$$\frac{1}{(2k)^2 - 1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

이다. 따라서 $n \ge 2$일 때 주어진 무한급수의 부분합을 s_n이라고 하면

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{2}$$

이다. 즉 주어진 무한급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n!}=1$$

7.16 연속함수의 성질과 구분구적법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n}\,\frac{n+1}{n}\,\frac{n+2}{n}\cdots\frac{2n-1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(x+1)\,dx$$

$$=\ln 4-\ln e=\ln\frac{4}{e}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{4}{e}$ 이다.

7.17 주어진 무한급수의 부분합을

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

라고 하고 $\{s_n\}$의 극한을 s라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=s-s=0$$

이다. 또한

$$s_{2n}-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$$
$$\geq a_{2n}+a_{2n}+\cdots+a_{2n}=na_{2n}$$

이므로 $0\leq na_{2n}\leq s_{2n}-s_n$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}na_{2n}=0$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}2na_{2n}=0$$

이다. 그런데 $a_{2n+1}\leq a_{2n}$이므로

$$(2n+1)a_{2n+1}\leq\frac{2n+1}{2n}\cdot 2na_{2n}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$$

이다. 즉 $\{na_n\}$의 짝수 번째 항과 홀수 번째 항이 모두 0에 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0$$

이다.

7.18 $n-1<x<n$일 때

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n-1}$$

이므로 $[n-1,\ n]$에서 각 변을 x에 대하여 적분하면

$$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}$$

을 얻는다. 따라서

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=2}^{n}[\ln k-\ln(k-1)]<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}$$

이므로 이것을 변형하면

$$0<\frac{1}{n}<H_n-\ln n<1$$

을 얻는다. 즉 $\{H_n-\ln n\}$은 유계이다. 한편

$$\frac{1}{n}-(\ln n-\ln(n-1))<0$$

이므로

$$(H_n-H_{n-1})-(\ln n-\ln(n-1))<0$$

이고 이것을 변형하면

$$(H_n-\ln n)-(H_{n-1}-\ln(n-1))<0$$

이다. 따라서 $\{H_n-\ln n\}$은 감소수열이다.

7.19 수열 $\{a_n\}$이 유계이므로 양수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_n|<M$이 성립한다. 이때

$$|b_n|=|a_{n+1}-a_n|<2M$$

이므로 $\{b_n\}$은 유계이다. 문제의 조건에서 $\{b_n\}$은 증가수열이므로 단조수렴정리에 의하여 $\{b_n\}$은 수렴한다. $\{b_n\}$의 극한을 λ라고 하자. 결론에 반하여 $\lambda\neq 0$이라고 가정하자. 그러면 $\lambda<0$이거나 $\lambda>0$이다.

먼저 $\lambda<0$인 경우를 살펴보자.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

라고 하면 명백히 $\{s_n\}$은 감소수열이며

$$|s_n|=|a_{n+1}-a_1|\leq M+|a_1|$$

이므로 유계이다. 따라서 $\{s_n\}$은 수렴한다. 이때 급수

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

은 수렴하므로 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다. 이것은 모순이다.

다음으로 $\lambda>0$인 경우를 살펴보자. 만약 $b_1\geq 0$이면 앞의 경우와 마찬가지로 $\{s_n\}$은 유계이고 증가하는 수열이 되므로 수렴하며 $\{b_n\}$의 극한이 0이 되므로 모순이다. 만약 $b_1<0$이면 충분히 큰 자연수 N이 존재하여 $0<b_N<\lambda$를 만족시킨다. 이때에도 $\{s_n\}$은 N번째 항 이후로 증가하고 유계인 수열이 되므로 수렴한다. 이것은 $\{b_n\}$의 극한이 0임을 의미하므로 모순이다.

따라서 $\lambda=0$이다. 즉 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다.

7.20 우변의 극한을 α라고 하자. 즉

$$\alpha\coloneqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

이라고 하자. 만약 $\alpha=+\infty$이면 문제의 부등식이 당연히 성립한다. 따라서 $\alpha<\infty$라고 하자. 그리고 $\beta>\alpha$인 β가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\epsilon=\beta-\alpha$는 양수이다. 따라서 자연수 N이 존재하여 $n\geq N$일 때마다

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \alpha + \epsilon = \beta$$

가 성립한다. p가 자연수일 때 $0 \le k \le p-1$인 임의의 정수 k에 대하여

$$a_{N+k+1} \le \beta a_{N+k}$$

가 성립한다. $k=0$일 때부터 $k=p-1$일 때까지 위 부등식을 변마다 곱하면

$$a_{N+p} \le \beta^p a_N,$$

을 얻는다. 즉 $n \ge N$일 때

$$a_n \le a_N \beta^{-N} \cdot \beta^n$$

이 성립한다. 따라서

$$\sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{a_N \beta^{-N}} \cdot \beta,$$

이다. 그런데 $n \to \infty$일 때 $\sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \to 1$이므로

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \beta = \alpha + \epsilon$$

이 성립한다. β는 α보다 큰 임의의 실수이므로 ϵ은 임의의 양수이다. 따라서

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \alpha$$

를 얻는다.

7.21 $\rho < e^{-1}$이고 $\rho = e^{-d}$라고 하자. 그러면 $d > 1$이다. $1 < s < d$인 s를 택하고 $b_n = n^{-s}$이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{ns} = e^{-s}$$

이다. $e^{-d} < e^{-s}$이므로 충분히 큰 n에 대하여

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n < \left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n$$

즉

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

이다. 그런데 $\sum b_n$이 수렴하므로 $\sum a_n$도 수렴한다.

이번에는 $\rho > 1/e$이라고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$일 때

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n \ge \frac{1}{e}$$

을 얻는다. $c_n = 1/n$이라고 하자. 그러면

$$\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$$

이다. 따라서

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n > \left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n$$

이고

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

이다. 그런데 $\sum c_n$이 발산하므로 $\sum a_n$도 발산한다.

7.22 수열 $\{c_n\}$을

$$c_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$$

로 정의하면 교대급수 판정법에 의하여 $\sum c_n$은 수렴한다. 또한 $b > a$인 임의의 실수 b에 대하여 $a_n \le b < a_{n+1}$인 a_n이 존재한다. $r_n = b - a_n$이라고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k + \int_{a_n}^{a_n+r_n} f(x)dx \qquad (*)$$

이다. 여기서 마지막 적분에 $n \to +\infty$인 극한을 취하면

$$\left|\int_{a_n}^{a_n+r_n} f(x)dx\right| \le \left|\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx\right| \to 0$$

을 얻는다. 식 (*)에서 $b \to +\infty$일 때 $n \to \infty$이므로 $[a, \infty)$에서 f의 특이적분은 수렴한다.

7.23 문제 7.13에 의하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

은 양의 무한대로 발산한다.

한편 테일러의 정리에 의하여 $0 < x \le 1$일 때

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

이므로

$$\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

을 얻는다. 또한 위 부등식과 수학적 귀납법을 이용하면

$$a_n \ge \sin\frac{1}{n+1}$$

을 얻는다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n+1}$$

은 발산하므로 $\sum a_n$도 발산한다.

7.24 주어진 합을

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

이라고 하자. $n > 1$이고 b가 2, 3, 4, $\cdots$, n의 최소공배수라고 하자. 그러면 h_n은

$$h_n = \frac{a}{b}$$

의 꼴로 쓸 수 있다. 여기서 a는 자연수이다.

b를 소인수분해했을 때 2의 지수를 r라고 하자. 그러면 $b = 2^r s$의 꼴로 나타낼 수 있고, s는 홀수가 된다. 따라서 a는 홀수이다. 즉 h_n의 분모는 짝수이고 분자는 홀수이므로 h_n은 자연수가 아니다. [예를 들어 h_5의 경우

$b = 2^2 s$, (사실 $s = 15$이다)

$a = 2^2 s + 2s + 2^2(s/3) + s + 2^2(s/5)$

이므로 a는 홀수이다.]

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 16일