맛있는 해석학 4판 단원 마무리 문제 풀이

06. 실함수의 리만 적분

http://www.aliceinmathland.com

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

6.1 (1) 참

(2) 거짓

(3) 거짓

(4) 거짓

(5) 거짓

(6) 거짓

(7) 참

(8) 참

(9) 거짓

(10) 거짓

6.2 함수 $f:[0,\ 1] \to \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ -\dfrac{1}{x} & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

그러면 $[0,\ 1]$에서 f의 상적분은 0이지만 하적분은 존재하지 않는다.

6.3 집합의 분할은 서로소인 집합들의 모임이지만 리만 적분에서 구간의 분할은 그 원소들이 서로소가 아니다.

적분은 도형의 넓이의 개념을 수학적으로 정의한 것이다. 이때 구간의 분할은 비록 서로소는 아닐지라도 각 성분구간이 서로 겹치는 부분(교집합)의 체적(길이, 넓이, 부피)이 0이므로 넓이를 계산하는 관점에서는 서로소와 같다고 볼 수 있다.

6.4 리만 적분 가능할 필요충분조건은 리만 합이 수렴하는 것이다.

6.5 리만 적분 가능하면 그 적분값을 구분구적법으로 계산할 수 있지만 구분구적법으로 계산하는 극한이 수렴할지라도 적분 불가능할 수 있다.

6.6 부정적분은 본래 도함수의 역연산이지만 정적분을 계산하는 데에 유용하게 사용된다. 특히 정적분으로 정의되고 적분 구간을 변수로 갖는 함수는 피적분함수의 부정적분이 된다.

6.7 (1) 치환적분법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx\\ &= \int_{-a}^{0} f(-x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx\\ &=-\int_{-a}^{0} f(-x)d(-x)+\int_{0}^{a} f(x)dx\\ &=-\int_{a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx\\ &=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx\\ &=2\int_{0}^{a} f(x)dx.\end{aligned}$$

(2) 치환적분법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} g(x)dx &= \int_{-a}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{a} g(x)dx\\ &= \int_{-a}^{0} -g(-x)dx+\int_{0}^{a} g(x)dx\\ &= \int_{-a}^{0} g(-x)d(-x)+\int_{0}^{a} g(x)dx\\ &= \int_{a}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{a} g(x)dx\\ &=-\int_{0}^{a} g(x)dx+\int_{0}^{a} g(x)dx\\ &=0\end{aligned}$$

6.8 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$ 또는 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{1+(k/n)^2}=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx$

6.9 (1) $\dfrac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $\dfrac{2}{3}x^{3/2}+\dfrac{3}{4}x^{4/3}+C$

(3) $2\sin t+C$

(4) $\tan\theta+C$

(5) $\tan^{-1}x+C$

(6) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+3\tan^{-1}x+C$

6.10 $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}e^{t^2}dt,\ g(x)=e^{x}$이라고 하면

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_{0}^{x}e^{t^2}dt\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{g(0)-g(x^2)}\cdot\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

$$=-\frac{1}{g'(0)}\cdot F'(0)=-1.$$

(다른 풀이) 로피탈의 법칙에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt&=\lim_{x\to0}\frac{1}{-2xe^{x^2}}\left(\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{-2ex^2-4x^2e^{x^2}}\\&=-1.\end{aligned}$$

6.11 (1) $\int_2^5 f(x)dx=\int_1^5 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

$=6+4=10.$

(2) $\int_1^5 f(x)-g(x)dx=\int_1^5 f(x)dx-\int_1^5 g(x)dx$

$=6-8=-2.$

(3) $\int_1^5 4f(x)-g(x)dx=4\int_1^5 f(x)dx-\int_1^5 g(x)dx$

$=24-8=16.$

6.12 $a=0,\ b=1.$

6.13 $\omega_f(a)$는 a에서 f의 상극한과 하극한의 차와 같다.

(1) 1

(2) 1

(3) 2

6.14 (1) 발산

(2) 발산

(3) $\frac{1}{e}$

(4) 1

(5) 0

(6) 0

(7) 발산

(8) 발산

6.15 (1) $\frac{1}{13}e^{2x}(-3\cos 3x+2\sin 3x)+C$

(2) $\frac{1}{16}x^4(-1+4\ln x)+C$

(3) $x(-6+6\ln x-3(\ln x)^2+(\ln x)^3)\ +C$

(4) $\frac{1}{27}e^{3x}(2-6x+9x^2)+C$

6.16 적분 가능하다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고

$$\delta<\min\left\{\frac{\epsilon}{8},\ \frac{1}{2}\right\}$$

인 양수 δ를 택하자. f가 $I_1=[-1,\ -\delta]$에서 연속이므로 I_1의 분할 P_1이 존재하여

$$U(f,\ P_1)-L(f,\ P_1)<\frac{\epsilon}{4}$$

을 만족시킨다. 그리고 f가 $I_2=[\delta,\ 1]$에서 연속이므로 I_2의 분할 P_2가 존재하여

$$U(f,\ P_2)-L(f,\ P_2)<\frac{\epsilon}{4}$$

을 만족시킨다. 구간 $[-\delta,\ \delta]$ 위에서 $-1\le f(x)\le 1$이므로 구간 $[-\delta,\ \delta]$의 한 분할을 P_3이라고 하면

$$U(f,\ P_3)-L(f,\ P_3)\le 2\delta\cdot 2=4\delta<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $P=P_1\cup P_3\cup P_2$라고 하면 P는 $[-1,\ 1]$의 분할이 된다. 이때

$$\begin{aligned}U(f,\ P)-L(f,\ P)&=\sum_{k=1}^{3}U(f,\ P_k)-\sum_{k=1}^{3}L(f,\ P_k)\\&=\sum_{k=1}^{3}[U(f,\ P_k)-L(f,\ P_k)]\\&<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon\end{aligned}$$

이므로 f는 $[-1,\ 1]$에서 리만 적분 가능하다.

6.17 f'이 연속이므로

$$(f')^+(x)=\begin{cases}f'(x) & \text{if } f'(x)\ge 0\\ 0 & \text{if } f'(x)<0\end{cases}$$

$$(f')^-(x)=\begin{cases}-f'(x) & \text{if } f'(x)<0\\ 0 & \text{if } f'(x)\ge 0\end{cases}$$

으로 정의된 두 함수 $(f')^+$, $(f')^-$도 연속이다. 두 함수 $g,\ h$를 각각

$$g(x)=\int_a^x (f')^+(t)dt+f(a),\quad h(x)=\int_a^x (f')^-(t)dt$$

라고 정의하면 $g,\ h$는 증가함수이고 $f=g-h$를 만족시킨다.

6.18 f가 증가함수인 경우만 증명해도 충분하다. 분할 P를

$$P=\left\{\frac{k}{n}\ \middle|\ k\in\mathbb{N},\ k\le n\right\}\cup\{0\}$$

이라고 하면

$$U(f,\ P)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad L(f,\ P)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|&=\left|U(f,\ P)-\int_0^1 f(x)dx\right|\\&\le U(f,\ P)-L(f,\ P)\\&=\frac{|f(1)-f(0)|}{n}\end{aligned}$$

6.19 $a<c<b$인 경우만 증명해도 충분하다. (c가 $[a,\ b]$의 끝점인 경우의 증명도 비슷하다.) f가 $[a,\ b]$에서 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-c|<\delta$일 때마다

$$|f(x)-f(c)|<\frac{1}{2}f(c)$$

를 만족시킨다. 여기서 δ는 $a<c-\delta,\ c+\delta<b$가 될 정도로 작다고 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 이 부등식을 변형하면

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(c)$$

를 얻는다.

$$P = \{a,\ c-\delta,\ c+\delta,\ b\}$$

라고 하면 P는 $[a,\ b]$의 분할이 된다. 이때

$$\begin{aligned} L(f,\ P) &= (c-\delta-a)\inf f([a,\ c-\delta]) \\ &\quad + 2\delta \inf f([c-\delta,\ c+\delta]) \\ &\quad + (b-c-\delta)\inf f([c+\delta,\ b]) \\ &\geq 2\delta \inf f([c-\delta,\ c+\delta]) \\ &\geq 2\delta \cdot \frac{1}{2} f(c) = \delta f(c) \end{aligned}$$

이므로

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \geq \delta f(c) > 0$$

을 얻는다.

6.20 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f와 g가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하므로

$$U(f,\ P_f) - L(f,\ P_f) < \frac{\epsilon}{2},$$

$$U(g,\ P_g) - L(g,\ P_g) < \frac{\epsilon}{2}$$

인 분할 P_f와 P_g가 존재한다.

$$P = P_f \cup P_g = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$$

이라고 하면

$$\begin{aligned} &U(h,\ P) - L(h,\ P) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(h) - m_i(h))\Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \{(M_i(f) - m_i(f)) + (M_i(g) - m_i(g))\}\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} (M_i(g) - m_i(g))\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

이며, 같은 방법으로

$$U(k,\ P) - L(k,\ P) < \epsilon$$

을 얻는다. 따라서 h와 k는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하다.

(다른 방법) 절댓값 함수는 연속이며

$$\max\{f(x),\ g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$\min\{f(x),\ g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

이므로 h와 k는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

6.21 결론에 반하여 $f(c) \neq 0$인 점 c가 $[a,\ b]$에 존재한다고 가정하자. $a < c < b$인 경우만 증명해도 충분하다. f가 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-c| < \delta$일 때마다

$$|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2}|f(c)|$$

를 만족시킨다. 여기서 δ는 $a < c-\delta,\ c+\delta < b$가 될 정도로 작다고 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 이 부등식을 변형하면

$$|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(c)|$$

를 얻는다. 함수 $\phi : [a,\ b] \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x-c| < \delta,\ f(x) \geq 0 \\ -1 & \text{if } |x-c| < \delta,\ f(x) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

그러면

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\phi(x)dx &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|dx \\ &\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{1}{2}|f(c)|dx \\ &= \delta|f(c)| > 0 \end{aligned}$$

이므로 모순이다.

6.22 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. c가 양수이고 f가 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 $P = \{x_k \mid 0 \leq k \leq n\}$이 존재하여

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) < c^2\epsilon$$

을 만족시킨다. 따라서

$$\begin{aligned} U(1/f,\ P) - L(1/f,\ P) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{m_k(f)} - \frac{1}{M_k(f)}\right)\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k(f) - m_k(f)}{M_k(f)\,m_k(f)}\Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k(f) - m_k(f)}{c^2} \\ &= \frac{1}{c^2}[U(f,\ P) - L(f,\ P)] \\ &< \frac{1}{c^2}c^2\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다.

6.23 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $[0,\ 1]$에서 함수 f의 특이적분값을 S라고 하자. 그러면

$$\lim_{b \to 1-} \int_0^b f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = S$$

이므로 양수 δ_1이 존재하여 다음 두 부등식을 만족시킨다.

$$f(1-\delta_1) > 0,\quad \left|\int_0^{1-\delta_1} f(x)dx - S\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

또한 함수 f가 $[0,\ 1-\delta_1]$에서 적분 가능하므로 양수 δ_2가 존재하여 $\|P\| < \delta_2$일 때마다

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$이라고 하고 $N\delta > 1$인 자연수 N을 택하자. 그러면 $n > N$인 임의의 자연수 n에 대하여

$$P = \left\{\frac{k}{n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n\right\}$$

은 구간 $[0,\ 1-1/n]$의 분할이 된다. 이러한 $n,\ P,\ \delta$에 대하여

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - S\right| = |U(f,\ P) - S| \\ &\leq \left|U(f,\ P) - \int_0^{1-1/n} f(x)dx\right| + \left|\int_0^{1-1/n} f(x)dx - S\right| \end{aligned}$$

$$\le |U(f,\ P)-L(f,\ P)|+\left|\int_0^{1-\delta_1} f(x)dx-S\right|$$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

이 성립한다.

6.24 함수 $F:[a,\ b]\to\mathbb{R}$를

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라고 정의하자. 그러면 F는 $[a,\ b]$에서 미분 가능하다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]\Big|_{u(x)}^{v(x)}\\ &=\frac{d}{dx}[F(v(x))-F(u(x))]\\ &=F'(v(x))v'(x)-F'(u(x))u'(x)\\ &=f(v(x))\frac{dv}{dx}-f(u(x))\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

6.25 라이프니츠 적분 공식에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2}\frac{t^5}{1+t^4}dt &= \frac{x^{10}}{1+x^8}\cdot 2x-\frac{x^{15}}{1+x^{12}}\cdot 3x^2\\ &=\frac{2x^{11}}{1+x^8}-\frac{3x^{17}}{1+x^{12}}.\end{aligned}$$

6.26 (1) 발산

(2) 수렴

(3) 수렴

(4) 수렴

(5) 수렴

(6) 수렴

(7) 발산

(8) 수렴

(9) 수렴

6.27 $[a,\ b]=[0,\ 1]$이고 $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$라고 하자. 즉

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

라고 하자. 그러면 f는 $[0,\ 1]$에서 적분 가능하지 않지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\lim_{n\to\infty}1=1$$

이다.

6.28 $[a,\ b]$에서 f의 적분값을 I라고 하자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 P_1이 존재하여

$$I-L(f,\ P_1)<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. h가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 P_2가 존재하여

$$U(h,\ P_2)-I<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $P=P_1\cup P_2$라고 하면 P는 P_1과 P_2의 공통세련분할이 된다. 또한

$$\begin{aligned}U(g,\ P)-L(g,\ P) &\le U(h,\ P)-L(f,\ P)\\ &\le U(h,\ P_2)-L(f,\ P_1)\\ &=U(h,\ P_2)-I+I-L(f,\ P_1)\\ &<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

이므로 g는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하다. 한편

$$0\le U(g,\ P)-I\le U(h,\ P)-I<\epsilon$$

이므로

$$0\le\int_a^b g(x)dx-I\le U(g,\ P)-I<\epsilon$$

이다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로

$$\int_a^b g(x)dx=I$$

이다.

6.29 함수 $g:[-1,\ 1]\to\mathbb{R}$를

$$g(x)=(2x+3)f(x)$$

라고 정의하면 g는 연속이다. 이때 적분의 평균값 정리에 의하여 $c\in[-1,\ 1]$이 존재하여

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=(1-(-1))g(c)$$

를 만족시킨다. 우변을 계산하면

$$2g(c)=2(2c+3)f(c)$$

이고, 문제의 조건에 의하여 이 값은 0이다. 그런데 $2c+3\ne 0$이므로 $f(c)=0$이 된다.

6.30 $a_n=\sqrt[n]{n!/n^n}$이라고 하면 $\{a_n\}$은 단조 감소하는 수열이고 0에 의하여 아래로 유계이므로 수렴한다. 그 극한을 I라고 하면

$$\begin{aligned}\ln I=\ln\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n}+0\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

이다. $\ln(1-x)$는 $[0,\ 1)$에서 증가함수이고 특이적분 가능하며 적분값이 -1이므로 문제 6.23에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1-x)dx=-1$$

이다. 즉 $\ln I=-1$이므로 $I=e^{-1}$이다.

6.31 (1) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고

$$\frac{2^n}{3^n}<\frac{\epsilon}{2}$$

인 자연수 n을 택하자. 그러면 E_n은 길이가 3^{-n}인 2^n개의 닫힌구간들의 합집합이다. 이 닫힌구간들의 양 끝을 $2^{-n-2}\epsilon$만큼

늘이고 닫힌구간을 열린구간으로 바꾸면, 이 열린구간들의 길이는 각각 $3^{-n}+2^{-n-1}\epsilon$이고, 그러한 열린구간이 2^n개 있으므로, 이 열린구간들의 길이의 합은

$$2^n\left(\frac{1}{3^n}+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

이다. 이 열린구간들의 합집합은 E_n을 덮고, E_n은 E를 포함하므로 E는 측도가 0인 집합이다.

한편 E는 닫힌집합의 교집합이므로 닫힌집합이고, 유계이므로 컴팩트이다.

(2) E_{k-1}에 속하는 원소들 중에서 삼진소수전개의 소수점 아래 k번째 자리 숫자가 1인 것을 제외하면 E_k가 된다. E는 E_k들의 교집합이므로 $x\in E$일 필요충분조건은 x의 삼진소수전개의 소수점 아래 숫자 중에서 1이 존재하지 않는 것이다.

(3) 각 $x\in E$에 대하여, x의 삼진소수전개의 소수점 아래 k번째 자리의 숫자를 b_k라고 하자. 즉

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k},\ b_k\neq 1$$

이라고 하자. f의 함숫값은

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k/2}{2^k}$$

이므로 f는 $[0,\ 1]$의 점 중에서 이진소수전개로 나타낼 수 있는 모든 값을 함숫값으로 취한다. 즉 f는 위에로의 함수이다. 또한 f는 일대일함수이므로 E는 비가산집합이다.

(4) f가 $[0,\ 1]$에서 증가함수라는 사실은 명백하다. 이제 결론에 반하여 f가 $[0,\ 1]$의 점 c에서 불연속이라고 하자. 그러면

$$0\leq f(c-)<f(c+)\leq 1$$

이므로 $(f(c-),\ f(c+))\subseteq[0,\ 1]$이다. 그런데

$$(f(c-),\ f(c+))\cap f([0,\ 1])=\varnothing$$

이므로 f가 위에로의 함수라는 데에 모순이다. 따라서 $[0,\ 1]$에서 f가 불연속인 점은 존재하지 않는다.

6.32 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $2\geq n\epsilon$인 자연수 n의 개수는 유한이다. 따라서

$$D=\left\{q\in[0,\ 1]\ \middle|\ f(q)\geq\frac{\epsilon}{2}\right\}$$

은 유한집합이고 $D\subseteq\mathbb{Q}$이다. 이제 D의 원소의 개수를 k라고 하자. 그리고

$$\|P\|<\frac{\epsilon}{8k}$$

을 만족시키는 $[a,\ b]$의 분할 $P=\{x_i\,|\,0\leq i\leq v\}$를 택하자. $I_j=[x_{j-1},\ x_j]$라고 하면 D의 원소를 포함하고 있는 I_j의 개수는 $2k$ 이하이다. 즉

$$\sup f(I_j)\geq\frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시키는 I_j의 개수는 $2k$ 이하이다. 또한 f는 1에 의하여 위로 유계이다. 따라서

$$U(f,\ P)=\sum_{j=1}^{v}\sup f(I_j)(x_i-x_{i-1})$$

$$\leq\sum_{j=1}^{v}\frac{\epsilon}{2}(x_j-x_{j-1})+2k\cdot\frac{\epsilon}{8k}$$

$$=\frac{\epsilon}{2}+2k\cdot\frac{\epsilon}{8k}<\epsilon$$

이다. 한편 f는 0에 의하여 아래로 유계이므로

$$L(f,\ P)\geq 0$$

이다. 이로써

$$U(f,\ P)-L(f,\ P)<\epsilon$$

이므로 f는 $[0,\ 1]$에서 리만 적분 가능하다.

6.33 함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$를 토마에 함수라고 하고 함수 g를

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 x가 $(0,\ 1)$에 속하는 유리수일 때에만 $f(x)>0$이고 그 외에는 $f(x)=0$이므로

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

이다. 따라서 $g\circ f$는 $[0,\ 1]$의 어떠한 부분구간에서도 리만 적분 가능하지 않다.

6.34 $[0,\ 1]$에서 f의 리만 적분값을 c라고 하자. 즉

$$c=\int_0^1 f(x)dx$$

라고 하자. 그러면 임의의 실수 s에 대하여

$$\phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)=\phi(c)+s\left(\int_0^1 f(x)dx-c\right)\qquad\cdots ㉠$$

가 성립한다.

$$s=\sup_{x\in[a,\ c)}\frac{\phi(c)-\phi(x)}{c-x}$$

라고 하자. 그러면 참고 5.6.3에 의하여 임의의 $u\in(c,\ b]$에 대하여

$$s\leq\frac{\phi(u)-\phi(c)}{u-c}$$

이다. 즉 임의의 $u\in(c,\ b]$에 대하여

$$\phi(c)+s(u-c)\leq\phi(u)\qquad\cdots ㉡$$

이다. 한편 s의 정의에 의하여 임의의 $u\in[a,\ c)$에 대하여

$$s\geq\frac{\phi(c)-\phi(u)}{c-u}$$

가 성립한다. 따라서 임의의 $u\in[a,\ b]$에 대하여 ㉡이 성립한다. ㉡에 $u=f(x)$를 대입하면

$$\phi(c)+s(f(x)-c)\leq(\phi\circ f)(x)$$

를 얻는다. 양변을 $[0,\ 1]$에서 적분하면

$$\phi(c)+s\left(\int_0^1 f(x)dx-c\right)\leq\int_0^1(\phi\circ f)(x)dx$$

를 얻는다. 이 부등식을 ㉠과 결합하면 문제의 부등식을 얻는다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 16일