05. 실함수의 미분

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

5.1 (1) 거짓 ($\because$ 참고 5.1.7)

(2) 거짓 ($\because$ 참고 5.1.8)

(3) 참 ($\because$ 참고 5.3.13)

(4) 참 ($\because$ 정의 5.1.3)

(5) 거짓 ($\because$ 반례 : $f(x)=1,\ g(x)=x,\ (a,\ b)=(-1,\ 1)$)

(6) 참 ($\because$ 정리 5.2.1, 보기 5.2.4)

(7) 거짓 $\because$ 반례 : $I=[0,\ 1]\cup[2,\ 3]$ 위에서 함수 f를

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{if } 2\le x\le 3\end{cases}$$

으로 정의하면 정의역의 모든 점에서 $f'(x)=0$이지만 f는 상수함수가 아니다.

5.2 미분의 정의에 의하여

$$f'=\frac{d}{dx}f,$$

$$f''=\frac{d}{dx}f'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right)=\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f=\frac{d^2}{(dx)^2}f,$$

$$f^{(n+1)}=\frac{d}{dx}f^{(n)}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{(dx)^n}f\right)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}f=\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}}f$$

이므로 형식적(formally)으로는 수학적 귀납법에 의하여

$$f^{(n)}=\frac{d^n}{(dx)^n}f$$

라고 할 수 있다. 한편

$$\frac{d^n}{d^n x}f=\frac{f}{x}$$

이므로 형식적으로 의미가 없다.

5.3 도함수의 정의역은 본래 함수의 정의역의 부분집합이다.

5.4 도함수는 중간값 성질을 가진다. 그러나 최대정수함수는 중간값 성질을 갖지 않는다. 따라서 최대정수함수는 다른 함수의 도함수가 될 수 없다.

5.5 $x\ne -1$인 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)-1$이다. 즉 두 함수는 상수 차이이다.

5.6 (1) $f'(x)=2x+1,\ f''(x)=2$

(2) $f'(t)=15t^2-6t,\ f''(t)=30t-6$

(3) $f'(t)=0,\ f''(t)=0$ [$\because$ x는 f의 변수가 아니다.]

(4) $f'(x)=-x(x^2+2)^{-3/2}$,

$f''(x)=-(x^2+2)^{-3/2}+3x^2(x^2+2)^{-5/2}$

5.7 (1) $y'=4x-13$이므로 점 $(1,\ -6)$에서 미분계수는 -9이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=-9(x-1)-6$ 즉

$$y=-x+3$$

이고 법선의 방정식은 $9y=(x-1)-54$ 즉

$$y=\frac{1}{9}x-\frac{55}{9}$$

이다.

5.8 $h\to 0$일 때 $\alpha h\to 0,\ \beta h\to 0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+\alpha h)-f(a+\beta h)}{h}\\ &=\alpha\cdot\frac{f(a+\alpha h)-f(a)}{\alpha h}-\beta\cdot\frac{f(a+\beta h)-f(a)}{\beta h}\\ &\to \alpha f'(a)-\beta f'(a)=(\alpha-\beta)f'(a).\end{aligned}$$

5.9 f의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{if } x\le 1\\ 3 & \text{if } x>1\end{cases}$$

따라서 f'은 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

5.10 f의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{if } x\le 2\\ a & \text{if } x>2\end{cases}$$

따라서 $a=4$일 때 f'은 연속이다. 한편 미분 가능한 함수는 연속이므로

$$4=f(2)=\lim_{x\to 2+}f(x)=2a+b=8+b$$

이다. 따라서 $b=-4$이다.

5.11 f가 미분 가능하려면 f는 0과 1에서 연속이어야 한다. 따라서 $a=3,\ 5=m+b$이다. 한편 f가 1에서 미분 가능하려면 $m=1$이 되어야 한다. 따라서 $b=4$이다.

5.12 f의 도함수는

$$f'(x)=(3x-4)(x+2)$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=4/3$ 또는 $x=-2$이다.

f는 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하므로 f가 극점을 갖는 점은 $f'(x)=0$을 만족시키는 점 x이다. 따라서 f는 $x=4/3$과 $x=-2$에서 극값을 가지며, 그 극값은 다음과 같다.

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{41}{27},\quad f(-2)=17.$$

5.13 (1) $x=y$인 경우에는 당연히

$$|\sin x - \sin y| = 0 \le |x-y|$$

이다. $x \neq y$인 경우에는 평균값 정리에 의하여 x와 y 사이에 c가 존재하여

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| = |\cos c| \le 1$$

을 만족시킨다. 양변에 $|x-y|$를 곱하면 문제의 부등식을 얻는다.

(2) $x \neq 0$이면 평균값 정리에 의하여

$$\frac{e^x - e^0}{x-0} = e^c$$

를 만족시키는 c가 0과 x 사이에 존재한다. 따라서

$$e^x = 1 + xe^c > 1 + x$$

를 얻는다. 또한 $x=0$일 때에는 당연히 $e^x = 1 = 1+x$이다.

5.14 (합성함수의 미분법을 이용한 설명)

$y \ge 0$일 때 타원을 그래프로 갖는 함수를 $y=f(x)$라고 하자. $x^2+9y^2=1$에 $y=f(x)$를 대입하면

$$x^2 + 9\{f(x)\}^2 = 1$$

이다. 양변을 x에 대하여 미분하면 연쇄 법칙에 의하여

$$2x + 18f(x)f'(x) = 0$$

이므로, $f(x) \neq 0$일 때

$$f'(x) = -\frac{x}{9f(x)}$$

를 얻는다. 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y = -\frac{x_1}{9y_1}x + 2$$

이다. $(x_1,\ y_1)$은 이 직선 위의 점이므로

$$y_1 = -\frac{x_1}{9y_1} + 2 \qquad \cdots ㉠$$

를 만족시키며, $(x_1,\ y_1)$은 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 9y_1^2 = 1 \qquad \cdots ㉡$$

을 만족시킨다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{35}}{6},\quad y_1 = \frac{1}{18}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = \pm\frac{\sqrt{35}}{3}x + 2$$

한편 $f(x)=0$일 때 타원의 접선은 y축과 평행하므로 점 $(0,\ 2)$를 지나지 않는다. $y \le 0$일 때 타원 위의 점에서 접하는 직선은 y절편이 음수이므로 점 $(0,\ 2)$를 지나지 않는다.

(음함수의 미분법을 이용한 설명)

타원의 방정식 $x^2+9y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x+18yy'=0$이므로 $y'=-x/9y$이다. 직선과 타원의 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y = -\frac{x_1}{9y_1}x + 2$$

가 된다. $(x_1,\ y_1)$은 이 직선 위의 점이므로

$$y_1 = -\frac{x_1}{9y_1} + 2 \qquad \cdots ㉠$$

를 만족시키며, $(x_1,\ y_1)$은 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 9y_1^2 = 1 \qquad \cdots ㉡$$

을 만족시킨다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{35}}{6},\quad y_1 = \frac{1}{18}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = \pm\frac{\sqrt{35}}{3}x + 2$$

이다.

(도형의 방정식을 이용한 풀이) 접선의 방정식을 $y=mx+2$라고 하고 이것을 타원의 방정식 $x^2+9y^2=1$과 연립하여 정리하면

$$(1+9m^2)x^2 + 36mx + 35 = 0$$

이다. 직선과 타원이 접하려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$(\text{판별식}) = 1296m^2 - 4\cdot(1+9m^2)\cdot 35 = 0$$

이 되어야 한다. 이것을 풀면

$$m = \pm\frac{\sqrt{35}}{3}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = \pm\frac{\sqrt{35}}{3}x + 2$$

이다.

5.15 f'이 $(a,\ b)$에서 유계이므로 양수 m이 존재하여 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $|f'(x)| < m$이 성립한다. 임의로 주어진 양수 ϵ에 대하여 $\delta = \epsilon/m$라고 하자. $x \neq y$이고 $|x-y|<\delta$, $x\in(a,\ b)$, $y\in(a,\ b)$일 때 평균값 정리에 의하여 x와 y 사이에 c가 존재하여

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c)|$$

를 만족시킨다. 양변에 $|x-y|$를 곱하면

$$|f(x)-f(y)| = |x-y|\,|f'(c)| < |x-y|m \le m\delta = \epsilon$$

을 얻는다.

5.16 (1) $a-b$, 로피탈의 정리를 이용한다.

(2) $2a$, 로피탈의 정리를 이용한다.

(3) $\ln 2$, 로피탈의 정리를 이용한다.

(또는 $x=1+t$로 치환한다.)

(4) 1, 로그를 취한 뒤 로피탈의 정리를 이용한다.

5.17 $n = \dfrac{2}{\ln 4}$, 로그를 취한 뒤 로피탈의 정리를 이용한다.

5.18 $f''(a)$, 로피탈의 정리를 이용한다.

(또는 테일러의 정리를 이용한다.)

5.19 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\delta=\epsilon$이라고 하면 $|s-t|<\delta$일

때마다

$$|f(s)-f(t)|=||s|-|t||\le |s-t|<\delta\le\epsilon$$

이므로 f는 $\mathbb{R}$ 에서 평등연속이다. 그러므로 0에서 연속이다. 한편

$$f_r'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1,$$

$$f_l'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 f는 0에서 미분 불가능하다.

5.20 (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0$$

이고, 이것을 y'에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\quad (\text{단, } x\ne 0)$$

(2) 주어진 등식을 변형하면

$$2\sin x\cos y=1$$

이므로, 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\cos x\cos y-(2\sin x\sin y)y'=0$$

이고, 이것을 y'에 대하여 풀면

$$y'=\cot x\cot y\,.$$

(3) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xy+x^2y'+2xyy'+y^2+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}(y+xy')=0$$

이고, 이것을 y'에 대하여 풀면

$$y'=-\frac{2y\sqrt{xy}(2x+y)+y}{2x\sqrt{xy}(x+2y)+x}\,.$$

(4) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^{xy}(y+xy')+y'\ln x+\frac{y}{x}=-\sin(x^2+y^2)(2x+2yy')$$

이고, 이것을 y'에 대하여 풀면

$$y'=-\frac{xye^{xy}+y+2x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2e^{xy}+x\ln x+2xy\sin(x^2+y^2)}\ .$$

5.21 $f_l(0)=\lim_{h\to 0-}\dfrac{h/(1+e^{1/h})}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{1}{1+e^{1/h}}=1,$

$$f_r(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/h}}=0.$$

5.22 $f'(x)=\begin{cases}x^{-2}e^{-1/x} & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x\le 0,\end{cases}$

$$f''(x)=\begin{cases}(1-2x)x^{-4}e^{-1/x} & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x\le 0.\end{cases}$$

5.23 $x\ne 0$일 때에는

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

이고 $x=0$일 때에는

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

이므로 f는 모든 점에서 미분 가능하다. 이제

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)\pi},\ b_n=\frac{1}{2n\pi}$$

이라고 하면 $a_n\ne 0,\ b_n\ne 0,\ a_n\to 0,\ b_n\to 0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}f'(a_n)=1\ne -1=\lim_{n\to\infty}f'(b_n)$$

이므로 f'은 0에서 연속이 아니다.

5.24 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\delta=\epsilon$이라고 하면 $|h-0|<\delta$일 때

$$\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-0\right|\le |h|<\delta=\epsilon$$

이므로 f는 0에서 미분 가능하고 $f'(0)=0$이다.

이제 f가 0이 아닌 다른 점에서 미분 가능하지 않음을 증명하자. $a\ne 0$이라고 하자. 그러면 a에 수렴하는 유리수열 $\{r_n\}$과 무리수열 $\{s_n\}$이 존재한다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(r_n)^2=a^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

이고 $a^2\ne 0$이므로 f는 a에서 연속이 아니다. 따라서 f는 a에서 미분 불가능하다.

5.25 임의의 $y\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $f'(y)=f(y)>0$이므로 f는 증가함수이다. $x=f(y)$라고 하면 역함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f(y)}=\frac{1}{x}$$

을 얻는다.

5.26 도함수는 중간값 성질을 가지므로 $(a,\ b)$에서 f'의 부호는 일정하다. 즉 $(a,\ b)$의 모든 점에서 f'이 양수이거나, $(a,\ b)$의 모든 점에서 f'이 음수이다.

$(a,\ b)$의 모든 점에서 f'이 양수인 경우를 증명하자. 그러면 f는 $(a,\ b)$에서 증가하는 함수이다. 한편 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르므로 연속함수의 중간값 정리에 의하여 a와 b 사이에 x가 존재하여 $f(x)=0$을 만족시킨다. f는 증가함수이므로 그러한 x는 유일하다.

5.27 $\alpha<\beta$인 경우를 증명하자. [$\beta<\alpha$인 경우에는 α와 β의 역할을 바꾸어 증명하면 된다.]
문제의 조건에 의하여, $f(x)=0$이면 $f'(x)\ne 0$이고 $g(x)\ne 0$이다. 그리고 함수 $h:(\alpha,\ \beta)\to\mathbb{R}$ 를 $h=g/f$로 정의하자. 그러면 임의의 $x\in(\alpha,\ \beta)$에 대하여 $f(x)\ne 0$이므로 h는 잘 정의된 함수이다. 여기서

$$h'(x)=\frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2}\ne 0$$

이므로 h는 증가만 하거나 감소만 한다. [만약 그렇지 않으면 도함수의 중간값 성질에 의하여 $h'(x)=0$인 $x\in(\alpha,\ \beta)$가 존재하기 때문이다.] h가 증가함수인 경우를 증명하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to\alpha+}h(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\beta+}h(x)=+\infty$$

따라서 연속함수의 중간값 정리에 의하여 $h(x_0)=0$인 점 x_0이 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다. h가 증가함수이므로 그러한 점 x_0은 유일하다. 여기서 h의 정의에 의하여 $h(x)=0$이면 $g(x)=0$이므로 x_0은 $g(x)=0$의 유일한 근이다.

5.28 $c<d$인 경우만 증명해도 충분하다.
f가 $[c,\ d]$에서 상수함수인 경우는 자명하다. 따라서 f가 상수함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $(c,\ d)$의 적당한 점 ξ에서 f는 극값을 가진다. 즉 $f'(\xi)=0$이다. $f'(c)=0,\ f'(\xi)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $\xi_1\in(c,\ \xi)$가 존재하여 $f''(\xi_1)=0$이다. 마찬가지로 $\xi_2\in(\xi,\ d)$가 존재하여 $f''(\xi_2)=0$이다. ξ_1과 ξ_2는 서로 다른 점이므로 다시 롤의 정리에 의하여 ξ_1과 ξ_2 사이에 x가 존재하여 $f^{(3)}(x)=0$이다.

5.29 결론에 반하여 $f''(c)<0$이라고 가정하자. 그러면

$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0$$

이므로 양수 δ가 존재하여 $0<|x-c|<\delta$일 때마다

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0$$

이 성립한다. 여기서 $f'(c)=0$이므로 $0<|x-c|<\delta$일 때마다

$$\frac{f'(x)}{x-c}<0$$

이다. $I=(c-\delta,\ c+\delta)$라고 하면 $x<c,\ x\in I$일 때 $f'(x)>0$이고 $c<x,\ x\in I$일 때 $f'(x)<0$이다. 즉 f가 $(c-\delta,\ c)$에서 순증가하므로 $(c-\delta,\ c)$의 임의의 점 x에 대하여 $f(x)<f(c)$이다. 이것은 f가 c에서 극솟값을 갖는다는 사실에 모순이다.

5.30 임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}f'(-x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\\&=-\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=-f'(x),\\g'(-x)&=\lim_{h\to0}\frac{g(-x+h)-g(-x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-g(x-h)+g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}=g'(x).\end{aligned}$$

5.31 함수 f를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ x+1 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

그러면 f는 0에서만 미분 가능하고 $f'(0)>0$이지만 0의 임의의 근방에서 증가함수가 아니다.

5.32 f는 다항함수이므로 명백히 임의 횟수로 미분 가능하다. 더욱이 f는 $2n$차 다항함수이므로 f의 $2n$차 테일러 전개 다항식은 f와 일치하게 된다. f의 미분계수를 구하면

$$f(0)=f^{(1)}(0)=f^{(2)}(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,$$
$$f(1)=f^{(1)}(1)=f^{(2)}(1)=\cdots=f^{(n-1)}(1)=0$$

이다.

$f(0)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $x_{1,1}\in(0,\ 1)$이 존재하여 $f'(x_{1,1})=0$을 만족시킨다.

다시 롤의 정리에 의하여 0과 $x_{1,1}$ 사이의 점 $x_{2,1}$, 그리고 $x_{1,1}$과 1 사이의 점 $x_{2,2}$가 존재하여 $f''(x_{2,1})=f''(x_{2,2})=0$을 만족시킨다.

다시 롤의 정리에 의하여

$$0<x_{3,1}<x_{2,1}<x_{3,2}<x_{2,2}<x_{3,3}<1$$

인 점 $x_{3,1},\ x_{3,2},\ x_{3,3}$이 존재하여

$$f^{(3)}(x_{3,1})=f^{(3)}(x_{3,2})=f^{(3)}(x_{3,3})=0$$

을 만족시킨다. 이 과정을 n번 반복하는 수학적 귀납법을 이용하면 문제의 결과를 얻는다.

5.33 함수 f를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases}4x^2\cos x^{-4}+x & \text{if } x\neq0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

그러면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4h^2\sin h^{-4}+h}{h}=1$$

이므로 f는 $\mathbb{R}$의 모든 점에서 미분 가능하며 $f'(0)=1$이다.

이제 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자.

$$f'(x)=\begin{cases}8x\cos x^{-4}-16x^{-3}\sin x^{-4}+1 & \text{if } x\neq0\\ 1 & \text{if } x=0\end{cases}$$

이므로

$$\overline{\lim_{x\to0+}}f'(x)=+\infty,\quad \underline{\lim_{x\to0+}}f'(x)=-\infty$$

이다. 따라서 $(0,\ \delta)$에서 $f'(x)>0$이 되는 x와 $f'(x)<0$이 되는 x가 무한히 많이 존재하므로 도함수의 중간값 성질에 의하여 $(0,\ \delta)$에서 $f'(x)=0$이 되는 x가 무한히 많이 존재한다. 그런데 f는 $(0,\ \delta)$의 임의의 부분구간에서 상수가 아니므로 f는 $(0,\ \delta)$의 무한히 많은 점에서 극값을 가진다. 각 극점에서 f는 국소적으로 최댓값을 갖거나 국소적으로 최솟값을 가지므로 f는 $(0,\ \delta)$에서 증가하는 부분과 감소하는 부분을 모두 가진다. 따라서 f는 $(0,\ \delta)$에서 순증가하지 않는다.

5.34 $\epsilon_n=1/n$이라고 하자. 그러면 양수 δ_1이 존재하여 $0<\xi_1-a<\delta_1$을 만족시키는 임의의 $\xi_1\in I$에 대하여

$$\left|\frac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1-a}-f'(a)\right|<\epsilon_1$$

이 성립한다. 이때 평균값 정리에 의하여 $x_1\in(a,\ \xi_1)$이 존재하여

$$\frac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1-a}=f'(x_1)$$

을 만족시킨다. 다시 $\delta_2<\min\{x_1-a,\ \epsilon_2\}$인 양수 δ_2가 존재하여 $0<\xi_2-a<\delta_2$인 임의의 $\xi_2\in I$에 대하여

$$\left|\frac{f(\xi_2)-f(a)}{\xi_2-a}-f'(a)\right|<\epsilon_2$$

가 성립한다. 이때 평균값 정리에 의하여 $x_2 \in (a,\ \xi_2)$가 존재하여

$$\frac{f(\xi_2)-f(a)}{\xi_2 - a} = f'(x_2)$$

를 만족시킨다.

이제 양수 δ_k와 $a < x_k$인 실수 $x_k \in I$가 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ_{k+1}이 존재하여 $\delta_{k+1} < \min\{x_k - a,\ \epsilon_{k+1}\}$ 을 만족시키면서 $0 < \xi_{k+1} - a < \delta_{k+1}$인 임의의 $\xi_{k+1} \in I$에 대하여

$$\left|\frac{f(\xi_{k+1})-f(a)}{\xi_{k+1} - a} - f'(a)\right| < \epsilon_{k+1}$$

이 성립한다. 이때 평균값 정리에 의하여 $x_{k+1} \in (a,\ \xi_{k+1})$이 존재하여

$$\frac{f(\xi_{k+1})-f(a)}{\xi_{k+1} - a} = f'(x_{k+1})$$

을 만족시킨다. 임의의 k에 대하여 $0 < x_k - a < \delta_k < \epsilon_k$가 성립하므로 $\{x_n\}$은 a에 수렴하고 감소하는 수열이다. 한편 임의의 k에 대하여 $|f'(x_k) - f'(a)| < \epsilon_k$이므로 $\{f'(x_n)\}$은 $f'(a)$에 수렴한다.

이제 양수 ϵ이 새롭게 임의로 주어졌다고 하자. 함수의 극한의 코시 조건에 의하여 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |a_1 - a| < \delta_1$이고 $0 < |a_2 - a| < \delta_1$, $a_1 \in I$, $a_2 \in I$일 때마다

$$|f'(a_1) - f'(a_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 또한 $f'(x_n) \to f'(a)$이므로 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다

$$|f'(x_n) - f'(a)| < \frac{\epsilon}{2},\ \ |x_n - a| < \delta_1$$

을 만족시킨다. 따라서 $0 < |x-a| < \delta_1$임을 가정하면

$$|f'(x) - f'(a)| \le |f'(x) - f'(x_n)| + |f'(x_n) - f'(a)| < \epsilon$$

이 성립하므로 $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$이다. 즉 f'은 a에서 연속이다.

5.35 $g(x) = f(x) - A$라고 하자. 그러면

$$\lim_{x \to +\infty}(g(x) + g'(x)) = \lim_{x \to +\infty}(f(x) - A + f'(x)) = 0$$

이다. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g'(x) = 0\}$이라고 하자. 이제 몇 가지 경우로 나누어 증명하자.

(i) 만약 D가 공집합이거나 위로 유계이면 실수 X가 존재하여 $x > X$일 때마다 $g'(x) \ne 0$이다. 그러면 g'은 $(X,\ \infty)$에서 양의 값만 갖거나 음의 값만 갖는다. [만약 g'이 $(X,\ \infty)$에서 양의 값과 음의 값을 모두 가지면 도함수의 중간값 성질에 의하여 $(X,\ \infty)$에서 $g'(x) = 0$이 되는 점이 존재하게 되기 때문이다.]

$(X,\ \infty)$에서 g'이 양의 값만 가진다면 $(X,\ \infty)$에서 g는 증가함수이므로 단조수렴 정리에 의하여 $x \to +\infty$일 때 $g(x)$는 실수에 수렴하거나 양의 무한대로 발산한다.

$g(x)$가 양의 무한대로 발산한다면 $g'(x)$는 음의 무한대로 발산해야 하므로 모순이다.

$g(x)$가 양의 실수에 수렴한다면 $g'(x)$는 음의 실수에 수렴해야 하므로 모순이다.

$g(x)$가 음의 실수에 수렴한다면 $g'(x)$는 양의 실수에 수렴한다. 그런데 $g'(x)$가 양의 실수에 수렴하면 $g(x)$는 양의 무한대로 발산하게 되므로 모순이다.

따라서 $x \to +\infty$일 때 $g(x)$는 0에 수렴한다. $(X,\ \infty)$에서 g'이 음의 값만 갖는 경우에도 마찬가지로 $g(x)$는 0에 수렴한다.

(ii) D가 위로 유계가 아닌 경우를 증명하자. D의 임의의 점 y에 대하여 $g'(y) = 0$이므로 g는 그 점 위에서 극값을 가진다. 또한 그러한 점 위에서 $|g|$는 극댓값을 가진다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \in D}}(g(y)) = \lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \in D}}(g(y) + g'(y)) = 0$$

이므로 실수 X가 존재하여 $y > X$, $y \in D$일 때마다

$$|g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

$$m = \sup\{|g(y)| \mid y > X,\ y \in D\}$$

라고 하면 $m \le \epsilon/2 < \epsilon$이다. 그런데 $y \in D$일 때 $|g(y)|$는 극댓값이므로, $x > X$인 임의의 x에 대하여 $|g(x)| \le |g(y)|$, $y > X$인 $y \in D$가 존재한다. 이때

$$|g(x)| \le |g(y)| \le m < \epsilon$$

이므로, $x \to +\infty$일 때 $g(x) \to 0$이다.

이상으로 어느 경우에나 $g(x) \to 0$이므로 $f(x) \to A$이다.

※ 만약 로피탈 정리를 이용하여 다음과 같이 풀면 어디에서 잘못되었는가?

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} \\ &= \lim_{x \to +\infty}(f(x) + f'(x)) = A.\end{aligned}$$

5.36 결론에 반하여 $|f'(a)| > 2$인 $a \in [0,\ 2]$가 존재한다고 가정하자. 여기서 $a \ge 1$이라고 해도 일반성을 잃지 않는다. 왜냐하면 $a < 1$인 경우에는 $g(x) = f(2-x)$라고 하고 g에 대하여 논하면 되기 때문이다. 또한 $f(a) \ge 0$이라고 해도 일반성을 잃지 않는다. 왜냐하면 $f(a) < 0$인 경우에는 $g(x) = -f(x)$라고 하고 g에 대하여 논하면 되기 때문이다.

이제 세 가지 경우로 나누어 모순을 유도하자.

(i) $f'(a) < -2$인 경우. 테일러의 정리에 의하여 $h < 0$, $a + h \in [0,\ 2]$인 h에 대하여 $a + h < \xi < a$인 ξ가 존재하여

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2$$

을 만족시킨다. $h = -a$를 대입하면

$$f(0) = f(a) - af'(a) + \frac{1}{2}f''(\xi)a^2$$

$$\geq -af'(a)+\frac{1}{2}f''(\xi)a^2$$

$$> 2a-\frac{1}{2}a^2 \geq \frac{3}{2} \geq 1$$

이므로 $|f(x)| \leq 1$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $f'(a) > 2$이고 $f(a) > -\frac{1}{2}a^2+2a-1$인 경우.

$a < 2$이므로 테일러의 정리에 의하여 $h > 0$, $a+h \in [0,\ 2]$인 h에 대하여 $a < \xi < a+h$인 ξ가 존재하여

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2$$

을 만족시킨다. $h = 2-a$를 대입하면

$$f(2) = f(a)+f'(a)(2-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(2-a)^2$$

$$> -\frac{1}{2}a^2+2a-1+2(2-a)+\frac{1}{2}(2-a)^2$$

$$= -\frac{1}{2}a^2+2a-1+4-2a+2-2a+\frac{1}{2}a^2$$

$$= -2a+5 > 1$$

이므로 $|f(x)| \leq 1$이라는 조건에 모순이다.

(iii) $f'(a) > 2$이고 $f(a) \leq -\frac{1}{2}a^2+2a-1$인 경우.

테일러의 정리에 의하여 $h < 0$, $a+h \in [0,\ 2]$인 h에 대하여 $a+h < \xi < a$인 ξ가 존재하여

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2$$

을 만족시킨다. $h = -a$를 대입하면

$$f(0) = f(a)+f'(a)(-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(-a)^2$$

$$< \frac{1}{2}a^2+2a-1-2a+\frac{1}{2}a^2 = -1$$

이므로 $|f(x)| \leq 1$이라는 조건에 모순이다.

5.37 x가 실수일 때 평균값 정리에 의하여 x와 $x+1$ 사이에 c_x가 존재하여

$$f(x+1)-f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x)$$

를 만족시킨다. 따라서

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = \lim_{x\to+\infty}f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty}f'(x) = 0$$

을 얻는다.

5.38 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 문제의 조건에 의하여 f'은 $[a,\ b]$에서 평등연속이다. 따라서 양수 δ가 존재하여 $0 < |t-x| < \delta$, $x \in [a,\ b]$, $t \in [a,\ b]$일 때마다

$$|f'(x)-f'(t)| < \epsilon$$

이 성립한다. 평균값 정리에 의하여 t와 x 사이에 c가 존재하여

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'(c)$$

를 만족시킨다. 이때 $0 < |c-x| < \delta$이고 $|f'(c)-f'(x)| < \epsilon$이므로, $0 < |t-x| < \delta$, $x \in [a,\ b]$, $t \in [a,\ b]$일 때마다

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right| < \epsilon$$

이 성립한다. (참고로 이러한 부등식 조건을 만족시킬 때 f는 $[a,\ b]$에서 평등미분 가능하다고 말한다.)

5.39 a가 임의로 주어진 양수라고 하자. 그리고 $(a,\ \infty)$에서

$$M_0 = \sup|f(x)|,\ M_1 = \sup|f'(x)|,\ M_2 = \sup|f''(x)|$$

라고 하자. $h > 0$이면 테일러의 정리에 의하여 x와 $x+2h$ 사이에 ξ가 존재하여

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi)$$

를 만족시킨다. 따라서

$$|f'(x)| \leq hM_2+\frac{M_0}{h}$$

을 얻는다. 위 식은 임의의 양수 h에 대하여 성립하므로

$$|f'(x)| \leq \inf\left\{hM_2+\frac{M_0}{h}\,\middle|\,h > 0\right\} = 2\sqrt{M_0M_2}$$

즉 $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$를 얻는다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

를 얻는다. 이때 M_2는 유계이고 $a \to +\infty$일 때 $M_0 \to 0$이므로 $M_1^2 \to 0$이다. 따라서 $x \to +\infty$일 때 $|f'(x)| \to 0$이 성립한다.

5.40 문제의 조건에 의하여 $x > 0$일 때 다음을 얻는다.

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{1}{x}f'(1).$$

5.41 먼저 $x \neq 0$일 때에는

$$f'(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2},$$

$$f''(x) = \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-1/x^2}$$

이다. 이제 자연수 k에 대하여 x에 대한 유리식 $q_k(x)$가 존재하여 q_k의 분모의 차수가 분자의 차수보다 더 크고

$$f^{(k)}(x) = q_k(x)e^{-1/x^2}$$

을 만족시킨다고 하자. 그러면

$$f^{(k+1)}(x) = q_k'(x)e^{-1/x^2}+2x^{-3}q_k(x)e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{x^3q_k'(x)+2q_k(x)}{x^3}e^{-1/x^2}$$

이다. 여기서

$$q_{k+1}(x) = \frac{x^3q_k'(x)+2q_k(x)}{x^3}$$

라고 하면 q_{k+1}은 분모의 차수가 분자의 차수보다 더 큰 유리식이고

$$f^{(k+1)}(x) = q_{k+1}(x)e^{-1/x^2}$$

이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $x \neq 0$일 때 임의의 자연수 n에 대하여 분모의 차수가 분모의 차수보다 더 큰 유리식 q_n이 존재하여

$$f^{(n)}(x)=q_n(x)e^{-1/x^2}$$
이다. 한편
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}-0}{h}=0$$
이고, 자연수 k에 대하여 $f^{(k)}(0)=0$이라고 가정하면
$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{q_k(h)e^{-1/h^2}}{h}=0$$
이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$을 얻는다.

5.42 먼저 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 자연수 n과 $0\le m\le 2^n$인 정수 m에 대하여
$$f\left(\frac{mx+(2^n-m)y}{2^n}\right)\le\frac{mf(x)+(2^n-m)f(y)}{2^n}\qquad\cdots ㉠$$
가 성립함을 보이자.

$n=1$인 경우 m은 0, 1, 2 중 하나의 값을 가질 수 있다. 이 세 경우 모두 자명하게 부등식이 성립한다.

이제 자연수 n과 $0\le m'\le 2^n$인 정수 m'에 대하여
$$f\left(\frac{m'x+(2^n-m')y}{2^n}\right)\le\frac{m'f(x)+(2^n-m')f(y)}{2^n}$$
가 성립한다고 하자. m이 $0\le m\le 2^{n+1}$을 만족시키는 정수라고 하자. 그러면 $m\le 2^n$ 또는 $2^{n+1}-m\le 2^n$이 성립한다.
$m\le 2^n$인 경우는
$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{2}\frac{mx+(2^n-m)y}{2^n}+\frac{y}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{mx+(2^n-m)y}{2^n}\right)+f(y)\right)\\
&\le\frac{1}{2}\frac{mf(x)+(2^n-m)f(y)}{2^n}+\frac{f(y)}{2}\\
&=\frac{mf(x)+(2^{n+1}-m)f(y)}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$
가 성립한다. $2^{n+1}-m\le 2^n$인 경우는 위 부등식의 x와 y를 바꾸어 쓰면 동일한 부등식이 증명된다. 이로써 ㉠이 증명되었다.

이제 $0\le r\le 1$인 실수 r가 임의로 주어졌다고 하자. 분모가 2의 거듭제곱인 분수들의 모임
$$\left\{\frac{k}{2^n}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ n\in\mathbb{N}\right\}$$
은 $\mathbb{R}$에서 조밀하므로, 정수열 $\{m_n\}$이 존재하여
$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{2^n}=r,\ 0\le m_n\le 2^n$$
을 만족시킨다. 이때 부등식 ㉠에 의하여 임의의 n에 대하여
$$f\left(\frac{m_nx+(2^n-m_n)y}{2^n}\right)\le\frac{m_nf(x)+(2^n-m_n)f(y)}{2^n}$$
가 성립한다. f는 연속이므로 양변에 $n\to+\infty$인 극한을 취하면
$$f(rx+(1-r)y)\le rf(x)+(1-r)f(y)$$
를 얻는다. 따라서 f는 볼록함수이다.

5.43 $(a,\ b)$의 점 x 중에서 f의 좌도함수나 우도함수가 불연속인 점 x들의 모임을 E라고 하자. 그러면 정리 5.6.9에 의하여 E는 가산집합이다. $x_0\in(a,\ b)\setminus E$이고 $x<x_0$이라고 하자. 그러면 정리 5.6.9에 의하여
$$D_Rf(x)\le D_Lf(x_0)\le D_Rf(x_0)$$
이 성립한다. $D_Rf(x)$는 x_0에서 연속이므로, 위 식에 $x\to x_0$인 극한을 취하면
$$D_Rf(x_0)\le D_Lf(x_0)\le D_Rf(x_0)$$
을 얻는다. 즉 $(a,\ b)\setminus E$의 임의의 점 x_0에서 f가 미분 가능하다. 그러므로 $(a,\ b)$에서 f가 미분 불가능한 점은 E의 점 뿐이다.

5.44 $f'(x_1)<0$을 만족시키는 $(a,\ b)$의 점 x_1이 존재한다고 하자. 그리고 $y\in(f'(x_1),\ 0)$이라고 하자. 도함수의 중간값 성질에 의하여 a와 b 사이에 점 x_y가 존재하여 $f'(x_y)=y<0$을 만족시킨다. 따라서 $f'(x)<0$인 점 x가 $(a,\ b)$에 존재하면, 그러한 점 x의 개수는 $(a,\ b)$에서 비가산이다. 이것은 모순이므로 $(a,\ b)$의 임의의 점 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

5.45 $f'(x)<0$인 점 x가 $(a,\ b)$에 많아야 가산 개 존재하므로 문제 5.44에 의하여 $(a,\ b)$의 임의의 점 x에서 $f'(x)\ge 0$이다. 마찬가지로 $f'(x)>0$인 점 x가 $(a,\ b)$에 많아야 가산 개 존재하므로 $(a,\ b)$의 임의의 점 x에서 $f'(x)\le 0$이다. 따라서 $(a,\ b)$의 임의의 점 x에서 $f'(x)=0$이므로 f는 상수함수이다.

5.46 a가 유리수인 경우와 무리수인 경우로 나누어 증명하자.

(i) a가 0과 1 사이에 있는 유리수라고 하자. 그리고 $a=q/p$이며 q와 p가 서로소인 자연수라고 하자. 그러면 a에 수렴하고 모든 항이 $(0,\ 1)$에 속하는 무리수열 $\{x_n\}$이 존재한다. 이때
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1/p}{x_n-a}\right|=+\infty$$
이므로 f는 a에서 미분 불가능하다.

(ii) a가 0과 1 사이에 있는 무리수라고 하자. 그러면 a에 수렴하고 모든 항이 $(0,\ 1)$에 속하며 $y_n\ne a$인 무리수열 $\{y_n\}$이 존재한다. 이때
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}=0$$
이다. 한편 a의 십진법 소수 전개를 $a=0.d_1d_2d_3\cdots$이라고 하자. 그리고 유리수열 $\{z_n\}$을
$$z_n=0.d_1d_2d_3\cdots d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{10^k}$$
로 정의하자. 그러면 $\{z_n\}$은 a에 수렴한다.

$a\ne 0$이므로 $k=\min\{n\,|\,d_n\ne 0\}$이 존재하고, $n\ge k$인 임의의 자연수 n에 대하여
$$|z_n-a|=0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{ times}}d_{n+1}d_{n+2}\cdots<\frac{1}{10^n},$$

$$\left|f(z_n)-f(a)\right|=\left|f(z_n)\right|\geq \frac{1}{10^k}$$

이다. 따라서

$$\left|\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\right|>10^{n-k}\geq 1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\right|\geq 1$$

이다. 따라서 극한의 수열 판정법에 의하여 f는 a에서 미분 불가능하다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 16일