맛있는 해석학 4판 단원 마무리 문제 풀이

04. 실함수의 극한

http://www.aliceinmathland.com

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

4.1 (1) 참
(2) 거짓
(3) 거짓

4.2 (1) 거짓
(2) 참
(3) 참

4.3 점 a가 f의 정의역에 속하면서 동시에 정의역이 집적점인 경우에는, a에서 f가 연속일 필요충분조건은 a에서 f의 함숫값과 극한값이 같은 것이 된다. 만약 a가 f가 연속이라는 조건이 없다면 a에서 f의 함숫값과 극한값은 아무런 관계가 없다.

4.4 극한의 유일성을 보장할 수 없게 된다.

예를 들어 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=2$로 주어졌다고 하자. 이제 0에서 f가 7에 수렴함을 보일 것이다. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=0.5$라고 하면 $0<|x-0|<\delta$를 만족시키는 정의역의 점 x는 존재하지 않으므로 조건문

$$0<|x-0|<\delta \to |f(x)-7|<\epsilon$$

은 참이다. [가정이 거짓이면 결론에 상관없이 조건문은 참이다. 이러한 명제를 빈참명제라고 부른다.] 같은 방법으로 임의의 실수 L에 대하여, 0에서 f가 L에 수렴함을 보일 수 있다.

4.5 극한의 유일성을 보장할 수 없게 된다.

예를 들어 함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$가 $f(x)=2$로 주어졌다고 하자. 이제 $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to 7$임을 보일 것이다. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $X=2$라고 하면 $x>X$를 만족시키는 정의역의 점 x는 존재하지 않으므로 조건문

$$x>X\to|f(x)-7|<\epsilon$$

은 참이다. 같은 방법으로 임의의 실수 L에 대하여, $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to L$임을 보일 수 있다.

4.6 (1) 0
(2) 3
(3) $\dfrac{5}{3}$
(4) 0
(5) $-\infty$
(6) -1

4.7 (1) 1

$\because$ 0이 아닌 임의의 x에 대하여 $\sin\frac{1}{x}\le 1$이고

$$x_n=\frac{2}{(1+4n)\pi}\text{일 때 } \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=1\text{이다.}$$

(2) 1

$\because$ 임의의 x에 대하여 $\sin x\le 1$이고

$$x_n=\left(-2n-\frac{3}{2}\right)\pi\text{일 때 } \lim_{n\to\infty}\sin x_n=1\text{ 이다.}$$

(3) $-\infty$

$$\because\ x_n=1+\frac{1}{n}\text{일 때 } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}==-\infty\text{이다.}$$

(4) 0

$\because$ 임의의 x에 대하여 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)\ge 0$이고

$$x_n=\pi n\text{일 때 } \lim_{n\to\infty}\chi_{\mathbb{Q}}(x_n)=0\text{이다.}$$

4.8 (1) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\epsilon/5$라고 하고 $0<|x-1|<\delta$임을 가정하면

$$|(5x-3)-2|=5|x-1|<5\delta=\epsilon$$

이 성립한다.

(2) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\{2\epsilon,\ 4\}$라고 하고

$0<|x-5|<\delta$임을 가정하면

$$\begin{aligned}|\sqrt{x-1}-2|&=\left|\frac{x-1-4}{\sqrt{x-1}+2}\right|=\frac{|x-5|}{\sqrt{x-1}+2}\\&\le\frac{|x-5|}{2}<\frac{1}{2}\delta=\epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다.

(3) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{\frac{3}{20}\epsilon,\ \frac{1}{2}\right\}$이라고 하고 $0<|x-(-2)|<\delta$임을 가정하면

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{13}\right|&=\left|\frac{4x^2-3-13}{\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{13}}\right|\\&\le\frac{4|x^2-4|}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}|x-2|\,|x+2|\\&\le\frac{4}{3}\times5|x+2|<\frac{20}{3}\delta\le\epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다.

(4) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\epsilon}{4}\right\}$이라고 하고 $0<|x-1|<\delta$임을 가정하면

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x^2-x}-3\right|=2\left|\frac{x-1}{x}\right|\le4|x-1|<4\delta\le\epsilon$$

이 성립한다.

4.9 (1) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = 1/\sqrt{|Y|+1}$이라고 하고 $0<|x|<\delta$임을 가정하면

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = |Y|+1 \ge Y$$

가 성립한다.

(2) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{\frac{1}{2|Y|},\ 1\right\}$이라고 하고 $0<1-x<\delta$임을 가정하면

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} < -\frac{1}{(x+1)\delta} < -\frac{1}{2\delta} = -|Y| \le Y$$

가 성립한다.

(3) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $\delta = \min\left\{\frac{1}{|Y+1|},\ \frac{\pi}{2}\right\}$라고 하고 $0<x<\delta$임을 가정하면

$$\frac{1}{\sin x} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = |Y|+1 \ge Y$$

가 성립한다.

(4) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자.

$$\delta = \min\left\{\sqrt{\frac{2}{|Y|+1}},\ \frac{\pi}{2}\right\}$$

라고 하고 $0<|x|<\delta$임을 가정하면

$$\frac{1}{1-\cos x} \ge \frac{2}{x^2} > \frac{2}{\delta^2} = |Y|+1 \ge Y$$

가 성립한다.

※ 참고로 x가 충분히 작은 양수일 때 삼각함수의 테일러 전개에 의하여 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\sin x &\le x, & \cos x &\le 1, \\
\sin x &\ge x - \frac{x^3}{3!}, & \cos x &\ge 1 - \frac{x^2}{2!} \\
\sin x &\le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, & \cos x &\le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\sin x &\ge x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, & \cos x &\ge 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

4.10 (1) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $X = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$이라고 하고 $x>X$임을 가정하면

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{X^2} = \epsilon$$

이 성립한다.

(2) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $X = -\sqrt{2|Y|+2}$라고 하고 $x<X$임을 가정하면

$$\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1 \ge x^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 > \frac{1}{2}X^2 > Y$$

가 성립한다.

(3) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$$X = \min\left\{-\frac{3}{\epsilon},\ -11\right\}$$

이라고 하고 $x<X$임을 가정하면

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-x-5} - 2\right| = \left|\frac{2x+11}{x^2-x+5}\right| = \left|\frac{2+11/x}{x-1+5/x}\right|$$
$$\le \frac{|2+11/x|}{|x-1|} \le \frac{3}{|x-1|} \le \frac{3}{|x|} < \frac{3}{|X|} \le \epsilon$$

이 성립한다.

(4) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$$X = \max\left\{\frac{16}{\epsilon^2},\ 4\right\}$$

이라고 하고 $x>X$임을 가정하면

$$\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - (-1)\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right| \le \frac{4}{\sqrt{x}} < \frac{4}{\sqrt{X}} \le \epsilon$$

이 성립한다.

4.11 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 함수 g가 B에서 평등연속이므로 양수 δ_1이 존재하여 $|y_1-y_2|<\delta_1$, $y_1 \in B$, $y_2 \in B$일 때마다 $|g(y_1)-g(y_2)|<\epsilon$이 성립한다. 함수 f가 A에서 평등연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x_1-x_2|<\delta$, $x_1\in A$, $x_2 \in A$일 때마다 $|f(x_1)-f(x_2)|<\delta_1$을 만족시킨다. 이때 동일한 δ에 대하여 $|x_1-x_2|<\delta$, $x_1\in A$, $x_2\in A$일 때마다

$$|g(f(x_1))-g(f(x_2))|<\epsilon$$

이 성립하므로 함수 $g\circ f$는 A에서 평등연속이다.

4.12 단조수렴 정리에 의하여 a에서 f의 우극한이 존재하고 b에서 f의 좌극한이 존재한다. $f(a) := f(a+)$, $f(b) := f(b-)$라고 정의하면 f는 $[a,\ b]$에서 연속인 함수가 된다.

4.13 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $\delta = \epsilon$이라고 하자. $|x_1-x_2|<\delta$임을 가정하면

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \big||x_1|-|x_2|\big| \le |x_1-x_2| < \delta = \epsilon$$

이므로 f는 $[-1,\ 1]$에서 평등연속이다.

(다른 방법의 증명) f가 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 $[-1,\ 1]$이 컴팩트이므로 f는 $[-1,\ 1]$에서 평등연속이다.

4.14 결론에 반하여 실수 r가 존재하여 f가 r에서 연속이라고 가정하자.

(i) r가 유리수인 경우, 무리수의 조밀성에 의하여 r에 수렴하고 모든 항이 무리수인 수열 $\{r_n\}$이 존재한다. 이때 수열 판정법에 의하여

$$1 = f(r) = \lim_{x\to r} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = 0$$

이므로 모순이다.

(ii) r가 무리수인 경우, 유리수의 조밀성에 의하여 r에 수렴하고 모든 항이 유리수인 수열 $\{q_n\}$이 존재한다. 이때 수열 판정법에 의하여

$$0 = f(r) = \lim_{x\to r} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = 1$$

이므로 모순이다.

따라서 f는 r에서 연속이 아니다. r는 임의의 실수이므로 f는 어느 점에서도 연속이 아니다.

(다른 방법의 증명) 결론에 반하여 실수 r가 존재하여 f가 r에서 연속이라고 가정하자. $\epsilon=1$이라고 하고, 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자.

(i) r가 유리수인 경우, 무리수의 조밀성에 의하여 $r<x<r+\delta$인 무리수 x가 존재한다. 이때 $|r-x|<\delta$이지만

$$|f(r)-f(x)|=|1-0|=1\geq\epsilon$$

이므로 f는 r에서 연속이 아니다.

(ii) r가 무리수인 경우, 유리수의 조밀성에 의하여 $r<x<r+\delta$인 유리수 x가 존재한다. 이때 $|r-x|<\delta$이지만

$$|f(r)-f(x)|=|0-1|=1\geq\epsilon$$

이므로 f는 r에서 연속이 아니다.

따라서 f는 r에서 연속이 아니다. r는 임의의 실수이므로 f는 어느 점에서도 연속이 아니다.

4.15 결론에 반하여 f가 $[0,\ 1]$에서 상수함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $[0,\ 1]$의 두 점 $x_1,\ x_2$가 존재하여 $f(x_1)\neq f(x_2)$가 성립한다. 이때 무리수의 조밀성에 의하여 $f(x_1)$과 $f(x_2)$ 사이에 무리수 C가 존재한다. f가 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 중간값 정리에 의하여 $f(x)=C$를 만족시키는 점 x가 x_1과 x_2 사이에 존재한다. 그런데 C는 무리수이고 $x\in[0,\ 1]$이므로 이것은 모순이다. 따라서 f는 $[0,\ 1]$에서 상수함수이다.

4.16 (1) 최대정수함수의 성질에 의하여 실수 x에 대하여

$$\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{x}$$

이므로

$$\frac{b}{a}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)\leq\lim_{x\to0+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\leq\lim_{x\to0+}\frac{x}{a}\frac{b}{x}=\frac{b}{a}$$

이다. 따라서 조임 정리에 의하여 문제의 등식을 얻는다.

(2) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $\delta=a$라고 하자. 그러면 $0<x<\delta$를 만족시키는 실수 x에 대하여

$$\left[\frac{x}{a}\right]=0$$

이므로

$$\left|\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}-0\right|=|0-0|=0<\epsilon$$

을 얻는다.

4.17 (1) 평등연속이다.
(2) $x=0$에서 연속이 아니고, 그 외의 점에서는 연속이다.
(3) 정수인 점에서 연속이 아니고, 그 외의 점에서는 연속이다.
(4) 정수인 점에서 연속이 아니고, 그 외의 점에서는 연속이다.

4.18 x가 임의로 주어진 실수라고 하자. 그러면 x에 수렴하는 유리수열 $\{r_n\}$이 존재한다. 이때 연속함수의 성질과 수열 판정법에 의하여

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}2=2$$

가 성립한다.

(다른 풀이) 문제 4.44-(2)에 의하여

$$f(\mathbb{R})=f(\overline{\mathbb{Q}})\subseteq\overline{f(\mathbb{Q})}=\overline{\{2\}}=\{2\}$$

이므로 임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $f(x)=2$이다.

4.19 $(-1,\ 1)$의 원소 r가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 수열 $\{r_n\}$을 $r_1=r,\ r_{n+1}=(r_n)^2$으로 정의하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $f(r_n)=f(r)$가 성립한다. f가 0에서 연속이고 $r_n\to0$이므로 수열 판정법에 의하여

$$f(r)=\lim_{n\to\infty}f(r)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(0)$$

이다. 즉 $(-1,\ 1)$의 임의의 점 r에 대하여 $f(r)=f(0)$이므로 f는 $(-1,\ 1)$에서 상수함수이다.

4.20 $I=[a,\ b]$라고 하자. 그리고 $g(x)=f(x)-x$라고 하자. 그러면 $g(a)\geq0,\ g(b)\leq0$이고 g가 연속이므로 중간값 정리에 의하여 $g(p)=0$인 점 p가 $[a,\ b]$에 존재한다. 이때 $f(p)-p=g(p)=0$이므로 $f(p)=p$가 성립한다.

I가 구간이 아닌 경우에는 $f(p)=p$인 점 p가 존재하지 않을 수도 있다. 예컨대 $I=[-2,\ -1]\cup[1,\ 2],\ f(x)=-x$라고 하면 $f(p)=p$를 만족시키는 점 p는 I에 존재하지 않는다.

4.21 함수 f가 1에서 연속임을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하고 $\delta=\epsilon$이라고 하자. 그리고 $|x-1|<\delta$라고 가정하자. 만약 x가 유리수라면

$$|f(x)-f(1)|=|x-1|<\delta=\epsilon$$

이고 x가 무리수라면

$$|f(x)-f(1)|=|(2-x)-1|=|1-x|<\delta=\epsilon$$

이다. 따라서 f는 1에서 연속이다.

이제 $r\neq1$이라고 하자. 그러면 r에 수렴하는 유리수열 $\{q_n\}$과 r에 수렴하는 무리수열 $\{r_n\}$이 존재한다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}f(q_n)=r\neq2-r=\lim_{n\to\infty}f(r_n)$$

이므로 수열 판정법에 의하여 f는 r에서 연속이 아니다.

4.22 (1) 문제 2.16에 의하여 임의의 x에 대하여

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

가 성립한다. 그런데 절댓값 함수는 연속이고 연속함수의 합성은 연속이므로 h도 연속이다.

(2) 임의의 x에 대하여

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

가 성립한다. 그런데 절댓값 함수는 연속이고 연속함수의 합성은 연속이므로 h도 연속이다.

4.23 (1) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 I_1에서 연속

이므로 양수 δ_1이 존재하여 $|x-y|<\delta_1$, $x\in I_1$, $y\in I_1$일 때마다

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. f가 I_2에서 연속이므로 양수 δ_2가 존재하여 $|x-y|<\delta_2$, $x\in I_2$, $y\in I_2$일 때마다

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

이제 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ 라고 하자. 그리고 $|x-y|<\delta$, $x\in I_1\cup I_2$, $y\in I_1\cup I_2$라고 하자. 만약 x와 y가 모두 I_1의 원소이거나, x와 y가 모두 I_2의 원소이면

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

이 성립한다. 이제 $x\in I_1$이고 $y\in I_2$라고 하자. I_1과 I_2가 구간이므로 x와 y 사이에 $z\in I_1\cap I_2$가 존재한다. 이때 $|x-z|<\delta$, $|y-z|<\delta$이므로

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|\\&\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 f는 $I_1\cup I_2$에서 평등연속이다.

(2) I_1과 I_2가 구간이라는 조건이 빠지면 f는 $I_1\cup I_2$에서 평등연속이 아닐 수도 있다. 예를 들어 $I_1=[0,\ 1)\cup[2,\ 3]$, $I_2=[1,\ 3]$이라고 하고 함수 $f:I_1\cup I_2\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x<1\\ 0 & \text{if } x\ge 1\end{cases}$$

이라고 하자. 그러면 f는 I_1과 I_2에서 평등연속이지만 $I_1\cup I_2$에서는 연속이 아니다.

(3) $I_1\cap I_2\ne\varnothing$이라는 조건이 빠지면 f는 $I_1\cup I_2$에서 평등연속이 아닐 수도 있다. 예를 들어 $I_1=[0,\ 1)$, $I_2=[1,\ 2]$이라고 하고 함수 $f:I_1\cup I_2\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x<1\\ 0 & \text{if } x\ge 1\end{cases}$$

이라고 하자. 그러면 f는 I_1과 I_2에서 평등연속이지만 $I_1\cup I_2$에서는 연속이 아니다.

※ 이 문제에서 ‘구간’이라는 조건을 ‘닫힌집합’으로 바꾸면 어떻게 될까? 그러면 f가 I_1과 I_2에서 평등연속일지라도 $I_1\cup I_2$에서는 평등연속이 아닐 수 있다. 예컨대

$$I_1=\bigcup_{i=2}^{\infty}\left[2n-1,\ 2n-\frac{1}{n}\right],\ I_2=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$$

이라고 하고,

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in I_1\\ 2 & \text{if } x\in I_2\end{cases}$$

라고 하면 f는 I_1과 I_2에서 각각 평등연속이지만 $I_1\cup I_2$에서는 평등연속이 아니다.

4.24 $a_m>0$인 경우만 증명해도 충분하다. (만약 $a_m<0$인 경우는 $g(x)=-f(x)$라고 하고 g에 대하여 생각하면 된다.) 그러면 $a_0<0$이다. 따라서

$$f(0)=a_0<0$$

이다. 한편

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

이므로 양수 b가 존재하여 $f(b)>0$이며 음수 a가 존재하여 $f(a)>0$이다. 따라서 중간값 정리에 의하여 양수 $\beta\in(0,\ b)$와 음수 $\alpha\in(a,\ 0)$이 존재하여 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$을 만족시킨다.

4.25 결론에 반하여 $\{r_n\}$이 양의 무한대로 발산하지 않는다고 가정하자. 그러면 $\{r_n\}$은 수렴하는 부분수열 $\{r_{n_k}\}$를 가진다. $\{r_{n_k}\}$는 모든 항이 자연수인 수열이므로 자연수에 수렴한다. $\{r_{n_k}\}$의 극한을 r라고 하자. $\{s_{n_k}/r_{n_k}\}$는 $\{q_n\}$의 부분수열이므로 α에 수렴한다. 이때

$$\lim_{k\to\infty}s_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}r_{n_k}=\alpha\lim_{k\to\infty}r_{n_k}=\alpha r$$

이고 r는 자연수이므로 αr는 무리수이다. 즉 $\{s_{n_k}\}$는 무리수에 수렴한다. 그러나 $\{s_{n_k}\}$의 모든 항은 자연수이므로 무리수에 수렴할 수 없다. 이것은 모순이다.

여기서 $\{r_n\}$과 $\{s_n\}$의 역할을 바꾸면 $s_n\to\infty$도 증명된다.

4.26 [$\Rightarrow$] f가 E에서 연속이라고 하자. 그리고 $\{x_n\}$이 모든 항이 E에 속하는 코시 수열이라고 하자. $\{x_n\}$은 코시 수열이므로 수렴하고, E가 닫힌집합이므로 $\{x_n\}$의 극한은 E에 속한다. $\{x_n\}$의 극한을 x라고 하자. f는 x에서 연속이므로 $\{f(x_n)\}$은 $f(x)$에 수렴한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$은 코시 수열이다.

[$\Leftarrow$] 모든 항이 E에 속하는 임의의 코시 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\{f(x_n)\}$도 코시 수열이 된다고 하자. 이제 결론에 반하여 f가 E의 점 x에서 연속이 아니라고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여 임의의 자연수 n에 대하여 $x_n\in E$가 존재하여

$$|x_n-x|<\frac{1}{n}\quad\text{그리고}\quad|f(x_n)-f(x)|\ge\epsilon$$

을 만족시킨다. 이때 $\{x_n\}$은 x에 수렴하는 코시 수열이 된다. 수열 $\{y_n\}$을

$$y_n=\begin{cases}x_n & \text{if } n \text{ is even}\\ x & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases}$$

으로 정의하면 $\{y_n\}$도 코시 수열이고 x에 수렴한다. 가정에 의하여 $\{f(y_n)\}$도 코시 수열이 된다. 그런데 임의의 자연수 N에 대하여 $|f(y_{N+1})-f(y_N)|\ge\epsilon$이므로 $\{f(y_n)\}$이 코시 수열이라는 데에 모순이다. 따라서 f가 연속이 아닌 점 x는 E에 존재하지 않는다.

4.27 다음 풀이에서 x_n은 f의 정의역의 원소라고 약속한다.

(1) $a=+\infty$, $L\in\mathbb{R}$인 경우

[$\Rightarrow$] $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to L$이라고 하자. 그리고 양의 무한대로 발산하는 수열 $\{x_n\}$이 임의로 주어졌다고 하자. 또한 양

수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 실수 X가 존재하여 $x>X$일 때마다 $|f(x)-L|<\epsilon$이 성립한다. 한편 $x_n \to +\infty$이므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $x_n>X$가 성립한다. 즉 $n>N$일 때마다 $|f(x_n)-L|<\epsilon$이 성립한다.

[⇐] $x \to +\infty$일 때 $f(x) \nrightarrow L$이라고 하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여 임의의 실수 X에 대하여 $x>X$인 x가 존재하여 $|f(x)-L| \ge \epsilon$을 만족시킨다. 여기서 X는 임의의 실수이므로 임의의 자연수로 바꾸어도 동일한 결론을 얻는다. 즉 임의의 자연수 n에 대하여 $x_n>n$인 x_n이 존재하여 $|f(x_n)-L| \ge \epsilon$을 만족시킨다. 여기서 $x_n \to +\infty$이지만 $f(x_n) \nrightarrow L$이다.

(2) $a=-\infty$, $L=+\infty$인 경우

[⇒] $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$라고 하자. 그리고 음의 무한대로 발산하는 수열 $\{x_n\}$이 임의로 주어졌다고 하자. 또한 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 실수 X가 존재하여 $x<X$일 때마다 $f(x)>Y$가 성립한다. 한편 $x_n \to -\infty$이므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $x_n<X$가 성립한다. 즉 $n>N$일 때마다 $f(x_n)>Y$가 성립하므로 $f(x_n) \to +\infty$이다.

[⇐] $x \to -\infty$일 때 $f(x) \nrightarrow +\infty$라고 하자. 그러면 실수 Y가 존재하여 임의의 실수 X에 대하여 $x<X$인 x가 존재하여 $f(x) \le Y$를 만족시킨다. 여기서 X는 임의의 실수이므로 임의의 음의 정수로 바꾸어도 동일한 결론을 얻는다. 즉 임의의 자연수 n에 대하여 $x_n<-n$인 x_n이 존재하여 $f(x_n) \le Y$를 만족시킨다. 여기서 $x_n \to -\infty$이지만 $f(x_n) \nrightarrow +\infty$이다.

(3) $a \in \mathbb{R}$, $L=+\infty$인 경우

[⇒] $x \to a$일 때 $f(x) \to +\infty$라고 하자. 그리고 a에 수렴하지만 각 항이 a는 아닌 수열 $\{x_n\}$이 임의로 주어졌다고 하자. 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$일 때마다 $f(x)>Y$가 성립한다. $x_n \to a$이므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $0<|x_n-a|<\delta$가 성립한다. 즉 $n>N$일 때마다 $f(x_n)>Y$가 성립하므로 $f(x_n) \to +\infty$이다.

[⇐] $x \to a$일 때 $f(x) \nrightarrow +\infty$라고 하자. 그러면 실수 Y가 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $0<|x-a|<\delta$인 x가 존재하여 $f(x) \le Y$를 만족시킨다. 여기서 δ는 임의의 양수이므로, 임의의 자연수 n에 대하여 $0<|x_n-a|<1/n$인 x_n이 존재하여 $f(x_n) \le Y$를 만족시킨다. 이때 $x_n \to a$, $x_n \ne a$이지만 $f(x_n) \nrightarrow +\infty$이다.

(4) $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $x \to a-$인 경우

[⇒] $x \to a-$일 때 $f(x) \to L$이라고 하자. 그리고 $\{x_n\}$이 a에 수렴하고 $x_n<a$인 임의의 수열이라고 하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 양수 δ가 존재하여 $0<a-x<\delta$일 때마다 $|f(x)-L|<\epsilon$이 성립한다. $x_n \to a$, $x_n<a$이므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $0<a-x_n<\delta$를 만족시킨다. 즉 $n>N$일 때마다 $|f(x_n)-L|<\epsilon$이 성립한다.

[⇐] $x \to a-$일 때 $f(x) \nrightarrow L$이라고 하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $0<a-x<\delta$인 x가 존재하여 $|f(x)-L| \ge \epsilon$을 만족시킨다. 여기서 δ는 임의의 양수이므로, 임의의 자연수 n에 대하여 $0<a-x_n<1/n$인 x_n이 존재하여 $|f(x_n)-L| \ge \epsilon$을 만족시킨다. 여기서 $x_n \to a$, $x_n<a$이지만 $f(x_n) \nrightarrow L$이다.

4.28 (1) $a=+\infty$, $L=+\infty$, $M=+\infty$인 경우

실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists X_1 \in \mathbb{R} \ : (x>X_1 \to f(x)>|Y|+1),$$
$$\exists X_2 \in \mathbb{R} \ : (x>X_2 \to g(x)>|Y|+1)$$

이다. $X=\max\{X_1, X_2\}$라고 하면 $x>X$일 때마다

$$f(x)+g(x)>2|Y|+2 \ge Y,$$
$$f(x)g(x)>(|Y|+1)^2 \ge Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to +\infty$, $f(x)g(x) \to +\infty$이다.

(2) $a=-\infty$, $L=+\infty$, $M \in \mathbb{R}$인 경우

먼저 $M \ge 0$인 경우를 증명하자.

실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists X_1 \in \mathbb{R} \ : (x<X_1 \to f(x)>|Y|+1),$$
$$\exists X_2 \in \mathbb{R} \ : (x<X_2 \to g(x)>M-1)$$

이다. $X=\min\{X_1, X_2\}$라고 하면 $x<X$일 때마다

$$f(x)+g(x)>|Y|+1+M-1 \ge |Y| \ge Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to +\infty$이다.

다시 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하고 $M \ne 0$이라고 하자.

$$\exists X_1 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_1 \to f(x)>\frac{2|Y|}{M}+|Y|\right),$$
$$\exists X_2 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_2 \to g(x)>M-\frac{1}{2}M\right)$$

이다. $X=\min\{X_1, X_2\}$라고 하면 $x<X$일 때마다

$$f(x)g(x)>\frac{1}{2}\left(\frac{2|Y|}{M}+|Y|\right)M \ge |Y| \ge Y$$

이므로 $f(x)g(x) \to +\infty$이다.

다음으로 $M<0$인 경우를 증명하자.

실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists X_1 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_1 \to f(x)>Y-\frac{3}{2}M\right),$$
$$\exists X_2 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_2 \to g(x)>M+\frac{1}{2}M\right)$$

이다. $X=\min\{X_1, X_2\}$라고 하면 $x<X$일 때마다

$$f(x)+g(x)>\left(Y-\frac{3}{2}M\right)+\frac{3}{2}M=Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to +\infty$이다.

다시 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists X_1 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_1 \to f(x)>-\frac{2|Y|}{M}\right),$$
$$\exists X_2 \in \mathbb{R} \ : \left(x<X_2 \to g(x)<M-\frac{1}{2}M\right)$$

이다. $X=\min\{X_1, X_2\}$라고 하면 $x<X$일 때마다

$$f(x)\{-g(x)\} > \left(-\frac{2|Y|}{M}\right)\left(-\frac{1}{2}M\right) = |Y|$$

이므로

$$f(x)g(x) < -|Y| \le Y$$

이다. 따라서 $f(x)g(x) \to -\infty$이다.

(3) $a \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$, $M = -\infty$인 경우

먼저 $x \to a$일 때 $f(x)+g(x) \to -\infty$임을 증명하자. 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists\, \delta_1 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < -|Y|),$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) < -|Y|)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$f(x)+g(x) < -2|Y| \le Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to -\infty$이다.

다음으로 $f(x)g(x) \to +\infty$임을 증명하자. 다시 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자 그러면

$$\exists\, \delta_1 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < -|Y|-1),$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) < -|Y|-1)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$f(x)g(x) = \{-f(x)\}\{-g(x)\} > (|Y|+1)^2 \ge |Y| \ge Y$$

이므로 $f(x)g(x) \to +\infty$이다.

(4) $a \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$, $M \in \mathbb{R}$인 경우

먼저 $M \ge 0$인 경우를 증명하자.

실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists\, \delta_1 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < |Y| - \frac{3}{2}M\right),$$
$$\exists\, \delta_2 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) < M + \frac{1}{2}M\right)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$f(x)+g(x) < |Y| \le Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to -\infty$이다.

다시 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하고 $M \ne 0$이라고 하자. 그러면

$$\exists\, \delta_1 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < -\frac{2|Y|}{M}\right),$$
$$\exists\, \delta_2 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) > M - \frac{1}{2}M\right)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$\{-f(x)\}g(x) > \frac{2|Y|}{M} \cdot \frac{1}{2}M = |Y| \ge -Y$$

즉 $f(x)g(x) < Y$이므로 $f(x)g(x) \to -\infty$이다.

다음으로 $M < 0$인 경우를 증명하자.

실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists\, \delta_1 > 0 : \left(0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < |Y| - \frac{1}{2}M\right),$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 : \left(0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) < M - \frac{1}{2}M\right)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$f(x)+g(x) < |Y| \le Y$$

이므로 $f(x)+g(x) \to -\infty$이다.

다시 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists\, \delta_1 > 0 : \left(0 < |x-a| < \delta_1 \to f(x) < \frac{2Y}{M}\right),$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 : \left(0 < |x-a| < \delta_2 \to g(x) < M - \frac{1}{2}M\right)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$f(x)g(x) = \{-f(x)\}\{-g(x)\} > \left(\frac{-2Y}{M}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}M\right) = Y$$

이므로 $f(x)g(x) \to +\infty$이다.

4.29 (1) $a = +\infty$, $L = +\infty$인 경우

$x \to +\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$라고 하자. 그리고 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 실수 X가 존재하여 $x > X$일 때마다 $f(x) > Y$가 성립한다. 이때 $g(x) \ge f(x)$이므로 동일한 실수 X에 대하여 $x > X$일 때마다 $g(x) > Y$가 성립한다. 따라서 $x \to +\infty$일 때 $g(x) \to +\infty$이다.

(2) $a = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$인 경우

만약 $M = +\infty$이면 자명하게 정리의 결론을 얻는다. 따라서 M이 실수라고 하자.

결론에 반하여 $M < L$이라고 하자. 그리고 $\epsilon = (L-M)/2$라고 하자. 그러면 ϵ은 양수이므로

$$\exists\, X_1 \in \mathbb{R} : (x < X_1 \to |f(x)-L| < \epsilon),$$
$$\exists\, X_2 \in \mathbb{R} : (x < X_2 \to |g(x)-M| < \epsilon)$$

이다. $X = \min\{X_1, X_2\}$ 라고 하면 $x < X$일 때마다

$$g(x) < M + \epsilon = L - \epsilon < f(x)$$

이므로 $f(x) \le g(x)$라는 조건에 모순이다. 따라서 $L \le M$이다.

(3) $a \in \mathbb{R}$, $M = -\infty$인 경우

$x \to a$일 때 $g(x) \to -\infty$라고 하자. 그리고 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $g(x) < Y$가 성립한다. 이때 $f(x) \le g(x)$이므로 동일한 양수 δ에 대하여 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $f(x) < Y$가 성립한다. 따라서 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$이다.

(4) $a \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$인 경우

$x \to a$일 때 $g(x) \to M$이라고 하자. 함수 g가 a의 근방에서 유계이고 $f(x) \le g(x)$이므로 $f(x)$는 a의 근방에서 위로 유계이다. 따라서 $L \ne +\infty$이다.

만약 $L = -\infty$이면 자명하게 정리의 결론을 얻는다. 따라서 L이 실수라고 하자.

결론에 반하여 $M < L$이라고 하자. 그리고 $\epsilon = (L-M)/2$라고 하자. 그러면 ϵ은 양수이므로

$$\exists\, \delta_1 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_1 \to |f(x)-L| < \epsilon),$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 : (0 < |x-a| < \delta_2 \to |g(x)-M| < \epsilon)$$

이다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$g(x) < M + \epsilon = L - \epsilon < f(x)$$

이므로 $f(x) \le g(x)$라는 조건에 모순이다. 따라서 $L \le M$이

다.

4.30 (1) $f(0-)=0$, $f(0+)=1$이므로 단순불연속이다.
(2) 0에서 f의 좌상극한과 우상극한은 1이고, 좌하극한과 우하극한은 0이므로 제 2 형태의 불연속이다.
(3) 0에서 f의 좌상극한과 우상극한은 1이고, 좌하극한과 우하극한은 -1이므로 제 2 형태의 불연속이다.
(4) 0의 근방에서 f가 유계가 아니므로 제 2 형태의 불연속이다.

4.31 단조수렴 정리에 의하여 단조인 함수는 정의역의 임의의 점에서 좌극한과 우극한을 가진다. (단, 그 점이 정의역의 좌집적점이면서 우집적점일 때.) 따라서 단조함수는 제 2 형태의 불연속점을 갖지 않는다.

4.32 a에서 f의 함숫값을 바꾸어 f가 a에서 연속이 된다는 것은 a에서 f의 좌극한과 우극한이 존재하며 그 값이 일치한다는 것을 의미한다. 따라서 f는 a에서 단순 불연속이다.

※ 참고로 f가 a에서 불연속이고 a가 f의 정의역의 좌집적점이지만 우집적점은 아닐 때에는 a에서 f의 좌극한만 존재하면 f는 a에서 단순불연속이다. a가 f의 정의역의 우집적점이지만 좌집적점은 아닐 때에도 마찬가지로 정의한다.

4.33 [(1)⇒(2)] 정리 4.3.23에서 증명하였다.

[(2)⇒(1)] K가 컴팩트가 아니라고 하자. 그러면 K는 유계가 아니거나 닫힌집합이 아니다.

K가 유계가 아닌 경우 K 위에서 함수 f를 $f(x)=x^2$으로 정의하면 f는 K에서 연속이지만 평등연속이 아니다.

K가 닫힌집합이 아닌 경우 $a\in K'\setminus K$가 존재한다. 이때 K 위에서 함수 f를 $f(x)=(x-a)^{-1}$로 정의하면 f는 K에서 연속이지만 평등연속이 아니다.

[(1)⇒(3)] 정리 4.3.15에서 증명하였다.

[(3)⇒(1)] K가 컴팩트가 아니라고 하자. 그러면 K는 유계가 아니거나 닫힌집합이 아니다.

K가 유계가 아닌 경우 K 위에서 함수 f를 $f(x)=x^2$으로 정의하면 f는 K에서 연속이지만 최댓값을 갖지 않는다.

K가 닫힌집합이 아닌 경우 $a\in K'\setminus K$가 존재한다. 이때 K 위에서 함수 f를 $f(x)=|x-a|^{-1}$로 정의하면 f는 K에서 연속이지만 최댓값을 갖지 않는다.

4.34 f가 a에서 양의 무한대로 발산한다고 가정하자. 그리고 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$, $x\in D$일 때마다 $f(x)>Y$가 성립한다. 따라서 $0<x-a<\delta$ 또는 $0<a-x<\delta$일 때 모두 $f(x)>Y$가 성립한다. 즉 a에서 f의 좌극한과 우극한은 모두 양의 무한대로 발산한다.

역으로 a에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 양의 무한대로 발산한다고 하자. 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$\exists\,\delta_1>0:\ (0<a-x<\delta_1 \rightarrow f(x)>Y),$$
$$\exists\,\delta_2>0:\ (0<x-a<\delta_2 \rightarrow f(x)>Y)$$

이다. $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$라고 하고 $0<|x-a|<\delta$, $x\in D$라고 하자. 그러면 $0<a-x<\delta\le\delta_1$ 또는 $0<x-a<\delta\le\delta_2$인데, 어느 경우에건 $f(x)>Y$가 성립한다. 따라서 a에서 f가 양의 무한대로 발산한다.

4.35 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 평등연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-y|<\delta$일 때마다 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$이 성립한다. $\lim(x_n-y_n)=0$이므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $|x_n-y_n|<\delta$가 성립한다. 따라서 동일한 자연수 N에 대하여 $n>N$일 때마다 $|f(x_n)-f(y_n)|<\epsilon$이 성립한다.

※ 참고로 f가 평등연속이라는 조건을 연속이라는 조건으로 바꾸면 이 명제는 참이 아니다. 예를 들어

$$f(x)=x^2,\ x_n=n+\frac{1}{n},\ y_n=n$$

이라고 하면 f는 연속이고 $\lim(x_n-y_n)=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$$

이다.

4.36 $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to A$라고 하자. 그리고

$$g(x)=f(x)-A$$

라고 하자. 그러면 함수 g는 $[0,\ \infty)$에서 연속이고 $x\to+\infty$일 때 $g(x)\to 0$이다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 양수 X가 존재하여 $x>X$일 때마다 $|g(x)|<\epsilon/4$이 성립한다. 또한 g는 $[0,\ X+1]$에서 연속이므로 평등연속이다. 따라서 양수 δ가 존재하여

$$|x-y|<\delta,\ x\in[0,\ X+1],\ y\in[0,\ X+1]$$

일 때마다 $|g(x)-g(y)|<\epsilon/2$이 성립한다.

이제 $x,\ y\in[0,\ \infty)$이고 $|x-y|<\delta$라고 하자.

만약 x와 y가 모두 $[0,\ X+1]$에 속한다면 당연히

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

이 성립한다.

만약 x와 y가 모두 $(X,\ \infty)$에 속한다면

$$|g(x)-g(y)|\le|g(x)|+|g(y)|<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}<\epsilon$$

이 성립한다.

만약 앞의 두 가지 경우가 아니라면, 즉 x는 $[0,\ X+1]$에 속하고 y는 $(X,\ \infty)$에 속한다면

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|f(x)-f(X+1)+f(X+1)-f(y)|\\&\le|f(x)-f(X+1)|+|f(X+1)-f(y)|\\&\le|f(x)-f(X+1)|+|f(X+1)|+|f(y)|\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다.

따라서 g는 $[0,\ \infty)$에서 평등연속이다. $f(x)=g(x)+A$이므로 f도 $[0,\ \infty)$에서 평등연속이다.

4.37 f가 증가함수인 경우만 증명해도 충분하다. [f가 감소함수인 경우에는 $g=-f$라고 하고 g에 대하여 증명하면 된다.] 결론에 반하여 f가 $[a,\ b]$의 점 c에서 연속이 아니라고 가정하자.

만약 f가 a에서 연속이 아니라면 $f(a)<f(a+)$이다. 이때 $f(a)<C<f(a+)$인 임의의 C에 대하여 $f(x)=C$가 되는 x는 존재하지 않으므로 f는 중간값 성질을 갖지 않는다. 이것은 모순이다. f가 b에서 연속이 아니라고 가정해도 동일한 결론을 얻는다.

이제 $a<c<b$라고 하자. 그러면
$$f(c-)<f(c) \text{ 또는 } f(c)<f(c+)$$
이다. $f(c-)<f(c)$인 경우 $f(c-)<C<f(c)$인 C에 대하여 $f(x)=C$가 되는 x는 존재하지 않으므로 f는 중간값 성질을 갖지 않는다. $f(c)<f(c+)$인 경우 $f(c)<C<f(c+)$인 C에 대하여 $f(x)=C$가 되는 f는 존재하지 않으므로 f는 중간값 성질을 갖지 않는다. 이것은 모순이다.

따라서 f는 $[a,\ b]$의 모든 점에서 연속이다.

4.38 $a>0$이고 g가 a에서 연속이 아니라고 가정하자. g가 단조증가하므로 $g(a-)<g(a)$이다. $\epsilon=g(a)-g(a-)$라고 하자. f가 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$인 임의의 x에 대하여 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$을 만족시킨다. $f(x)\le g(x)$이므로 $0<a-x<\delta$일 때 $g(a)-g(x)<\epsilon$이다. 그런데 $g(a)-\epsilon=g(a-)$이므로 a에서 g의 좌극한이 $g(a-)$라는 데에 모순이다. 따라서 g는 a에서 불연속일 수 없다.
h에 대해서도 같은 방법으로 증명한다.

4.39 양의 무한대와 음의 무한대에서 f가 0에 수렴하므로, 양수 b가 존재하여 $x>b$일 때마다 $|f(x)|<1$이 성립하며, 음수 a가 존재하여 $x<a$일 때마다 $|f(x)|<1$이 성립한다. f는 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $[a,\ b]$에서 유계이다. $[a,\ b]$에서 $|f|$의 최댓값을 m이라고 하자. 그리고 $M=\max\{1,\ m\}$이라고 하자. 그러면 임의의 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le M$이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 유계이다.

이제 f가 $\mathbb{R}$에서 극댓값 또는 극솟값을 가짐을 증명하자. 만약 f가 $\mathbb{R}$에서 상수함수라면 f는 당연히 극댓값과 극솟값을 가진다. 이제 f가 상수함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $\mathbb{R}$에서 f의 상한이 양수이거나 하한이 음수이다. $\mathbb{R}$에서 f의 상한이 양수라고 하자. f는 양의 무한대와 음의 무한대에서 0에 수렴하므로 양수 X가 존재하여 $|x|>X$인 임의의 x에 대하여
$$f(x)<\frac{1}{2}\sup f(\mathbb{R})$$
가 성립한다. 다시 말하면 닫힌구간 $[-X,\ X]$ 밖의 임의의 점 x에 대하여
$$f(x)<\frac{1}{2}\sup f(\mathbb{R})$$
가 성립한다. f는 $[-X,\ X]$에서 연속이므로 $[-X,\ X]$에서 최댓값을 가진다. f가 $\xi\in[-X,\ X]$에서 최댓값을 갖는다고 하자. 그러면
$$f(\xi)\ge\frac{1}{2}\sup f(\mathbb{R})$$
이다. 그런데 $[-X,\ X]$ 밖의 임의의 점 x에 대하여
$$f(x)<\frac{1}{2}\sup f(\mathbb{R})$$
이므로 $f(\xi)$는 $\mathbb{R}$에서 f의 최댓값이 된다. 최댓값은 극댓값이다. $\mathbb{R}$에서 f의 상한이 음수인 경우에도 같은 방법으로 $\mathbb{R}$에서 f가 최솟값을 가짐을 보일 수 있다.

4.40 f가 증가함수이고 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 수열이며 f의 정의역이 $\{a_n\}$을 포함하고 $\{f(a_n)\}$이 A에 수렴한다고 하자. f가 증가함수이므로 임의의 x에 대하여 $f(x)\le A$이다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $|f(a_n)-A|<\epsilon$이 성립한다. $X=a_{N+1}$이라고 하자. 그러면
$$A-f(X)=|f(X)-A|=|f(a_{N+1})-A|<\epsilon$$
이 성립한다. 그런데 f가 증가함수이므로 $x>X$일 때마다
$$|A-f(x)|=A-f(x)\le A-f(X)<\epsilon$$
이 성립한다. 따라서 $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to A$이다.

f가 감소함수인 경우에도 같은 방법으로 동일한 결과를 얻는다.

4.41 [$\Rightarrow$] 함수 f가 연속함수라고 하자. 그리고 I가 열린구간이라고 하자. 그러면 정리 4.3.4에 의하여 $f^{-1}(I)$는 열린집합이다.

[$\Leftarrow$] 함수 f에 의하여 임의의 열린구간의 역상이 열린집합이 된다고 하자. 그리고 G가 열린집합이고 $H=f^{-1}(G)$라고 하자. $x\in H$이면 $y=f(x)$인 y가 G에 존재한다. G는 열린집합이므로 $y\in I\subseteq G$인 열린구간 I가 존재한다. 가정에 의하여 $f^{-1}(I)$는 열린집합이고 $x\in f^{-1}(I)\subseteq f^{-1}(G)=H$이므로 x는 H의 내점이다. x는 H의 임의의 점이므로 H는 열린집합이다. 즉 f에 의한 임의의 열린집합의 역상이 열린집합이 된다. 따라서 정리 4.3.4에 의하여 f는 연속함수이다.

4.42 $E=\{2^n k\mid n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$라고 하자. 먼저 E가 $\mathbb{R}$에서 조밀한 집합임을 보이자. $a<b$인 두 실수 a, b가 주어졌다고 하자. $2^n<b-a$인 정수 n을 택하자. 그리고 $2^n k>a$인 가장 작은 정수 k를 택하자. 그러면 $2^n(k-1)\le a$이므로
$$a<2^n k=2^n(k-1)+2^n<a+(b-a)=b$$
가 성립한다. 이때 $2^n k\in E$이다. 즉 임의의 서로 다른 두 실수 사이에는 반드시 E의 원소가 존재한다.

다음으로 f가 상수함수임을 증명하자. 실수 x가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 임의의 자연수 m에 대하여 $x<x_m<1/m$을 만족시키는 점 x_m이 E에 존재한다. 이때 $\{x_m\}$은 모든 항이 E에 속하고 x에 수렴하는 수열이 된다. 그런데 임의의 m에 대하여 $f(x_m)=0$이므로

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}f(x_m)=0$$
이다. 여기서 x는 임의의 실수이므로 f는 상수함수이다.

4.43 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$이다. 또한 실수 x에 대하여
$$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$$
이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

$k=f(1)$이라고 하자. 임의의 자연수 m에 대하여
$$\begin{aligned} mf\left(\frac{1}{m}\right)&=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{m}\right)\\ &=f\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\\ &=f(1)\end{aligned}$$
이므로
$$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}f(1)$$
이다. 임의의 자연수 n에 대하여
$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{m}\right)&=f\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\\ &=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{m}\right)\\ &=nf\left(\frac{1}{m}\right)\end{aligned}$$
이므로
$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$
이다. (수학적 귀납법을 이용하면 논리적으로 증명된다.) 즉 임의의 양의 유리수 r에 대하여 $f(r)=rf(1)$이다. 한편
$$f(-r)=-f(r)=-rf(1)$$
이므로 임의의 유리수 q에 대하여 $f(q)=qf(1)$이 성립한다.

이제 무리수 s가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 s에 수렴하는 유리수열 $\{r_n\}$이 존재한다. f가 연속이므로 수열판정법에 의하여
$$f(s)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_nf(1)=sf(1)$$
이 성립한다. 따라서 임의의 실수 x에 대하여
$$f(x)=xf(1)=kx$$
가 성립한다.

4.44 [(1)⇒(2)] f가 D에서 연속이라고 하자. 그리고 $E\subseteq D$라고 하자. $y\in f(\overline{E})$라고 하면 $y=f(x)$인 $x\in\overline{E}$가 존재한다. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 f는 연속이므로 $f^{-1}(B_\epsilon(y))$는 x를 포함하는 열린집합이 된다. 따라서 양수 δ가 존재하여 $B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\epsilon(y))$를 만족시킨다. 그런데 $x\in\overline{E}$이므로 동일한 δ에 대하여 $B_\delta(x)\cap E\neq\varnothing$이다. 여기서 $f(B_\delta(x))\subseteq B_\epsilon(y)$이고 $f(B_\delta(x))\cap f(E)\neq\varnothing$이므로 $B_\epsilon(y)\cap f(E)\neq\varnothing$이다. 그런데 ϵ은 임의의 양수이므로 $y\in\overline{f(E)}$이다. 요컨대 $y\in f(\overline{E})$인 임의의 y에 대하여 $y\in\overline{f(E)}$이므로 $f(\overline{E})$는 $\overline{f(E)}$의 부분집합이다.

[(2)⇒(3)] 닫힌집합 F가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $E=f^{-1}(F)$라고 하자. 그러면 $f(E)=f(f^{-1}(F))\subseteq F$이다. 만약 $x\in\overline{E}$이면
$$f(x)\in f(\overline{E})\subseteq\overline{f(E)}\subseteq\overline{F}=F$$
이므로 $x\in f^{-1}(F)=E$이다. 요컨대 $\overline{E}\subseteq E$이므로 $\overline{E}=E$, 즉 E는 닫힌집합이다.

[(3)⇒(1)] G를 열린집합이라고 하고 $F=\mathbb{R}\setminus G$라고 하자. 그러면 F는 닫힌집합이다. 따라서 $f^{-1}(F)$는 D에서의 닫힌집합이 된다. 그런데
$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F)=f^{-1}(\mathbb{R})\setminus f^{-1}(F)=D\setminus f^{-1}(F)$$
이고 $\mathbb{R}\setminus f^{-1}(F)$가 열린집합이므로 $f^{-1}(G)$는 열린집합이 된다. 즉 f에 의한 열린집합의 역상이 열린집합이므로 f는 연속함수이다.

4.45 실수 x가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 자연수 n이 임의로 주어졌다고 하자. $0<2-\sqrt{2}<1$이므로
$$(2-\sqrt{2})^m<\frac{1}{n}$$
인 자연수 m이 존재한다. $x<k(2-\sqrt{2})^m$을 만족시키는 가장 작은 정수 k를 택하자. 그러면
$$x<k(2-\sqrt{2})^m<x+\frac{1}{n}$$
이다. 여기서 $x_n=k(2-\sqrt{2})^m$이라고 하면 이항 정리에 의하여 적당한 정수 p, q가 존재하여 $x_n=p+q\sqrt{2}$가 된다. 따라서 $x_n\in E$이다. 이러한 방법으로 구성된 수열 $\{x_n\}$은 x에 수렴하고 모든 항이 E에 속한다. f가 연속함수이므로 수열 판정법에 의하여
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$
이 성립한다. 즉 f는 상수함수이다. [이 문제를 42번 문제와 비교해 보아라.]

4.46 f가 증가함수인 경우만 증명해도 충분하다.

(1) 명백히 임의의 $x\in[0,1]$에 대하여 $f(0)\le f(x)\le f(1)$이므로 f는 $[0,1]$에서 유계이다. 또한 단조수렴정리에 의하여 f는 $(0,1)$의 임의의 점에서 좌극한과 우극한을 가진다. 따라서 f가 $(0,1)$의 점 x에서 불연속이라면 $f(x-)<f(x+)$가 성립한다. 이제 자연수 n에 대하여
$$D_n=\left\{x\in(0,1)\,\middle|\,f(x+)-f(x-)>\frac{1}{n}\right\}$$
이라고 정의하자. 명백히 D_n은 유한집합이다. 왜냐하면, 만약 D_n이 무한집합이라면 f는 유계가 아닌 함수가 되기 때문이다. 한편
$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$$
이라고 하면 D는 유한집합의 가산 합집합이므로 가산집합이다. 또한 D는 $(0,1)$에서 f가 불연속인 모든 점을 포함한다. 만약 f가 0 또는 1에서 불연속일지라도 가산집합에 유한 개의 원소를 추가한 집합은 가산이므로 $[0,1]$에서 f가 불연속인 점들의

모임은 가산이다.

(2) 구간 $[n,\ n+1]$에서 f가 불연속인 점들의 모임을 E_n이라고 하자. 그러면 (1)에서와 같은 논법에 의하여 E_n은 가산집합이다. 여기서

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n$$

이라고 하면 E는 $\mathbb{R}$에서 f가 불연속인 모든 점을 포함하며 가산집합이다.

4.47 f가 유리수인 점에서 불연속임을 증명하자.

$r\in(0,\ 1)$이 임의로 주어진 유리수라고 하자. 그러면 $f(r)>0$이다. $\epsilon=f(r)$이라고 하자. 그리고 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 무리수의 조밀성에 의하여 $|r-s|<\delta$인 무리수 $s\in(0,\ 1)$이 존재한다. 이때 $|f(r)-f(s)|=f(r)\geq\epsilon$이므로 f는 r에서 불연속이다.

다음으로 f가 무리수인 점에서 연속임을 증명하자.

$s\in(0,\ 1)$이 임의로 주어진 무리수라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $D=\{x\in(0,\ 1)\,|\,f(x)\geq\epsilon\}$이라고 하자. 그러면 명백히 $s\notin D$이다. 또한 D는 유한집합이다. 왜냐하면

$$\frac{1}{m}\geq\epsilon,\quad n<m$$

을 동시에 만족시키는 자연수 쌍 $m,\ n$의 개수가 유한이기 때문이다. 이제 $D=\varnothing$인 경우는 $\delta=1$로 두고, $D\neq\varnothing$인 경우에는 D의 원소 중에서 s에 가장 가까운 것을 택하여 그 원소와 s와의 거리를 δ라고 하자. 즉

$$\delta=\min\{|s-t|\,|\,t\in D\}$$

라고 하자. 그러면 δ는 양수이다. 이제 $|x-s|<\delta$라고 가정하면 $x\notin D$이므로 $f(x)<\epsilon$이다. 즉

$$|f(x)-f(s)|=f(x)<\epsilon$$

이다. 따라서 f는 s에서 연속이다.

[무리수인 점에서 연속이라는 명제의 다른 증명]

s가 $(0,\ 1)$에서 임의로 주어진 무리수라고 하자. $\{x_n\}$이 s에 수렴하고 모든 항이 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 수열이라고 하자. $\{x_n\}$의 항 중에서 무리수인 항 x_m에 대해서는 $f(x_m)=0$이다. $\{x_n\}$의 항 중에서 유리수인 것을 분모와 분자가 자연수인 기약분수로 나타냈을 때 분모를 $\{y_n\}$이라고 하자. 만약 x_n이 무리수라면 $y_n=n$이라고 정의한다. 그러면 임의의 n에 대하여

$$0\leq f(x_n)\leq\frac{1}{y_n}$$

이 성립한다. 그런데 $\{x_n\}$이 무리수에 수렴하므로 문제 4.25에 의하여 $\{y_n\}$은 양의 무한대로 발산한다. 따라서 조임정리에 의하여 $\lim f(x_n)=0=f(s)$이다. 따라서 수열판정법에 의하여 f는 s에서 연속이다.

4.48 $[\Rightarrow]$ 먼저 a에서 f가 수렴한다고 가정하자. 그러면 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$일 때마다

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

동일한 δ에 대하여 $0<|x_1-a|<\delta,\ 0<|x_2-a|<\delta$일 때마다

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|f(x_1)-f(a)|+|f(a)-f(x_2)|<\epsilon$$

이 성립한다. 즉 f는 코시 조건을 만족시킨다.

$[\Leftarrow]$ 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0<|x_1-a|<\delta$, $0<|x_2-a|<\delta$일 때마다 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$이 성립한다고 가정하자.

이제 $\{x_n\}$이 a에 수렴하고 $x_n\neq a$이며 모든 항이 f의 정의역에 속하는 임의의 수열이라고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $|x_n-a|<\delta$를 만족시킨다. 동일한 자연수 N에 대하여 $m>n>N$일 때

$$0<|x_m-a|<\delta,\ 0<|x_n-a|<\delta$$

이므로

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$은 코시 수열이므로 수렴한다.

다음으로 $\{f(x_n)\}$의 극한이 수열 $\{x_n\}$에 관계없이 유일함을 증명하자.

$\{y_n\}$이 a에 수렴하고 $y_n\neq a$이며 모든 항이 f의 정의역에 속하는 임의의 수열이라고 하자. 또한 양수 ϵ이 다시 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여

$$0<|x_1-a|<\delta,\ 0<|x_2-a|<\delta$$

일 때마다

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

이 성립한다. 여기서 자연수 N_1이 존재하여 $n>N_1$일 때마다 $|x_n-a|<\delta$가 성립한다. 마찬가지로 자연수 N_2가 존재하여 $n>N_2$일 때마다 $|y_n-a|<\delta$가 성립한다. $N=\max\{N_1,\ N_2\}$라고 하고 $n>N$이라고 하면 $|x_n-a|<\delta$, $|y_n-a|<\delta$이므로 $|f(x_n)-f(y_n)|<\epsilon$이 성립한다. 즉 $\lim|f(x_n)-f(y_n)|=0$이므로 $\{f(x_n)\}$과 $\{f(y_n)\}$은 동일한 값에 수렴한다.

그러므로 수열 판정법에 의하여 f는 a에서 수렴한다.

4.49 $[\Rightarrow]$ 양의 무한대에서 f가 A에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 실수 X가 존재하여 $x>X$일 때마다 $|f(x)-A|<\epsilon/2$를 만족시킨다. 동일한 실수 X에 대하여 $x_1>X$, $x_2>X$일 때마다

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|$$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

이 성립한다.

$[\Leftarrow]$ f가 코시 조건을 만족시킨다고 하자. 그리고 $\{x_n\}$이 양의 무한대로 발산하며 모든 항이 f의 정의역에 속하는 수열이라고 하자. 그러면 가정에 의하여 $\{f(x_n)\}$은 코시 수열이고, 따라서 수렴한다.

이제 수열 $\{x_n\}$에 관계없이 $\{f(x_n)\}$이 일정한 값에 수렴함을 증명하자. $\{y_n\}$이 양의 무한대로 발산하며 모든 항이 f의 정의역에 속하는 수열이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 코시 조건을 만족시키는 실수 X가 존재한다. 그런데 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 모두 양의 무한대로 발산하므로 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $x_n>X$, $y_n>X$가 성립한다. 즉 $n>N$일 때 $|f(x_n)-f(y_n)|<\epsilon$이 성립한다. 이것은

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$$

을 뜻하므로 $\{f(x_n)\}$과 $\{f(y_n)\}$은 동일한 값에 수렴한다. 이로써 정리 4.4.6에 의하여 $x\to+\infty$일 때 f는 수렴한다.

4.50 $I=(a,\ b)$이고 $0<a<b$라고 하자. 무리수의 조밀성에 의하여 $a<r<b$인 무리수 r이 존재한다. $\{x_n\}$을 r에 수렴하고 모든 항이 I에 속하는 유리수열이라고 하자. [유리수의 조밀성에 의하여 그러한 수열이 존재한다.] 그리고 x_n을 분모와 분자가 자연수인 기약분수로 나타냈을 때 분모를 y_n이라고 하자. 그러면 문제 4.25에 의하여 $\{y_n\}$은 양의 무한대로 발산하므로

$$\overline{\lim_{x\to r}}f(x)\ge\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$$

이다. 즉 r에서 f의 상극한은 양의 무한대로 발산한다. 따라서 f는 구간 I에서 위로 유계가 아니다.

4.51 (1) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\epsilon/q$라고 하자. $|x-y|<\delta$임을 가정하면

$$|f(x)-f(y)|\le q|x-y|<q\delta=\epsilon$$

이므로 f는 평등연속이다.

(2) $x_0\in E$인 x_0을 택하자. 그리고 자연수 n에 대하여 $x_n=f(x_{n-1})$이라고 정의한다. 명백히 임의의 자연수 n에 대하여, $x_{n-1}\in[a,\ b]$이면 $x_n\in[a,\ b]$이다. 이로써 수열 $\{x_n\}$이 귀납적으로 정의되었다. 한편 임의의 자연수 n에 대하여

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le q|x_n-x_{n-1}|$$

이 성립한다. 따라서 $\{x_n\}$은 축약수열이므로 예제 3.6.4에 의하여 수렴한다.

$\{x_n\}$의 극한을 p라고 하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다

$$|x_n-p|<\frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 따라서 $n>N$일 때

$$\begin{aligned}|f(p)-p|&\le|f(p)-x_{n+1}|+|x_{n+1}-p|\\&=|f(p)-f(x_n)|+|x_{n+1}-p|\\&\le q|p-x_n|+|x_{n+1}-p|<\epsilon\end{aligned}$$

이다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로 $f(p)=p$이다.

이제 p의 유일성을 보이자. $p'\in E$이고 $f(p')=p'$이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$|p-p'|=|f(p)-f(p')|\le q|p-p'|$$

인데 $0<q<1$이므로 $|p-p'|=0$이다.

따라서 $f(p)=p$인 $p\in E$는 유일하다.

4.52 [$\Rightarrow$] I가 구간인 경우 명백히 $x,\ y\in I$이고 $x<z<y$인 임의의 $x,\ y,\ z$에 대하여 $z\in I$가 성립한다.

[$\Leftarrow$] $x,\ y\in I$이고 $x<z<y$인 임의의 $x,\ y,\ z$에 대하여 $z\in I$가 성립한다고 가정하자.

I가 위로 유계가 아니고 아래로 유계가 아닌 경우를 증명하자. 이때 임의의 실수 z에 대하여 $x<z<y$인 $x,y\in I$가 존재한다. 따라서 $z\in I$이다. 즉 임의의 실수 z에 대하여 $z\in I$이므로 $I=\mathbb{R}=(-\infty,\ \infty)$이다.

I가 위로 유계이지만 아래로 유계가 아닌 경우를 증명하자. $b=\sup I$라고 하자. $z<b$인 임의의 실수 z에 대하여 $x<z<y$인 $x,\ y\in I$가 존재한다. 따라서 문제의 조건에 의하여 $z\in I$이다. 이것은 $(-\infty,\ b)\subseteq I$를 의미한다. 한편 b보다 큰 모든 실수는 I의 원소가 아니다. 따라서 $b\in I$라면 $I=(-\infty,\ b]$가 되고 $b\notin I$라면 $I=(-\infty,\ b)$가 된다.

I가 아래로 유계이지만 위로 유계가 아닌 경우는 위와 비슷한 방법으로 증명된다.

I가 유계라고 가정하자. 만약 I가 공집합이라면 명백히 I는 구간이다. I가 공집합이 아니라고 하자. 그리고 $a=\inf I$, $b=\sup I$라고 하자. 그러면 $a<z<b$인 임의의 실수 z에 대하여 $a<x<z<y<b$인 $x,\ y\in I$가 존재한다. 따라서 $z\in I$이다. 이것은 $(a,\ b)\subseteq I$를 의미한다. 한편 a보다 작거나 b보다 큰 임의의 실수는 I의 원소가 아니다. 따라서 $a,\ b$가 I의 원소인지의 여부에 따라 I는 왼쪽 끝점이 a이고 오른쪽 끝점이 b인 열린구간, 닫힌구간 또는 반열린구간이 된다.

4.53 (1) [$\Rightarrow$] E가 연결집합이라고 하자. 결론에 반하여 적당한 $x,\ y\in E$와 적당한 $z\in(x,\ y)$가 존재하여 $z\notin E$라고 가정하자. 여기서 $A_z=E\cap(-\infty,\ z)$와 $B_z=E\cap(z,\ \infty)$는 열린집합이고 공집합이 아니며 서로소이다. 또한 $E=A_z\cup B_z$이므로 E는 분할되었다. 이것은 모순이므로 그러한 $x,\ y,\ z$는 존재하지 않는다. 즉 E는 구간이다. (문제 4.52 참조)

[$\Leftarrow$] E가 연결집합이 아니라고 가정하자. 그러면 공집합이 아니고 서로소인 열린집합 $A,\ B$가 존재하여

$$E\subseteq A\cup B,\ E\cap A\ne\varnothing,\ E\cap B\ne\varnothing$$

이다. 일반성을 잃지 않고 $x\in A\cap E$, $y\in B\cap E$, $x<y$라고 하자. $A\cap E\cap[x,\ y]$의 상한을 z라고 하면 $z\in\overline{A\cap E}$이다. 따라서 $z\notin B\cap E$이므로 $x\le z<y$이다. 만약 $z\notin A\cap E$이면 $x<z<y$이므로 $z\notin E$이다. 만약 $z\in A\cap E$이면 $z\notin\overline{B\cap E}$이므로 $z<z_1<y$이고 $z_1\notin B\cap E$인 z_1이 존재한다. 따라서 $x<z_1<y$이고 $z_1\notin E$이다. 이것은 E가 구간이 아님을 의미한다.

(2) E는 연결집합지만 $f(E)$는 연결집합이 아니라고 가정하자. 그러면 서로소이고 공집합이 아닌 두 열린집합 $A,\ B$가 존재하여

$$f(E)\subseteq A\cup B,\ f(E)\cap A\ne\varnothing,\ f(E)\cap B\ne\varnothing$$

이다. $G=E\cap f^{-1}(A)$, $H=E\cap f^{-1}(B)$라고 하면 $E=G\cup H$

이다. E는 연결집합이고 G, H는 서로소이고 E에서 열린집합이므로 G와 H 중 하나는 공집합이다. $A \subseteq \overline{A}$이므로 $G \subseteq f^{-1}(\overline{A})$이다. 그런데 f가 연속이므로 $f^{-1}(\overline{A})$는 닫힌집합이고 $\overline{G} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$이다. 따라서 $f(\overline{G}) \subseteq \overline{A}$이다. $f(H) = B$이고 $\overline{A} \cap B = \varnothing$이므로 $\overline{G} \cap H = \varnothing$이다. 마찬가지로 $G \cap \overline{H} = \varnothing$이다. 따라서 $G \cup H$는 분할되었다. 이것은 $E = G \cup H$가 연결집합이라는 데에 모순이다.

(3) 함수 $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$가 연속이고 $f(a) < f(b)$라고 하자. 그리고 $f(a) < C < f(b)$라고 하자. $[a,\ b]$는 연결집합이므로 $f([a,\ b])$도 연결이다. 즉 $f([a,\ b])$는 구간이다. 또한

$$f(a) \in f([a,\ b]),\quad f(b) \in f([a,\ b])$$

이므로 문제 4.52에 의하여 $C \in f([a,\ b])$이다. 따라서 $f(c) = C$인 $c \in [a,\ b]$가 존재한다.

4.54 [$\Rightarrow$] 함수 f가 $[a,\ b]$에서 증가한다고 하자. 그리고 E가 연결집합이라고 하자. 만약 E가 공집합이면 $f^{-1}(E)$도 공집합이므로 당연히 연결집합이다. 따라서 E가 공집합이 아니라고 하자. E의 왼쪽 끝점을 c, 오른쪽 끝점을 d라고 하면 $f^{-1}(E)$는 왼쪽 끝점이 $f^{-1}(c)$, 오른쪽 끝점이 $f^{-1}(d)$인 구간이 된다. 따라서 $f^{-1}(E)$는 연결집합이다.

f가 $[a,\ b]$에서 감소하는 경우에도 비슷한 방법으로 증명된다.

[$\Leftarrow$] 함수 f가 $[a,\ b]$에서 단조함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $[a,\ b]$에 $x_1,\ x_2,\ x_3$이 존재하여

$$x_1 < x_2 < x_3\text{이면서 } f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$$

또는

$$x_1 < x_2 < x_3\text{이면서 } f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$$

이 성립한다. 첫 번째 부등식이 성립하는 경우

$$\max\{f(x_1),\ f(x_3)\} < c < f(x_2)$$

인 c에 대하여 $I = (c,\ f(x_2))$라고 하면 I는 구간이므로 연결집합이지만 $f^{-1}(I)$는 연결집합이 아니다. 두 번째 부등식이 성립하는 경우

$$f(x_2) < c < \min\{f(x_1),\ f(x_3)\}$$

인 c에 대하여 $I = (f(x_2),\ c)$라고 하면 I는 구간이므로 연결집합이지만 $f^{-1}(I)$는 연결집합이 아니다.

4.55 먼저 $\alpha = 0$이고 임의의 양수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$인 경우를 증명하자. 양수 p가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여

$$n > N \to |f(x+1) - f(x)| < p$$

를 만족시킨다. 이제 x의 값이 충분히 크면 함수 $y = f(x)$의 증가 속도가 일차함수 $y = px$의 증가 속도보다 느리다는 것을 보여야 한다. 이 사실을 논리적으로 보이는 것이 증명의 핵심이다.

함수 $y = f(x) - px$는 닫힌구간 $[N,\ N+1]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값을 가진다. $y = f(x) - px$가 이 구간에서 최댓값을 갖는 점을 m이라고 하자. 그리고 $M = f(m)$이라고 하자. 즉 임의의 $x \in [N,\ N+1]$에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) - px \le f(m) - pm = M - pm$$

$x > N+1$이라고 하자. 그리고 $n = [x]$, $t = x - n$이라고 하자. 즉 x의 정수부분을 n, 소수부분을 t라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(n+t)| \\
&\le |f(n+t) - f(n+t-1)| \\
&\quad + |f(n+t-1) - f(n+t-2)| + \cdots \\
&\quad + |f(N+t+1) - f(N+t)| + |f(N+t)| \\
&< (n-N)p + |f(N+t)| \\
&= (n+t-N-t)p + |f(N+t)| \\
&= (x-N)p - tp + |f(N+t)| \\
&\le (x-N)p - tp + p(N+t) + f(m) - p(m) \\
&= (x-N)p + pN + f(m) - pm \\
&= (x-m)p + f(m) \\
&= p(x-m) + M.
\end{aligned}$$

즉 $x > N+1$일 때

$$|f(x)| \le p(x-m) + M$$

이다. 이 부등식은 x의 값이 충분히 클 때 $y = f(x)$의 그래프가 일차함수 $y = p(x-m) + M$의 그래프의 아래쪽에 있다는 것을 뜻한다. $x > N+1$일 때 위 부등식의 양변을 x로 나누면

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{p(x-m)+M}{x}$$

을 얻는다. 이 식의 양변에 $x \to \infty$인 극한을 취하면

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x)}{x} \le 0$$

을 얻는다. 그런데 $f(x)/x \ge 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

을 얻는다.

다음으로 $f(x) < 0$인 x가 존재하는 경우를 증명하자.

$g(x) = |f(x)|$라고 하면 g는 연속함수이고 임의의 양수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$이며

$$\lim_{x\to\infty} (g(x+1) - g(x)) = 0$$

이므로 앞의 경우에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

을 얻는다. 즉

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

을 얻는다.

끝으로 $\alpha \ne 0$인 경우를 증명하자. $g(x) = f(x) - \alpha x$라고 하면 g는 연속이고

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x+1) - g(x)) = 0$$

이므로

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - \alpha x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

가 성립한다.

4.56 결론에 반하여 f가 불연속인 점의 개수가 유한이라고 하자. 그리고 그 점들 중에서 0보다 작은 것들을 작은 것부터 순서대로 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이라고 하고, 0보다 큰 것들을 작은 것부터 순서대로 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$이라고 하자.

$I_0 = (-\infty,\ x_1]$, $I_n = (x_n,\ 0)$이라고 하고 n 미만의 자연수 i에 대해서는 $I_i = (x_i,\ x_{i+1}]$라고 하자. 또한 $J_0 = (0,\ y_1]$, $J_m = (y_m,\ \infty)$이라고 하고 m 미만의 자연수 j에 대해서는 $J_j = (y_j,\ y_{j+1})$이라고 하자. 각 I_i와 J_j는 연결집합이므로 $f(I_i)$와 $f(J_j)$도 연결집합이다. 또한 각 I_i와 J_j 위에서 f는 일대일함수이므로 단조이다. 따라서 I_i 또는 J_j가 각각 원소로 가지고 있는 끝점의 개수만큼 $f(I_i)$와 $f(J_j)$도 각각 끝점의 개수를 원소로 가진다. 예컨대 I_i가 반열린구간이면 $f(I_i)$도 반열린구간이며, I_i가 열린구간이면 $f(I_i)$도 열린구간이다.

모든 I_i와 I_j의 합집합은 $\mathbb{R}^*$이므로 $\mathbb{R}^*$는 $n+m+2$개의 구간으로 나누어지며, 이들 구간들의 끝점의 개수는 $-\infty,\ 0,\ \infty$를 제외하고 $n+m$이다.

모든 $f(I_i)$와 $f(I_j)$의 합집합은 f의 치역인 $\mathbb{R}$와 같으므로 $\mathbb{R}$는 $n+m+2$개의 구간으로 나누어지며, 이들 구간의 끝점의 개수는 $-\infty,\ \infty$를 제외하고 $n+m+1$이다.

그런데 f는 구간 I_i 또는 J_j의 끝점들을 정확히 $f(I_i)$ 또는 $f(J_j)$의 끝점에만 대응시키고, 이들은 겹치지 않으므로, 정의역 $\mathbb{R}^*$를 나눈 구간들의 끝점들의 개수와 치역 $\mathbb{R}$를 나눈 구간들의 끝점들의 개수는 일치해야 한다.

이것은 모순이므로 f의 불연속점의 개수는 유한이 아니다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 10일