맛있는 해석학 4판 단원 마무리 문제 풀이

03. 실수열의 극한

http://www.aliceinmathland.com

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

3.1 (1) 참

(2) 거짓, 반례 : $a_n = n$

(3) 거짓, 반례 : $a_n = 1,\ b_n = (-1)^n$

(4) 거짓, 반례 : $a_n = 1/n,\ b_n = n^2$

(5) 거짓, 반례 : $a_n = n,\ b_n = -n^2$

(6) 참

(7) 거짓, 반례 : $a_n = (-1)^n/n$

3.2 (1) 거짓, 반례 : $a_n = 1,\ b_n = (-1)^n$

(2) 거짓, 반례 : $a_n = 1,\ b_n = 1/n$

(3) 거짓, 반례 : $a_n = (-1)^n,\ b_n = (-1)^n$

3.3 (1) a_2

(2) a_1

(3) a_2

(4) a_2

3.4 (1) 아무리 큰 실수가 있어도 $\{a_n\}$은 일정한 항 이후로는 그 실수보다 큰 값이 된다.

(2) $\{a_n\}$의 항들이 특정한 범위를 벗어나지 못한다.

(3) $\{a_n\}$의 부분수열 중에서 양의 무한대로 발산하는 것이 존재한다. 또는, 아무리 큰 실수가 있어도 $\{a_n\}$의 항 중에서 그 실수보다 큰 것이 존재한다. 또는, $\{a_n\}$은 위로 유계가 아니다.

그러나 이것만이 정답이 아니므로 독자는 자신만의 표현 방법을 찾아보기 바란다.

3.5 (1) ① $\{a_n\}$이 유계이고 단조증가수열인 경우 $\{a_n\}$의 상한이 존재함을 보이고, ② $\{a_n\}$이 그 상한에 수렴함을 보인 뒤, ③ $\{a_n\}$이 단조감소수열인 경우도 같은 방법으로 증명한다.

(2) ① E의 원소를 무한히 많이 포함하고 길이가 0에 수렴하는 축소구간열 $\{I_n\}$을 만들고, ② I_n의 두 끝점으로 만든 수열이 동일한 값 λ에 수렴함을 보이고, ③ λ가 E의 집적점이 됨을 보인다.

3.6 등호를 사용했다는 사실 자체가 유일성을 가정한 것이다. 또한 사칙계산과 관련된 수열의 극한의 성질을 증명할 때 이미 수열의 극한의 유일성을 사용하였으므로 그러한 성질들을 이용하여 극한의 유일성을 증명하는 것은 순환논법 오류이다.

3.7 $a_n = n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$

3.8 (2), (3), (5)는 컴팩트이지만 (1), (4)는 컴팩트가 아닐 수도 있다. 또한 (6)은 절대 컴팩트가 아니다.

3.9 정의역과 공역이 자연수 집합인 두 증가함수의 합성함수는 정의역과 공역이 자연수 집합인 증가함수이다.

3.10 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n} = \frac{0}{1+0} = 0.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{2+0\cdot 0}{1-0\cdot 0} = 2.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n^3+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{4\cdot 0+0^3}{1+0^2} = 0.$

3.11 (2), (3), (4), (5), (6)은 유계인 수열이고 (1)은 유계가 아니다.

3.12 (1) $\epsilon > 0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon > 1$인 자연수 N을 택하면 $n > N$일 때

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

(2) $\epsilon > 0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon > 2$인 자연수 N을 택하면 $n > N$일 때

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{N+1} < \frac{2}{N} < \epsilon$$

이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

(3) $\epsilon > 0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon > 2$인 자연수 N을 택하면 $n > N$일 때

$$\left|\frac{n+1}{n^2} - 0\right| = \frac{n+1}{n^2} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \epsilon$$

이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

3.13 고등학생 때의 실력을 발휘해 보자.

(1) $\sqrt{\dfrac{n^2-n}{n^2+1}}=\sqrt{\dfrac{1-1/n}{1+1/n^2}}\ \rightarrow\ \sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}}=1.$

(2) $\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$

$\rightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $0<\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^n<\left(\dfrac{2n+2/3}{3n+1}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\ \rightarrow\ 0$

이므로 조임정리에 의하여 $\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^n\ \rightarrow\ 0.$

(4) $\dfrac{10^n-10^{2n}}{10^{n-1}+10^{2n-1}}=\dfrac{10^n-100^n}{10^{-1}10^n+10^{-1}100^n}$

$=\dfrac{(1/10)^n-1}{(1/10)(1/10)^n+(1/10)}$

$\rightarrow\ \dfrac{0-1}{(1/10)\cdot 0+(1/10)}=-10$

3.14 (1) e ($\because$ 부분수열)

(2) $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\left\{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{1/2}\ \rightarrow\ e^{1/2}=\sqrt{e}$

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{2n}=\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{2n+6}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{-6}$

$=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right\}^2\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{-6}$

$\rightarrow\ e^2(1+0)^{-6}=e^2$

(4) e ($\because$ 부분수열)

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=\dfrac{1}{2^n}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right\}^2\ \rightarrow\ 0e^2=0$

(다른 풀이) $n\geq 3$일 때

$$0<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\ \rightarrow\ 0$$

이므로 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n\ \rightarrow\ 0.$

(6) $\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n=\left(1+\dfrac{4}{2n-1}\right)^n$

$=\left\{\left(1+\dfrac{1}{(2n-1)/4}\right)^{(2n-1)/4}\right\}^{4n/(2n-1)}\ \rightarrow\ e^2$

3.15 두려워하지 말고 귀찮게 생각하지도 말고 처음 40개 항을 나열해 보아라.

(1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\because$ $-1/n$은 0에 수렴하므로 집적점에 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 $\{r_n\}$의 집적점만 생각하면 된다.

(2) $\dfrac{1}{3}$, 1, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{7}{3}$, 3

$\because$ $1/2^n$은 0에 수렴하므로 집적점에 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 $\{r_{2n+1}/3\}$의 집적점만 생각하면 된다.

(3) -9, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 8

$\because$ n을 짝수로 두고 $\{r_n\}$의 집적점을 생각해보고, n을 홀수로 두고 $\{-r_n\}$의 집적점을 생각해 보아라.

(4) 1, 9, 11

$\because$ n을 짝수로 두고 $\{r_n+r_{9n}+1\}$의 집적점을 생각해보고, n을 홀수로 두고 $\{r_n+r_{9n}-1\}$의 집적점을 생각해보아라.

3.16 (1), (4), (5), (6)은 완비인 집합이고 (2), (3)은 완비가 아닌 집합이다.

3.17 유리수 집합은 매우 조밀하지만 완비가 아니고 정수 집합은 틈이 많지만 완비이다. 따라서 빈틈없이 빽빽하다는 비유는 완비에 대한 적절한 비유가 아니다.

3.18 다음 수열은 모든 자연수를 집적점으로 갖는 수열이다.

a_n : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$

따라서 위 수열은 가부번 개의 집적점을 갖는 수열이다.

또한 위 수열의 역수를 취하여 만든 다음 수열은 유계이면서 정확히 가부번 개의 집적점을 갖는 수열이다.

$1,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots$

즉 위 수열은 $0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots$을 집적점으로 가진다.

참고로 앞의 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=n-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]\left(\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]-1\right)$$

여기서 [ ]는 최대정수함수이다. (이러한 일반항은 어떻게 찾았을까? 군수열의 성질을 이용하면 된다. 여러분도 직접 만들어 보아라.)

3.19 (1) $\epsilon>0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon>2$인 자연수 N을 택하면 $n>N$일 때

$$\left|\frac{3n^2+1}{n^2+1}-3\right|=\frac{2}{n^2+1}<\frac{2}{n}<\frac{2}{N}<\epsilon$$

이므로 주어진 수열은 3에 수렴한다.

(2) $\epsilon>0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon>1$인 자연수 N을 택하면 $n>N$일 때

$$\left|\frac{3^n}{3^n+1}-1\right|=\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\epsilon$$

이므로 주어진 수열은 1에 수렴한다. (물론, 여기서 $3^n>n$을 증명해야 한다. 이 부등식은 수학적 귀납법으로 증명할 수도 있고, 베르누이 부등식을 이용하여 증명할 수도 있다.)

(3) $\epsilon>0$이 임의로 주어졌다고 하자. $N\epsilon>1$인 자연수 N을 택하면 $n>N$일 때

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|=\sin\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\epsilon$$

이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다. (물론 여기서 양수 x에 대하여 $\sin x\leq x$가 성립함을 증명해야 한다.)

3.20 $L=\lim|a_{n+1}/a_n|$이라고 하자. 그리고 $\epsilon=(1-L)/2$라고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n\geq N$일 때

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<L+\epsilon$$

이 성립한다. 여기서

$$|a_{n+1}|<(L+\epsilon)|a_n|$$

이므로 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대하여

$$|a_{N+n}|<(L+\epsilon)^n|a_N|$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $0<L+\epsilon<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(L+\epsilon)^n|a_N|=0$$

이다. 따라서 조임 정리에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{N+n}=0$이다.

3.21 (1) 0에 수렴한다.

$\because\ n\geq 4$일 때 $\dfrac{n}{2^n}\leq\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.

(2) 0에 수렴한다.

$\because\ \dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n!}{n^{n-1}}\leq\dfrac{1}{n}$.

(3) 양의 무한대로 발산한다.

$\because\ n\geq 9$일 때 $\dfrac{n!}{e^n}\geq\dfrac{n!}{3^n}\geq\dfrac{8!}{3^8}\cdot 3^{n-8}$.

(4) 유계이며 진동한다.

$\because\ \cos n>\dfrac{1}{2}$이 되는 n의 개수가 무한이며,

$\cos n<-\dfrac{1}{2}$이 되는 n의 개수도 무한이다.

(5) 진동한다.

$\because\ \tan n>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 되는 n의 개수가 무한이며,

$\tan n<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 되는 n의 개수도 무한이다.

(6) 진동한다.

$\because$ 위로 유계가 아니며, 양의 무한대로 발산하지도 않는다.

3.22 (1) $x=\max\{x_1,\ x_2\}$라고 하면

$$\frac{x}{2^{1/n}}=\left(\frac{x^n}{2}\right)^{1/n}\leq\left(\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\right)^{1/n}\leq\left(\frac{x^n+x^n}{2}\right)^{1/n}=x$$

이다. 그런데 $x/2^{1/n}\to x$이므로 조임 정리에 의하여 주어진 극한값은 x이다. 즉 $\max\{x_1,\ x_2\}$에 수렴한다.

(2) $\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$

(3) 앞의 (1)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{-n}+x_2^{-n}}{2}\right)^{-1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\{\dfrac{(1/x_1)^n+(1/x_2)^n}{2}\right\}^{1/n}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{(1/x_1)^n+(1/x_2)^n}{2}\right\}^{1/n}}$$

$$=\frac{1}{\max\{1/x_1,\ 1/x_2\}}=\min\{x_1,\ x_2\}$$

(4) $\min\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$

일반적으로 양수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_k$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i^n\right)^{1/n}=\max\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i^{-n}\right)^{-1/n}=\min\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\}.$$

3.23 $b_n=a^n/n!$이라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0$$

이므로 문제 3.20에 의하여 $b_n\to 0$이다.

(다른 방법) $p>a$인 자연수 p를 택하자. 그러면 $n>p^2$일 때

$$\frac{a^n}{n!}\leq\frac{p^n}{n!}=\frac{p^{(p^2)}}{(p^2)!}\cdot\frac{p^{(n-p^2)}}{(p^2+1)(p^2+2)\cdots n}$$

$$\leq\frac{p^{(p^2)}}{(p^2)!}\cdot\frac{p^{(n-p^2)}}{(p^2+1)^{(n-p^2)}}$$

$$=\frac{p^{(p^2)}}{(p^2)!}\cdot\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(n-p^2)}$$

이다. a와 p는 고정된 수이므로 $n\to\infty$인 극한을 취하면 마지막 식은 0에 수렴한다. 따라서 조임 정리에 의하여 본래의 수열도 0에 수렴한다.

3.24 $b_n=n^n/(n!e^n)$이라고 하자. 그러면

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이다. 그런데 $n\geq 3$일 때 $(1+1/n)^n$은 단조증가하고 e에 수렴하므로

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 1$$

이다. 즉 $b_{n+1}\leq b_n$이므로 $\{b_n\}$은 단조감소한다. 명백히 $b_n\geq 0$이므로 단조수렴정리에 의하여 $\{b_n\}$은 수렴한다.

3.25 임의의 n에 대하여 $|a_{n+1}-a_n|<3^{-n}$이므로 $\{a_n\}$은 축약수열이다. 그러므로 예제 3.6.4에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다.

(다른 풀이) 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대하여

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{3^{k-1}}$$

임을 알 수 있다. 따라서 등비수열의 합 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{3^{k-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}}=\frac{3}{2}$$

이다. 수렴하는 수열은 코시 수열이므로 주어진 수열은 코시 수

열이다.

3.26 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대하여

$$x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$은 각각 수렴한다. 이들의 극한을 각각 α, β라고 하자. 그러면

$$\beta = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

가 성립한다. 이 방정식을 풀면 $\alpha = \beta$를 얻는다.

3.27 C의 모든 집적점이 C의 원소가 됨을 증명하자. λ가 C의 집적점이라고 하자.

먼저 $x_1 \in (\lambda - 2^{-1},\ \lambda + 2^{-1})$인 점 $x_1 \in C$가 존재한다. x_1은 $\{a_n\}$의 집적점이므로 x_1에 수렴하는 $\{a_n\}$의 부분수열이 존재한다. 따라서 $|x_1 - a_{n_1}| < 2^{-1}$인 첨수 n_1이 존재한다.

이제 자연수 k에 대하여 $\{a_n\}$의 첨수 n_k가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면

$$x_{k+1} \in \left(\lambda - 2^{-(k+1)},\ \lambda + 2^{-(k+1)}\right)$$

인 점 $x_{k+1} \in C$가 존재한다. x_{k+1}은 $\{a_n\}$의 집적점이므로 x_{k+1}에 수렴하는 $\{a_n\}$의 부분수열이 존재한다. 따라서

$$|x_{k+1} - a_{n_{k+1}}| < 2^{-(k+1)} \text{ 그리고 } n_{k+1} > n_k$$

인 첨수 n_{k+1}이 존재한다.

이로써 임의의 자연수 k에 대하여 n_k가 귀납적으로 정의되었다. 즉 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 귀납적으로 정의되었다. 임의의 자연수 k에 대하여

$$|a_{n_k} - \lambda| \le |a_{n_k} - x_k| + |x_k - \lambda| < 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}$$

이다. 따라서 $\{a_{n_k}\}$는 λ에 수렴한다. 즉 λ는 $\{a_n\}$의 집적점이므로 $\lambda \in C$이다.

3.28 (1) 컴팩트이다.

결론에 반하여 $[0,\ 1]$이 컴팩트가 아니라고 가정하자. 그러면 $[0,\ 1]$의 열린덮개 중에서 $[0,\ 1]$을 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는 것이 존재한다. 그러한 덮개를 C라고 하자.

$[0,\ 1]$을 두 개로 나눈 닫힌구간 $[0,\ 1/2]$, $[1/2,\ 1]$ 중에서 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는 것을 I_1이라고 하자. I_1을 길이가 같은 두 개의 닫힌구간으로 나눈 것 중에서 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는 것을 I_2라고 하자. 이러한 과정을 반복하여 닫힌구간들의 수열 $\{I_n\}$을 얻는다.

각 자연수 n에 대하여 $x_n \in I_n$을 택하면 축소구간 정리에 의하여 $\{x_n\}$은 수렴한다. 그 극한을 x라고 하면 $x \in \cap I_n$이다. x는 $[0,\ 1]$의 원소이므로 C의 원소 중에서 x를 원소로 갖는 것이 존재한다. 그것을 U_x라고 하자. U_x는 열린집합이고 $\{I_n\}$의 길이는 0에 수렴하므로 I_n 중에서 U_x에 포함되는 것이 존재한다. 이것은 모든 I_n이 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는다는 사실에 모순이다.

(2) 컴팩트가 아니다.

$$I_n = \left(\frac{1}{n+1},\ 1\right)$$

이라고 하면 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $(0,\ 1)$을 덮는 열린덮개이지만 $(0,\ 1)$을 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다.

(3) 컴팩트가 아니다.

$$I_n = \left(-1,\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n},\ 2\right)$$

라고 하면 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $[0,\ 1] \cap \mathbb{Q}$를 덮는 열린덮개이지만 $[0,\ 1] \cap \mathbb{Q}$를 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다.

(4) 컴팩트가 아니다.

$$I_n = \left(\frac{1}{n+1},\ 1\right)$$

이라고 하면 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $(0,\ 1) \cap \mathbb{Q}$를 덮는 열린덮개이지만 $(0,\ 1) \cap \mathbb{Q}$를 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다.

(5) 컴팩트가 아니다.

$$I_n = (n - 0.1,\ n + 0.1)$$

이라고 하면 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $\mathbb{N}$을 덮는 열린덮개이지만 $\mathbb{N}$을 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다.

(6) 컴팩트이다.

결론에 반하여 $[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$이 컴팩트가 아니라고 가정하자. 그러면 $[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$의 열린덮개 중에서 $[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$을 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는 것이 존재한다. 그러한 덮개를 C라고 하자.

$[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$을 두 개로 나눈 닫힌구간 $[0,\ 1]$, $[2,\ 3]$ 중에서 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는 것을 I_1이라고 하자. I_1을 길이가 같은 두 개의 닫힌구간으로 나눈 것 중에서 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는 것을 I_2라고 하자. 이러한 과정을 반복하여 닫힌구간들의 수열 $\{I_n\}$을 얻는다. 이후의 과정은 문제 3.28-(1)과 동일하다.

3.29 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 무한집합이므로 $\{a_n\}$의 모든 항이 쌍마다 서로 다르다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

$\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 순서보존인 일대일함수 f는 f의 치역 $f(\mathbb{N})$에 일대일대응된다. 따라서 $\mathbb{N}$의 무한부분집합들의 모임은 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 순서보존인 일대일함수들의 모임과 일대일대응이다. 그런데 $\mathbb{N}$의 유한부분집합들의 모임은 가산집합이고 $\wp(\mathbb{N})$은 비가산집합이므로 $\mathbb{N}$의 무한부분집합들의 모임은 비가산이다. 따라서 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 순서보존인 단사함수들의 모임은 비가산집합이다.

한편 $\{a_n\}$의 부분수열은 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 순서보존인 일대일함수 $\{n_k\}$에 의하여 결정되므로 $\{a_n\}$의 부분수열들의 모임도 비가산집합이다.

참고로 문제 3.41에서 이 문제를 다른 방향으로 접근하는 방법을 설명한다.

3.30 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\{a_{2n}\}$이 L에 수렴하므로 자연수 N_1이 존재하여 $n>N_1$일 때마다 $|a_{2n}-L|<\epsilon$이 성립한다. 또한 $\{a_{2n+1}\}$이 L에 수렴하므로 자연수 N_2가 존재하여 $n>N_2$일 때마다 $|a_{2n+1}-L|<\epsilon$이 성립한다.

이제 $N=2(N_1+N_2)$라고 하자. 그리고 $n>N$이라고 하자.

만약 n이 짝수라면 $n=2k$라고 쓸 수 있다. 그런데 $n>2N_1$이므로 $k>N_1$이다. 따라서

$$|a_n-L|=|a_{2k}-L|<\epsilon$$

이다. 만약 n이 홀수라면 $n=2k+1$라고 쓸 수 있다. 그런데 $n>2N_2+1$이므로 $k>N_2$이다. 따라서

$$|a_n-L|=|a_{2k+1}-L|<\epsilon$$

이다. 따라서 $n>N$일 때 n이 홀수이든 짝수이든 상관없이 $|a_n-L|<\epsilon$이므로 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다.

3.31 $\{a_n\}$의 정의에 의하여 임의의 n에 대하여 $a_n>0$이다. 또한 다음을 얻는다.

$$a_{2n+2}=\frac{1}{1+a_{2n+1}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+a_{2n}}},$$

$$a_{2n+1}=\frac{1}{1+a_{2n}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+a_{2n-1}}}.$$

이제 수학적 귀납법을 이용하여 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$이 각각 유계임을 보이자. 먼저 명백히

$$a_2\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le a_3\le a_1$$

이 성립한다. 이제 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le a_{2n+1}$$

이 성립한다고 가정하자. 위 부등식으로부터

$$\begin{aligned}
&a_{2n}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}-4}{3-\sqrt{5}}\\
&\Rightarrow (3-\sqrt{5})a_{2n}\le 2\sqrt{5}-4\\
&\Rightarrow 2+2a_{2n}\le -2-a_{2n}+2\sqrt{5}+a_{2n}\sqrt{5}\\
&\Rightarrow 2(1+a_{2n})\le(a_{2n}+2)(-1+\sqrt{5})\\
&\Rightarrow \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+a_{2n}}}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\
&\Rightarrow a_{2n+2}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

를 얻으며 같은 방법으로

$$a_{2n+3}\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

를 얻는다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le a_{2n+1}$$

이 성립한다.

위 부등식과 이차함수 $y=x^2+x-1$의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}
&(a_{2n})^2+a_{2n}-1\le 0\\
&\Rightarrow 2a_{2n}+(a_{2n})^2\le 1+a_{2n}\\
&\Rightarrow a_{2n}(2+a_{2n})\le 1+a_{2n}\\
&\Rightarrow a_{2n}\le\frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+a_{2n}}}\\
&\Rightarrow a_{2n}\le a_{2n+2}
\end{aligned}$$

이므로 $\{a_{2n}\}$은 단조증가수열이다. 같은 방법으로 $\{a_{2n+1}\}$은 단조감소수열임을 알 수 있다.

이로써 단조수렴정리에 의하여 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$은 각각 수렴한다. 이들의 극한을 각각 α, β라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+2}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}}}$$

이므로

$$\alpha=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\alpha}},\quad \beta=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\beta}}$$

이다. α와 β는 모두 양수이므로 이 방정식을 풀면

$$\alpha=\beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

를 얻는다. $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$이 동일한 값에 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3.32 $\lambda=\sup S$, $\epsilon_n=2^{-n}$이라고 하자. 먼저 상한의 성질에 의하여 $\lambda-\epsilon_1<x_1\le\lambda$인 $x_1\in S$가 존재한다. $\lambda\notin S$이므로 $x_1\ne\lambda$이다. 따라서 $x_1<\lambda$이다. 이제 k가 자연수이고, $x_k\in S$이며 $\lambda-\epsilon_k<x_k<\lambda$라고 가정하자. 그러면

$$\max\{\lambda-\epsilon_{k+1},\ x_k\}<\lambda$$

이므로 상한의 성질에 의하여

$$\max\{\lambda-\epsilon_{k+1},\ x_k\}<x_{k+1}<\lambda$$

인 $x_{k+1}\in S$가 존재한다. 이로써 임의의 자연수 n에 대하여 x_n이 귀납적으로 정의되었다. 여기서 $x_n<x_{n+1}$이므로 $\{x_n\}$은 순증가하는 수열이고 $\{x_n\}\subseteq S$이다. 또한 $\lambda-\epsilon_n<x_n<\lambda$이므로 $x_n\to\lambda$이다.

3.33 $\epsilon_n=2^{-n}$이라고 하자. 먼저 무리수의 조밀성에 의하여

$$r-\epsilon_1<s_1<r$$

인 무리수 s_1이 존재한다. 이제 $r-\epsilon_n<s_n<r$인 무리수 s_n이

주어졌다고 하자. 그러면 무리수의 조밀성에 의하여

$$\max\{r-\epsilon_{n+1},\ s_n\}< s_{n+1} < r$$

인 무리수 s_{n+1}이 존재한다. 이로써 무리수열 $\{s_n\}$이 귀납적으로 정의되었다. 이때 정의에 의하여 $s_n < s_{n+1}$이므로 $\{s_n\}$은 순증가수열이고 조임 정리에 의하여 $\{s_n\}$은 r에 수렴한다.

이 증명 과정에서 무리수를 유리수로 바꾸면 r에 수렴하고 순증가하는 유리수열 $\{s_n\}$을 얻는다.

3.34 임의의 자연수 n에 대하여

$$\inf\{a_k \mid k \ge n\} \le \inf\{b_k \mid k \ge n\}$$

이므로

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{a_k \mid k \ge n\}\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{b_k \mid k \ge n\}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\end{aligned}$$

이 성립한다.

3.35 $\{a_n\}$의 상극한을 α, $\{b_n\}$의 상극한을 β라고 하자.

만약 $\alpha=0$이라면 $\{a_n\}$은 0에 수렴하므로 a_nb_n도 0에 수렴하게 되어 부등식이 자명하게 성립한다. $\beta=0$인 경우도 마찬가지로 부등식이 자명하게 성립한다.

이제 $\alpha\beta \ne 0$이라고 하자. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 α와 β는 양수이다. 결론에 반하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_nb_n) \ge \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\right)\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\right)$$

이라고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_nb_n > \alpha\beta+(\alpha+\beta+\epsilon)\epsilon$$

을 만족시킨다. 이 식을 변형하면

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_nb_n > (\alpha+\epsilon)(\beta+\epsilon)$$

이다. 상극한의 성질에 의하여

$$a_nb_n > (\alpha+\epsilon)(\beta+\epsilon)$$

인 n의 개수가 무한이다. 이것은 $a_n > \alpha+\epsilon$인 n의 개수가 무한이거나 $b_n > \beta+\epsilon$인 n의 개수가 무한임을 의미한다. 이것은

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ge \alpha+\epsilon \quad \text{또는} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \ge \beta+\epsilon$$

을 의미한다. 이것은 모순이다.

3.36

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{-a_k \mid k \ge n\}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\inf\{a_k \mid k \ge n\}\right)\\ &= -\lim_{n\to\infty}\left(\inf\{a_k \mid k \ge n\}\right)\\ &= -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.\end{aligned}$$

3.37 함수 $g:\mathbb{N}\to I$를

$$g(n)=\frac{1}{n+1}$$

로 정의하면 g는 일대일함수이므로 I는 가부번인 부분집합을 포함한다. 따라서 I는 무한집합이다.

이제 I가 비가산집합임을 증명하자. 결론에 반하여 I가 가부번집합이라고 가정하면 일대일대응 $f:\mathbb{N}\to I$가 존재한다. 실수의 조밀성에 의하여

$$f(1)\notin(a_1,\ b_1) \ \text{그리고}\ 0<a_1<b_1<1$$

인 a_1과 b_1이 I에 존재한다. 이제 $0<a_n<b_n<1$이라고 가정하자. 그러면 실수의 조밀성에 의하여

$$f(n+1)\notin(a_{n+1},\ b_{n+1})$$

그리고

$$0<a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n<1$$

인 a_{n+1}과 b_{n+1}이 I에 존재한다. 이로써 임의의 n에 대하여 a_n과 b_n이 귀납적으로 정의되었다.

또한 임의의 n에 대하여 $f(n)\notin(a_n,\ b_n)$이다.

집합 $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$은 공집합이 아니고 위로 유계이므로 상한

$$r=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

이 존재한다. 마찬가지로 $\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$은 공집합이 아니고 아래로 유계이므로 하한

$$s=\inf\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

이 존재한다. b_1은 $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$의 상계이므로

$$0<a_1\le r\le b_1<1$$

즉 $r\in I$이다. 마찬가지로 $s\in I$이다. 임의의 n에 대하여 b_n은 $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$의 상계이므로 임의의 n에 대하여 $r\le b_n$이다. 또한 r은 $\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$의 하계이므로 $r\le s$이다.

$r\in I$이므로 적당한 자연수 n에 대하여 $f(n)=r$이다. 그러면 $f(n)\notin(a_n,\ b_n)$이다. 그런데 $a_n<r<b_n$이므로 이것은 모순이다.

3.38 $\{x_n\}$이 임의로 주어진 수열이라고 하자.

(Ⅰ) 만약 $\{x_n\}$이 위로 유계가 아니라면 순증가하는 부분수열을 가진다. 만약 $\{x_n\}$이 아래로 유계가 아니라면 순감소하는 부분수열을 가진다.

(Ⅱ) $\{x_n\}$이 유계라고 가정하자. 그러면 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 집적점 λ를 가진다.

(Ⅱ)-(ⅰ) 집합 $\{x_n \mid x_n=\lambda\}$가 무한집합이라면 λ와 동일한 값을 갖는 항만 모아서 부분수열을 구성할 수 있다. 그러한 부분수열은 상수열이므로 단조수열이다.

(Ⅱ)-(ⅱ) 집합 $\{x_n \mid x_n=\lambda\}$가 유한집합이라면 집합의 집적점과 수열의 집적점의 관계에 의하여 집합 $\{x_n\}$은 집적점 λ를 가진다. λ가 $\{x_n\}$의 좌집적점이라고 하자. 그러면 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\lambda-\epsilon<x_{n_k}<\lambda$인 $x_{n_k}\in\{x_n\}$의 개수가 무한이다. 따라서 λ에 수렴하고 순증가인 부분수열을 구성할 수 있다.

같은 방법으로 λ가 $\{x_n\}$의 우집적점인 경우 λ에 수렴하고 순감소인 부분수열을 구성할 수 있다.

3.39 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 먼저 $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 이제 $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - L|$은 고정된 수이므로

$$\frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시키는 자연수 N_2가 존재한다. $N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. $n > N$임을 가정하면

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - L\right| &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - L| \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1}|a_k - L| + \sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k - L|\right) \\ &< \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k - L| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k - L| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N_1}{2n}\epsilon < \epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다.

3.40 먼저 $L \neq 0$인 경우를 증명하자.

수열 $\{\ln a_n\}$이 $\ln L$에 수렴하므로 문제 3.39에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \exp \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \\ &= \exp \lim_{n\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \\ &= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k \\ &= \exp \ln L = L\ .\end{aligned}$$

다음으로 $L = 0$인 경우를 증명하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 K가 존재하여 $k \ge K$일 때마다

$$0 < a_k < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. 즉 임의의 자연수 n에 대하여

$$0 < a_{K+n} < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

$$\frac{1}{\epsilon^K}\prod_{k=1}^{K} a_n < 2^N$$

을 만족시키는 자연수 N을 택하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$\prod_{k=1}^{K+n} a_k = \prod_{k=1}^{K} a_k \cdot \prod_{k=K+1}^{K+n} a_k < \prod_{k=1}^{K} a_k \cdot \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n < \epsilon^{K+n}$$

이다. 양변의 $(K+n)$제곱근을 구하면

$$\left(\prod_{k=1}^{K+n} a_k\right)^{\frac{1}{K+n}} < \epsilon$$

이고, 좌변이 0 이상이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} = 0$$

을 얻는다.

3.41 $\mathbb{Q} \cap [0,\ 1]$은 가부번집합이므로 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{Q} \cap [0,\ 1]$로의 일대일대응 f가 존재한다. 이때 $a_n = f(n)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 $[0,\ 1]$의 모든 점을 집적점으로 가진다.

실제로 이러한 수열을 다음과 같이 구성할 수도 있다.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

이 수열은 분모가 작은 것부터 차례대로 나열한 것이며, $(0,\ 1)$에 속하는 모든 유리수를 취하는 수열이 된다.

한편 이 문제는 수열의 집적점의 개수가 비가산집합이므로 수열의 부분수열들의 모임이 비가산집합임을 의미하기도 한다.

3.42 먼저 $a_2 = a_1 + ra_0 \le 2(1+r)$이다. 이제 n 이하의 임의의 자연수 k에 대하여

$$a_{k+1} \le 2(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^k)$$

가 성립한다고 가정하면

$$a_{n+2} = a_{n+1} + r^{n+1}a_n \le 2(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^{n+1})$$

이 성립하므로 제 2 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} \le 2(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^n)$$

이 성립한다. 그런데

$$\begin{aligned}a_{n+1} &\le 2(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^n) \\ &\le 2e^r e^{r^2} e^{r^3} \cdots e^{r^n} \\ &= 2e^{r+r^2+r^3+\cdots+r^n} \\ &\le 2e^{1/(1-r)}\end{aligned}$$

이므로 $\{a_n\}$은 유계이다. 한편

$$a_{n+1} = a_n + r^n a_{n-1} \ge a_n$$

이므로 $\{a_n\}$은 증가수열이다. 따라서 단조수렴정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다.

3.43 $\{a_n\}$이 α에 수렴하고 $\{b_n\}$의 상극한이 β라고 하자.

수열의 집적점의 성질에 의하여 부분수열 β에 수렴하는 부분수열 $\{b_{n_k}\}$가 존재한다. 이때

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \alpha + \beta$$

이다. 즉 $\alpha + \beta$는 $\{a_n + b_n\}$의 집적점이므로

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \ge \alpha + \beta \qquad \cdots ㉠$$

가 성립한다. 다음으로 부등호가 반대로 성립함을 보이자. 결론에 반하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) > \alpha + \beta$$

라고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\alpha+\beta+\epsilon$$

이다. 이때 첨수열 $\{m_k\}$가 존재하여

$$\lim_{k\to\infty}(a_{m_k}+b_{m_k})=\lim_{k\to\infty}a_{m_k}+\lim_{k\to\infty}b_{m_k}=\alpha+\beta+\epsilon$$

이 된다. $\{a_{m_k}\}$는 α에 수렴하므로

$$\lim_{k\to\infty}b_{m_k}=\beta+\epsilon$$

을 얻는다. 이것은 β가 $\{b_n\}$의 상극한이라는 데에 모순이다. 따라서

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\alpha+\beta \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이로써 ㉠과 ㉡을 결합하면 원하는 등식을 얻는다.

3.44 $\{a_n\}$이 α에 수렴하고 $\{b_n\}$의 상극한이 β라고 하자. 만약 $\beta=0$이라면 $\{b_n\}$은 0에 수렴하므로 정리의 등식이 자명하게 성립한다. 만약 $\alpha=0$이라면 $\{a_nb_n\}$은 0에 수렴하므로 문제의 등식이 자명하게 성립한다. 따라서 $\alpha>0$이고 $\beta>0$이라고 하자.

수열의 집적점의 성질에 의하여 β에 수렴하는 부분수열 $\{b_{n_k}\}$가 존재한다. 이때

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}b_{n_k})=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}\cdot\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\alpha\beta$$

이다. 즉 $\alpha\beta$는 $\{a_nb_n\}$의 집적점이므로

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_nb_n)\ge\alpha\beta \qquad \cdots ㉠$$

가 성립한다. 다음으로 부등호가 반대로 성립함을 보이자. 결론에 반하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_nb_n)>\alpha\beta$$

라고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_nb_n)=\alpha\beta+\alpha\epsilon$$

이다. 이때 첨수열 $\{m_k\}$가 존재하여

$$\lim_{k\to\infty}(a_{m_k}b_{m_k})=\lim_{k\to\infty}a_{m_k}\cdot\lim_{k\to\infty}b_{m_k}=\alpha(\beta+\epsilon)$$

이 된다. $\{a_{m_k}\}$는 α에 수렴하고 $\alpha\neq0$이므로

$$\lim_{k\to\infty}b_{m_k}=\beta+\epsilon$$

을 얻는다. 이것은 β가 $\{b_n\}$의 상극한이라는 데에 모순이다. 따라서

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_nb_n)\le\alpha\beta \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이로써 ㉠과 ㉡을 결합하면 원하는 등식을 얻는다.

3.45 G가 공집합인 경우에는 자명하다. 따라서 G가 공집합이 아니라고 가정하자.
G는 열린집합이므로 임의의 $x\in G$에 대하여 $y>x$인 y가 존재하여 $(x,\ y)\subseteq G$이다.

$$b_x=\sup\{y\,|\,(x,\ y)\subseteq G\},\ a_x=\inf\{z\,|\,(z,\ x)\subseteq G\}$$

라고 하자. 그러면 $a_x<x<b_x$이다. $I_x=(a_x,\ b_x)$라고 하면 $I_x\subseteq G$이다. $I=\{I_x\,|\,x\in G\}$라고 하자. 명백히 I의 모든 원소는 쌍마다 서로소이다. 즉 $I_x\cap I_y\neq\varnothing$이면 $I_x=I_y$이다. 또한 $G=\cup I_x$이다.

이제 I가 가산집합임을 보이자. 임의의 x에 대하여 $q_x\in I_x$인 유리수 q_x를 택하자. 이때 $J=\{q_x\}$는 가산집합이다.

또한 $I=\{I_n\,|\,n\in J\}$가 되므로 I는 가산집합이다.

3.46 [(1)⇒(2)] K가 컴팩트라고 하자. 그리고 E가 K의 무한부분집합이라고 하자. K는 유계이므로 E도 유계이다. 따라서 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 E는 집적점 λ를 가진다. 참고 3.5.8에 의하여 E의 점을 이용하여 λ에 수렴하는 수열 $\{x_n\}$을 만들 수 있다. 이때 $\{x_n\}$의 모든 항은 K에 속하고 K가 닫힌집합이므로 따름정리 3.8.9에 의하여 $\lambda\in K$이다.

[(2)⇒(3)] K의 무한부분집합이 K의 원소인 집적점을 가진다고 하자. 그리고 수열 $\{x_n\}$의 모든 항이 K에 속한다고 하자.

만약 집합 $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$이 유한집합이라면 $\{x_n\}$의 항 중에서 동일한 값을 갖는 항이 무한히 많이 존재한다. 그러한 항들만을 모아서 만든 부분수열은 K의 점에 수렴하는 부분수열이 된다.

만약 집합 $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$이 무한집합이라면 K의 원소인 집적점 λ를 가진다. 이때 참고 3.5.9에 의하여 λ는 수열 $\{x_n\}$의 집적점이 된다. 즉 $\{x_n\}$은 λ에 수렴하는 부분수열이 된다.

[(3)⇒(1)] 모든 항이 K에 속하는 임의의 수열이 K의 한 점에 수렴하는 부분수열을 가진다고 하자. 이제 K가 컴팩트임을 증명하자.

먼저 K가 유계임을 보이자. 만약 K가 유계가 아니라면 모든 항이 K에 속하고 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 수열을 구성할 수 있다. 그러한 수열은 수렴하는 부분수열을 갖지 않으므로 모순이다. 따라서 K는 유계이다.

다음으로 K가 닫힌집합임을 보이자. 만약 K가 닫힌집합이 아니라면 $\lambda\in K'\setminus K$가 존재한다. 참고 3.5.8에 의하여 모든 항이 K에 속하고 λ에 수렴하는 수열 $\{x_n\}$이 존재한다. $\{x_n\}$의 모든 부분수열은 λ에 수렴하는데, λ는 K의 원소가 아니므로 모순이다. 따라서 K는 닫힌집합이다.

K가 유계이고 닫힌집합이므로 하이네-보렐 정리에 의하여 K는 컴팩트이다.

3.47 $K=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\middle|\,n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{1}{n}\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$

이라고 하면 $K'=\left\{\frac{1}{n}\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$이므로 K는 컴팩트이고 가부번 개의 집적점을 가진다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 6일