02. 실수계의 성질

http://www.aliceinmathland.com

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

2.1 (1) 참

(2) 거짓, 0으로 나누는 것이 정의되지 않는다.

(3) 거짓, '임의의 자연수 n'에 대하여 $p(n)$이 참임을 증명할 때 사용한다. 이러한 이유 때문에 수학적 귀납법을 **유한 귀납법**이라고 부르기도 한다.

(4) 거짓, $a=-1$, $r=1/2$이면 $a^r=\pm\boldsymbol{i}$이다.

(5) 거짓, 반례 : $E=\{1\}$

(6) 거짓, 반례 : $E=\{1\}$

(7) 거짓, 반례 : $E=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

(8) 거짓, $[1,\ 2)$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다.

(9) 거짓, $\varnothing$과 $\mathbb{R}$는 $\mathbb{R}$에서 열린집합인 동시에 닫힌집합이다.

(10) 거짓, 공집합은 최댓값도 갖지 않고 최솟값도 갖지 않는다.

2.2 (1), (2), (3), (6)은 이항연산이 된다. 그러나 (4), (5)는 이항연산이 되지 않는다.

2.3 (1) $x(x^{-1})=1$이므로 x는 x^{-1}의 역수이다. 그런데 한 실수의 역수는 유일하므로 $x=(x^{-1})^{-1}$이다.

(2) $(xy^{-1})^{-1}=x^{-1}(y^{-1})^{-1}=x^{-1}y$

(3) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{ay}{xy}+\dfrac{bx}{xy}=\dfrac{ay+bx}{xy}$

(4) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{-b}{y}=\dfrac{ay+(-b)x}{xy}=\dfrac{ay-bx}{xy}$

2.4 (1) $x>0$, $y>0$이라고 하자. 그러면 공리 2.2.1의 (O3)에 의하여 $0+0<0+y<x+y$이고 (O4)에 의하여 $xy>0$이다.

(2) 공리 2.2.1의 (O1)에 의하여 성립한다.

2.5 m이 임의로 주어진 자연수라고 하자. 이제 '임의의 자연수 n에 대하여 mn은 자연수이다'를 증명하자.

먼저 $m1=m$은 자연수이므로 $n=1$일 때 mn는 자연수이다.

이제 $n=k$에 대하여 mk가 자연수라고 가정하자. 그러면 $m(k+1)=mk+m$이다. 여기서 mk와 m은 모두 자연수이고 자연수 집합은 덧셈에 대하여 닫혀있으므로 $mk+m$도 자연수이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 mn은 자연수이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 mn은 자연수이다. 여기서 m도 임의로 주어진 자연수이므로 임의의 두 자연수의 곱은 자연수이다.

2.6 (1) m과 n이 임의로 주어진 정수라고 하자.

- m 또는 n이 0인 경우. $m=0$이면 $m+n=n$이고 $n=0$이면 $m+n=m$이므로 $m+n$은 정수이다.
- $m>0$, $n>0$인 경우. m, n은 모두 자연수이므로 $m+n$은 모두 자연수이다.
- $m>0$, $n<0$인 경우. $m+n=m-|n|$이다. 여기서 $|n|$은 자연수이므로 $|m-|n||$도 자연수이다. 이때 $m+n$은 $+|m-|n||$ 또는 $-|m-|n||$과 같으므로 $m+n$도 정수이다.
- $m<0$, $n>0$인 경우는 바로 위 $m>0$, $n<0$인 경우에서 m과 n의 역할을 바꾸면 된다.
- $m<0$, $n<0$인 경우 $-m$과 $-n$이 자연수이므로 $-m-n$도 자연수이다. 이때 $m+n=-(-m-n)$이므로 $m+n$도 자연수이다.

이로써 $m+n$은 자연수이다.

(2) m과 n이 임의로 주어진 정수라고 하자. $-n$도 정수이므로 위 (1)에 의하여 $m-n=m+(-n)$도 정수이다.

(3) m과 n이 임의로 주어진 정수라고 하자. 만약 m 또는 n이 0이라면 $mn=0$이므로 mn은 정수이다. 만약 $mn\neq 0$이면 $|m|$, $|n|$은 모두 자연수이므로 $|m||n|$도 자연수이다. 이때 mn은 $|m||n|$ 또는 $-|m||n|$과 같으므로 mn도 정수이다.

2.7 x와 y가 임의로 주어진 유리수라고 하자. 그러면

$$x=\frac{p}{q},\ y=\frac{r}{s},\ q\neq 0,\ s\neq 0$$

인 정수 p, q, r, s가 존재한다. 이때 $ps+qr$, pr, qs는 각각 정수이고 $qs\neq 0$이며

$$x+y=\frac{ps+qr}{qs},\ xy=\frac{pr}{qs}$$

이므로 $x+y$와 xy도 유리수이다.

2.8 r가 유리수이고 s가 무리수라고 하자.

만약 $r+s$가 유리수라면 $s=(r+s)-r$도 유리수이므로 모순이다. 따라서 $r+s$는 무리수이다.

$r\neq 0$이라고 하자. 만약 rs가 유리수라면 $s=(rs)r^{-1}$도 유리수이므로 모순이다. 따라서 rs는 무리수이다.

2.9 (1) $n=1$일 때

$$\sum_{k=1}^{1}k=1=\frac{1(1+1)}{2}$$

이므로 등식이 성립한다. $n=p$에 대하여 등식이 성립한다고 가

정하면

$$\sum_{k=1}^{p+1} k=\sum_{k=1}^{p} k+(p+1)=\frac{p(p+1)}{2}+(p+1)$$
$$=\frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}$$

이므로 $n=p+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(2) $n=1$일 때

$$\sum_{k=1}^{1} k^2=1=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

이므로 등식이 성립한다. $n=p$에 대하여 등식이 성립하다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2=\sum_{k=1}^{p} k^2+(p+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}}{6}$$

이므로 $n=p+1$일 때에도 등식이 성립한다.

2.10 (1) $n=3$일 때

$$2\cdot 3+1=7<8=2^3$$

이므로 부등식이 성립한다. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2(k+1)+1=(2k+1)+2<2^k+2\le 2^k+2^k=2^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(2) $n=1$일 때

$$1<2^1$$

이므로 부등식이 성립한다. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$k+1<2^k+1\le 2^k+2^k=2^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(3) $n=1,\ 2,\ 3$일 때

$$1^2=1<3=2^1+1,$$
$$2^2=4<5=2^2+1,$$
$$3^2=9=2^3+1$$

이므로 부등식이 성립한다. $n=k$, $k\ge 3$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면 (1)에 의하여

$$(k+1)^2=k^2+2k+1$$
$$\le (2^k+1)+2k+1$$
$$<2^k+2^k+1=2^{k+1}+1$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(4) $n=1,\ 2,\ 3$일 때

$$1^3<3^1,$$
$$2^3<3^2,$$
$$3^3\le 3^3$$

이므로 문제의 부등식이 성립한다. $n=k$, $k\ge 3$일 때 문제의 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+(3k+1)$$
$$\le k^3+k^3+k^3$$
$$=3k^3$$
$$\le 3\cdot 3^k$$
$$=3^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

2.11 실수 m이 E의 하한일 필요충분조건은 $-m$이 $-E$의 상한인 것이다. 그런데 상한은 유일하므로 $-m$은 유일하게 정해진다. 따라서 m도 유일하게 정해진다.

(다른 방법의 증명) α와 α'이 E의 하한이라고 하자. 그러면 α'은 E의 하계이므로 $\alpha\ge\alpha'$이다. 역할을 바꾸면 α'이 E의 하한이고 α가 E의 하계이므로 $\alpha'\ge\alpha$이다. 따라서 $\alpha=\alpha'$이다.

2.12 (1) $\mathbb{R}$
(2) $(0,\ 1)$
(3) $\varnothing$
(4) $[0,\ 1]$
(5) $(0,\ 1]$
(6) $[0,\ \infty)$
(7) $(-2,\ 2]$
(8) $[0,\ 1]$
(9) $(0,\ 2]$

2.13 위로 유계가 아닌 집합의 상한은 ∞, 아래로 유계가 아닌 집합의 하한은 $-\infty$로 정의한다.

	유계		상한	하한	최댓값	최솟값
	아래로	위로				
(1)	×	○	∞	1	×	1
(2)	×	×	∞	$-\infty$	×	×
(3)	×	○	∞	0	×	×
(4)	○	×	1	$-\infty$	1	×
(5)	○	○	1	0	1	×
(6)	×	×	∞	$-\infty$	×	×

2.14 거지의 기준이 명확하지 않다.

2.15 '귀납적 가정에 의하여 $m-1=n-1$이므로'가 잘못되었다. $m-1$과 $n-1$이 자연수라는 보장이 없으므로 귀납적 가정을 적용할 수 없다.

2.16 $x\ge y$인 경우와 $x<y$인 경우로 나누어 증명한다.

$x\ge y$일 때

$$\frac{x+y+|x-y|}{2}=\frac{x+y+(x-y)}{2}=x=\max\{x,\ y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2}=\frac{x+y-(x-y)}{2}=y=\min\{x,\ y\}$$

이고 $x<y$일 때

$$\frac{x+y+|x-y|}{2}=\frac{x+y-(x-y)}{2}=y=\max\{x,\ y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2}=\frac{x+y-\{-(x-y)\}}{2}=x=\min\{x,\ y\}$$

이다.

2.17 결론에 반하여 $x \neq 0$이라고 가정하면 $|x| > 0$이다. 이때 $\epsilon = |x|$라고 하면 $\epsilon > 0$이지만 $|x| \not< \epsilon$이므로 모순이다.

2.18 (1) $x \le y$이고 $\epsilon > 0$이면 당연히 $a \le b + \epsilon$이다. 역으로 $x > y$라고 가정하면 $\epsilon = (x-y)/2$에 대하여 $a > b + \epsilon$이므로 모순이다.

(2) $x \le y$이고 $\epsilon > 0$이면 당연히 $a < b + \epsilon$이다. 역으로 $x > y$라고 가정하면 $\epsilon = (x-y)/2$에 대하여 $a > b + \epsilon$이므로 모순이다.

2.19 (1) $\alpha = \sup B$라고 하자. 그리고 $x \in A$라고 하자. 그러면 $x \in B$이므로 상한의 정의에 의하여 $x \le \alpha$이다. 따라서 α는 A의 상계이다. 상한은 상계 중 가장 작은 것이므로 $\sup A \le \alpha$이다.

(2) $\beta = \inf B$라고 하자. 그리고 $x \in A$라고 하자. 그러면 $x \in B$이므로 하한의 정의에 의하여 $x \ge \beta$이다. 따라서 β는 A의 하계이다. 하한은 하계 중 가장 큰 것이므로 $\inf A \ge \beta$이다.

2.20 (1) $x \in A^o$이면 x는 A의 내점이므로 $B_r(x) \subseteq A$인 양수 r가 존재한다. 이때 $B_r(x) \subseteq A \subseteq B$이므로 x는 B의 내점이다. 즉 A의 모든 내점은 B의 내점이므로 $A^o \subseteq B^o$이다.

(2) x가 A의 내점이면 $B_r(x) \subseteq A$인 양수 r가 존재하므로 당연히 $x \in A$이다. 따라서 $A^o \subseteq A$이다.

(3) $A^o \subseteq A$이므로 $(A^o)^o \subseteq A^o$이다. 반대로 $x \in A^o$라고 하자. 그러면 $B_r(x) \subseteq A$인 양수 r가 존재한다. 그런데 $(B_r(x))^o = B_r(x)$이므로 $B_r(x) = (B_r(x))^o \subseteq (A^o)^o$, 즉 $x \in (A^o)^o$이다. 따라서 $A^o \subseteq (A^o)^o$이다.

(4) $A^o \subseteq A$, $B^o \subseteq B$이므로 $A^o \cap B^o \subseteq A \cap B$이다. 따라서 $A^o \cap B^o = (A^o \cap B^o)^o \subseteq (A \cap B)^o$이다. 반대로 $x \in (A \cap B)^o$라고 하면 $B_r(x) \subseteq A \cap B$인 양수 r가 존재한다. 동일한 r에 대하여 $B_r(x) \subseteq A$, $B_r(x) \subseteq B$이므로 $x \in A^o$, $x \in B^o$가 성립한다. 즉 $x \in A^o \cap B^o$이므로 $(A \cap B)^o \subseteq A^o \cap B^o$이다.

2.21 (1), (3), (4), (7), (8), (9)는 우함수이고 (2), (6), (10)은 기함수이다. (5)는 어느 쪽에도 해당하지 않는다.

2.22 변수 n에 수학적 귀납법을 적용하자. $n=0$ 또는 $n=1$인 경우 문제의 등식이 자명하게 성립한다. 이제 $n=k$, $k \in \mathbb{N}$일 때 $0 \le r \le n$인 임의의 정수 r에 대하여 문제의 등식이 성립한다고 가정하자. 그러면 이항계수의 정의에 의하여

$$
\begin{aligned}
{}_{k+1}\mathrm{C}_r &= {}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1} \\
&= \frac{k!}{r!\,(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!\,(k-r+1)!} \\
&= \frac{k!\,(k-r+1)}{r!\,(k-r)!\,(k-r+1)} + \frac{k!\,r}{r(r-1)!\,(k-r+1)!} \\
&= \frac{k!\,(k+1)}{r!\,(k-r+1)!} = \frac{(k+1)!}{r!\,(k+1-r)!}
\end{aligned}
$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 $0 \le r \le n$인 임의의 정수 r에 대하여 문제의 등식이 성립한다.

2.23 $n=1$인 경우 문제의 등식이 자명하게 성립한다. 이제 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 정리의 등식이 성립한다고 가정하자. 즉

$$(x+y)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r} y^r$$

이 성립한다고 가정하자. 양변에 $x+y$를 곱하면 좌변은

$$(\text{좌변}) = (x+y)^{k+1}$$

이고 우변은

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= (x+y)\sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r} y^r \\
&= \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r+1} y^r + \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r} y^{r+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r+1} y^r + \sum_{r=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r} y^{r+1} + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r x^{k-r+1} y^r + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{r-1} x^{k-r+1} y^r + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} ({}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1}) x^{k-r+1} y^r + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_r x^{k-r+1} y^r + y^{k+1} \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_r x^{k-r+1} y^r
\end{aligned}
$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 문제의 등식이 성립한다.

2.24 결론에 반하여 $p(n)$이 거짓인 자연수 n이 존재한다고 가정하자. 그러면 집합 $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \sim p(n)\}$은 공집합이 아니다. F의 최솟값을 m이라고 하자. 명백히 $p(1)$은 참이므로 $1 \notin F$이다. 또한 m은 F의 최솟값이므로 $k < m$인 임의의 자연수 k에 대하여 $p(k)$는 참이다. 따라서 문제의 조건 (ii)에 의하여 $p(m)$도 참이다. 이것은 $m \in F$라는 데에 모순이다.

2.25 열린구간 $(0,\ 1)$이 비가산집합이라는 사실은 1장에서 증명하였다. 한편 $\phi(x) = (b-a)x + a$라고 하면 ϕ는 $(0,\ 1)$로부터 $(a,\ b)$로의 일대일대응이므로 $(a,\ b)$도 비가산집합이다.

만약 $a < r < b$인 무리수 r가 존재하지 않는다고 가정하면 열린구간 $(a,\ b)$는 유리수만 포함하므로 가산집합이다. 이것은 모순이므로 $a < r < b$인 무리수 r가 존재한다.

2.26 $E \coloneqq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$가 열린집합임을 보이자. $x \in E$라고 하자. 그리고 $m = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n < x\}$라고 하자. 즉 x 미만의 정수 중 가장 큰 값을 m이라고 하자. 그러면 $m < x < m+1$이다.

이제 $r = \min\{x-m,\ m+1-x\}$라고 하자. $B_r(x) \subseteq E$임을 증명하자. 정수 n이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $n \le m$ 또는 $m+1 \le n$이다. $n \le m$인 경우

$$|n-x| = |x-m+m-n| = |x-m| + |m-n| \ge r$$

이고 $m+1 \le n$인 경우

$$|n-x| = |n-m-1+m+1-x|$$

$$= |n-m-1|+|m+1-x| \geq r$$
이므로 어느 경우든 $n \not\in B_r(x)$이다. 즉 $B_r(x) \subseteq E$이므로 x는 E의 내점이다. x가 E의 임의의 점이므로 E는 열린집합이다. 따라서 $\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus E$는 닫힌집합이다.

(다른 풀이) 임의의 정수 n에 대하여 $(n,\ n+1)$은 열린집합이다. 이때
$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n,\ n+1)$$
은 열린집합이므로 $\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus U$는 닫힌집합이다.

2.27 (1) $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$라고 하자. $x \in A+B$일 때 $x = a+b$인 점 $a \in A$, $b \in B$가 존재한다. 이때 $a \leq \alpha$, $b \leq \beta$이므로 $x \leq \alpha + \beta$이다. 즉 $\alpha+\beta$는 $A+B$의 상계이다.

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 상한의 성질에 의하여
$$\alpha - \frac{\epsilon}{2} < a \leq \alpha,\ \beta - \frac{\epsilon}{2} < b \leq \beta$$
인 점 $a \in A$, $b \in B$가 존재한다. 이때 $x = a+b$라고 하면
$$(\alpha+\beta) - \epsilon < x \leq \alpha + \beta \text{ 그리고 } x \in A+B$$
이므로 정리 2.4.10에 의하여 $\alpha+\beta$는 $A+B$의 상한이다.

(2) $-(A+B) = -A-B$이고 $-A$, $-B$가 모두 위로 유계이므로 위 (1)과 정리 2.4.8에 의하여
$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup(-A-B) \\ &= -(\sup(-A) + \sup(-B)) \\ &= -\sup(-A) - \sup(-B) \\ &= \inf A + \inf B\end{aligned}$$
를 얻는다. 물론 이 등식도 (1)과 같은 방법으로 증명할 수 있다.

2.28 $\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in D\}$, $\beta = \sup\{g(x) \mid x \in D\}$라고 하자. $y \in \{f(x)+g(x) \mid x \in D\}$라고 하면 $y = f(c)+g(c)$를 만족시키는 $c \in D$가 존재한다. 상한의 성질에 의하여 $f(c) \leq \alpha$, $g(c) \leq \beta$이므로 $y \leq \alpha+\beta$이다. 따라서 $\alpha+\beta$는 $\{f(x)+g(x) \mid x \in D\}$의 상계이다. 상한은 상계 중 가장 작은 것이므로 $\{f(x)+g(x) \mid x \in D\}$의 상한은 $\alpha+\beta$ 이하이다. 즉 문제의 첫 번째 등식이 증명되었다.

다음으로 정리 2.4.8과 상한에 대한 부등식에 의하여 다음이 성립한다.
$$\begin{aligned}\inf\{f(x)+g(x) \mid x \in D\} &= -\sup\{-f(x)-g(x) \mid x \in D\} \\ &\geq -(\sup\{-f(x) \mid x \in D\} + \sup\{-g(x) \mid x \in D\}) \\ &= -\sup\{-f(x) \mid x \in D\} - \sup\{-g(x) \mid x \in D\} \\ &= \inf\{f(x) \mid x \in D\} + \inf\{g(x) \mid x \in D\}\ .\end{aligned}$$
한편 $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $D = [-1,\ 1]$인 경우 D에서 f의 상한은 1, g의 상한은 1이지만 $f+g$의 상한은 0이므로 등식이 성립하지 않는다.

2.29 함수 f에 대하여
$$g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},\ h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$
라고 하면 g는 기함수이고 h는 우함수이다. 또한 $f = g+h$이다.

※ 참고로 함수 f에 대하여 $f = g+h$인 기함수 g와 우함수 h는 각각 유일하다. $f = g_1 + h_1$이고 g_1은 기함수, h_1은 우함수라고 하자. 그러면
$$g_1(x) + h_1(x) = g(x) + h(x) \quad \cdots ㉠$$
가 성립한다. 여기에 x 대신 $-x$를 대입하면
$$-g_1(x) + h_1(x) = -g(x) + h(x) \quad \cdots ㉡$$
를 얻는다. ㉠과 ㉡을 더하면 $2h_1(x) = 2h(x)$이므로 $h_1 = h$를 얻는다. 이것을 다시 ㉠에 대입하면 $g_1 = g$를 얻는다.

2.30 $x \geq 1$일 때 함수 $r \mapsto x^r$는 증가함수이므로
$$\sup\{x^t \mid t \leq r,\ t \in \mathbb{Q}\} = \max\{x^t \mid t \leq r,\ t \in \mathbb{Q}\} = x^r$$
으로서 등식이 성립한다.

2.31 (1) $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$라고 하자. 그리고 $x \in AB$라고 하자. 그러면 $x = ab$인 $a \in A$, $b \in B$가 존재한다. 이때 상한의 성질에 의하여 $a \leq \alpha$, $b \leq \beta$이므로 $x = ab \leq \alpha\beta$이다. 즉 $\alpha\beta$는 AB의 상계이므로
$$\sup AB \leq \alpha\beta$$
가 성립한다.

이제 부등호가 반대로 성립함을 증명하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\alpha+\beta$는 양수이므로 ϵ은 $\alpha+\beta$보다 작다고 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 상한의 성질에 의하여 $a \in A$, $b \in B$가 존재하여
$$\alpha - \epsilon < a \leq \alpha,\ \beta - \epsilon < b \leq \beta$$
를 만족시킨다. 두 부등식을 결합하면
$$ab > (\alpha-\epsilon)(b-\epsilon) = \alpha\beta - \epsilon(\alpha+\beta) + \epsilon^2 \geq \alpha\beta - \epsilon(\alpha+\beta)$$
이다. 상한의 성질에 의하여 $\sup AB \geq ab$ 이므로
$$\sup AB \geq \alpha\beta - \epsilon(\alpha+\beta)$$
를 얻는다. $\alpha+\beta$는 고정된 양수이므로 $\epsilon(\alpha+\beta)$는 ϵ의 값에 따라서 얼마든지 작은 양수가 될 수 있다. 따라서
$$\sup AB \geq \alpha\beta$$
를 얻는다.

(2) 위 (1)과 같은 방법으로 증명하면 된다. 그러나 여기서는 약간 다른 방법으로 증명하겠다. $\alpha = \inf A$, $\beta = \inf B$라고 하자. 그리고 $x \in AB$라고 하자. 그러면 $x = ab$인 $a \in A$, $b \in B$가 존재한다. 이때 $x = ab \geq \alpha\beta$이다. x는 AB의 임의의 원소이므로 $\alpha\beta$는 AB의 하계이다.

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고
$$\epsilon_1 = \frac{-\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha+\beta)^2+4\epsilon}}{2}$$
이라고 하자. 그러면 $\epsilon_1 > 0$이므로 정리 2.4.11에 의하여
$$\alpha \leq a_1 < \alpha+\epsilon_1,\ \beta \leq b_1 < \beta+\epsilon_1$$
인 $a_1 \in A$, $b_1 \in B$가 존재한다. 두 부등식을 결합하면
$$\alpha\beta \leq a_1 b_1 < (\alpha+\epsilon_1)(\beta+\epsilon_1)$$
이고, 우변을 전개하여 정리하면
$$\alpha\beta \leq a_1 b_1 < \alpha\beta + \epsilon$$
을 얻는다. 여기서 $a_1 b_1 \in AB$이므로 정리 2.4.11에 의하여 $\alpha\beta$는 AB의 하한이다.

2.32 $2^{-n} < b-a$인 자연수 n을 택한다. 그리고 $2^{-n}k \le a$인 정수 k 중에서 가장 큰 것을 택한다. 그러면

$$a < 2^{-n}(k+1) = 2^{-n}k + 2^{-n} < a + (b-a) = b$$

가 성립한다. $q = 2^{-n}(k+1)$이라고 하면 $a < q < b$, $q \in D$이다.

2.33 결론에 반하여 f가 I에서 순증가하지 않는다고 가정하자. 그러면 $c < d$이지만 $f(c) \ge f(d)$인 c, d가 I에 존재한다. 이때

$$S = \{x \mid a < x < d,\ f(x) \ge f(d)\}$$

는 공집합이 아니고 유계이므로 상한 μ를 가진다. 더욱이 $\mu \in I$이다. 문제의 조건에 의하여 양수 δ가 존재하여

$$\mu - \delta < x < \mu \text{일 때마다 } f(x) < f(\mu)$$

그리고

$$\mu < x < \mu + \delta \text{일 때마다 } f(\mu) < f(x)$$

가 성립한다. 상한의 성질에 의하여 $\mu - \delta < p < \mu$인 점 $p \in S$가 존재한다. 또한 $\mu < d$이므로 $\mu < q < \mu + \delta$인 $q \in I$가 존재한다. 따라서

$$f(d) \le f(p) \le f(q)$$

인데, 이것은 $q \notin S$라는 사실에 모순이다. 따라서 f는 I에서 순증가한다.

2.34 (1) 임의의 $x \in D$에 대하여 $|-f(x)| = |f(x)|$이므로

$$\{|-f(x)| \mid x \in D\} = \{|f(x)| \mid x \in D\}$$

이다. 따라서 두 집합의 상한도 같다.

(2) 임의의 $x \in D$와 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 $|\alpha f(x)| = |\alpha|\,|f(x)|$이므로

$$\{|\alpha f(x)| \mid x \in D\} = \{|\alpha|\,|f(x)| \mid x \in D\} = |\alpha|\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

이다. 따라서

$$\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)| \mid x \in D\} = |\alpha| \sup\{|f(x)| \mid x \in D\} = |\alpha|\,\|f\|$$

가 성립한다.

(3) $A = \|f\|$, $B = \|g\|$라고 하자. 그러면 임의의 $x \in D$에 대하여

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le A + B$$

이므로 $A+B$는 집합

$$\{|f(x) + g(x)| \mid x \in D\}$$

의 상계이다. 따라서 이 집합의 상한은 $A+B$ 이하이다. 즉

$$\|f+g\| = \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x \in D\} \le A + B = \|f\| + \|g\|$$

가 성립한다.

2.35 조건 (ii)에 의하여 A는 위로 유계이므로 A의 상한 α가 존재한다.

먼저 상한의 성질에 의하여 임의의 $a \in A$에 대하여 $a \le \alpha$이다.

다음으로 $\forall b \in B : \alpha \le b$를 증명하기 위하여 이 명제를 부정하자. 즉 $b' \in B$가 존재하여 $b' < \alpha$를 만족시키다고 가정하자. $\epsilon = \alpha - b'$이라고 하면 ϵ은 양수이므로 $\alpha - \epsilon < a' \le \alpha$를 만족시키는 $a' \in A$가 존재한다. 그런데 $b' = \alpha - \epsilon$이므로 $b' \le a'$이 되어 (ii)에 모순이다. 따라서 α는 문제의 조건을 만족시키는 실수이다.

끝으로 유일성을 증명하자. α와 α'이 문제의 조건을 만족시키는 서로 다른 실수라고 하자. 그러면 $\alpha < \alpha'$이거나 $\alpha' < \alpha$이다. $\alpha < \alpha'$인 경우 $\alpha < \mu < \alpha'$을 만족시키는 실수 μ가 존재한다. 이때 문제의 조건에 의하여 μ는 A의 원소도 아니고 B의 원소도 아니므로 $\mu \notin A \cup B = \mathbb{R}$가 되어 모순이다. $\alpha' < \alpha$인 경우에도 모순이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키는 실수 α는 유일하다.

2.36 실수계의 공리로부터 데데킨트의 정리를 얻는 것은 문제 2.35에서 증명하였다. 이제 역을 증명하자. 실수계의 상한 공리를 제외한 모든 공리와 데데킨트의 정리의 명제가 참이라고 가정하자. S가 실수 집합의 부분집합이고 공집합이 아니며 위로 유계라고 하자.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists s \in S : x < s\},\ B = \mathbb{R} \cap A^c$$

라고 하면 A와 B는 데데킨트 정리의 두 조건을 만족시키므로

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \le \alpha \le b$$

를 만족시키는 실수 α가 유일하게 존재한다. 만약 $\alpha \in A$이면 $\alpha < x_0$을 만족시키는 $x_0 \in S$가 존재한다. $a_0 = (x_0 + \alpha)/2$라고 하면 $\alpha < a_0 < x_0$이 성립한다. $x_0 \in S$이고 $a_0 < x_0$이므로 $a_0 \in A$이다. 그런데 임의의 $a \in A$에 대하여 $a \le \alpha$가 성립하므로 $\alpha < a_0$은 모순이다. 따라서 임의의 $a \in A$와 임의의 $b \in B$에 대하여 $a < \alpha \le b$가 성립한다.

이제 $x_1 \in S$라고 하자. 만약 $\alpha < x_1$이라면 $(\alpha + x_1)/2$는 S의 원소이고 α보다 크기 때문에 모순이다. 따라서 $x_1 \le \alpha$이므로 α는 S의 상계이다.

실수 β를 S의 상계라고 하면 $\beta < s$를 만족시키는 $s \in S$가 존재하지 않으므로 $\beta \notin A$이고 $\beta \in B$이다. 따라서 B는 S의 모든 상계를 포함한다. 그런데 임의의 $b \in B$에 대하여 $\alpha \le b$이므로 $\alpha \le \beta$이다. 즉 α는 S의 상계 중에서 가장 작은 것이므로 α는 S의 상한이다.

2.37 $\{x_k \mid k \ge n\} \supseteq \{x_k \mid k \ge n+1\}$이므로

$$s_n = \sup\{x_k \mid k \ge n\} \ge \sup\{x_k \mid k \ge n+1\} = s_{n+1}$$
$$t_n = \inf\{x_k \mid k \ge n\} \le \inf\{x_k \mid k \ge n+1\} = t_{n+1}$$

이 되어 $\{s_n\}$은 감소수열이고 $\{t_n\}$은 증가수열이다.

2.38 차수가 n 이하이고 모든 계수가 정수인 다항식들의 모임을 P_n이라고 하자. P_n의 모든 원소는

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

꼴로 쓸 수 있다. 이때 이 다항식을 순서쌍

$$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n)$$

에 대응시키는 함수를 ϕ라고 하면 $\phi : P_n \to \mathbb{Z}^{n+1}$은 일대일대응이다. 그런데 $\mathbb{Z}^{n+1}$은 가산집합이므로 P_n도 가산집합이다.

모든 계수가 정수인 모든 다항식들의 모임을 P라고 하면

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$$

이다. 즉 P는 가산집합의 가산합집합이므로 P도 가산집합이다.

대수적인 수들의 집합을 A라고 하자. 그러면 임의의 $y \in A$에 대하여 y를 대입했을 때 0이 되는 다항식 $p \in P$가 존재한다. 즉

A의 모든 원소는 P의 원소에 대응되므로 $A \preccurlyeq P$이다. P가 가산집합이므로 A도 가산집합이다.

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 3일