01. 수학의 논리와 집합

http://www.aliceinmathland.com

개념 이해하기, 개념 응용하기, 실력 다지기 문제의 풀이입니다. 문제의 성격과 수준에 따라서 힌트만 있는 것도 있고 완전한 풀이가 있는 것도 있습니다. 독자의 개인적인 생각을 묻는 문제의 풀이는 싣지 않았습니다. 각 문제의 풀이 방법은 이 해설에서 제시하는 것뿐만 아니라 다른 방법이 존재할 수 있습니다.

1.1 n개의 단위명제가 합성된 명제의 진리표를 작성할 때에는 2^n가지의 경우를 생각한다. 그런 뒤 단위명제가 합성된 순서로 진리표를 작성한다.

(1)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F
단계			1	2

(2)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F
단계			1	2

(3)

p	q	r	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge r$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F
단계			1	2	3

(4)

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T
단계			1	2	3

(5)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T
단계		1	1	2

(6)

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T
단계		1	1	1	2	3

1.2 (1) 나는 고양이이거나 가볍다.
(2) 나는 가벼운 고양이이다.
(3) 고양이는 가볍다.
(4) 고양이가 아니면 가볍지 않다.
(5) 가볍지 않으면 고양이가 아니다.
(6) 나는 고양이가 아니지만 가볍다.

1.3 (1) $p \wedge \sim q$
(2) $q \to p$
(3) $q \to p$
(4) $p \to \sim q$

1.4 (1) 토끼는 하얗거나 귀엽다.
(2) 비가 내려도 우산이 잘 팔리지 않을 수 있다.
(3) 애인이 생겨도 학업 성적이 좋아지지 않을 수 있다.
(4) 부업을 해도 돈을 벌지 못하거나 여유가 줄어들지 않을 수 있다.

1.5 (1) 파충류가 아닌 개미핥기가 있다.
(2) 온순한 말은 없다.
(3) 사교적인 수학자는 없다.
(4) 귀엽지도 않고 똑똑하지도 않은 강아지가 있다.
(5) 헤엄치지 못하는 돌고래가 있다.

1.6 $\{\varnothing,\ \{1\},\ \{\{2,\ 3\}\},\ \{1,\ \{2,\ 3\}\}\}$

1.7 (1) $\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{a,\ b,\ c,\ d\}$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{b\}$.

(3) $\bigcup_{i=1}^{1} A_i = \{a,\ b\}$, $\bigcup_{i=1}^{2} A_i = \{a,\ b,\ c\}$,

$$\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\{a,\ b,\ c,\ d\},\ \bigcup_{i=1}^{4}A_i=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

이므로 이들 집합을 모두 합집합하면

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{4}\bigcup_{i=1}^{k}A_i&=\{a,\ b\}\cup\{a,\ b,\ c\}\cup\{a,\ b,\ c,\ d\}\\&\cup\{a,\ b,\ c,\ d\}\\&=\{a,\ b,\ c,\ d\}.\end{aligned}$$

(4) $\bigcap_{k=1}^{4}\bigcap_{i=1}^{k}A_i=\{a,\ b\}\cap\{a,\ b\}\cap\{b\}\cap\{b\}=\{b\}.$

(5) $\bigcup_{k=1}^{4}\bigcap_{i=1}^{k}A_i=\{a,\ b\}\cup\{a,\ b\}\cup\{b\}\cup\{b\}=\{a,\ b\}.$

(6) $\bigcap_{k=1}^{4}\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\{a,\ b\}\cap\{a,\ b,\ c\}\cap\{a,\ b,\ c,\ d\}$

$$\cap\{a,\ b,\ c,\ d\}=\{a,\ b\}.$$

1.8 $n(A)=3,\ -1\in A,\ 0\in A,\ 1\in A$이므로
$A=\{-1,\ 0,\ 1\}.$

1.9 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

1.10 (1) 각 식이 모두 $A\subseteq B$와 서로 필요충분조건임을 증명하겠다.

① $A\subseteq B$라고 가정하자. 그러면 $x\in A\Rightarrow x\in B$이므로

$$\begin{aligned}x\in A\cup B&\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\\&\Rightarrow x\in B\vee x\in B\\&\Leftrightarrow x\in B\end{aligned}$$

로서 $A\cup B\subseteq B$가 성립한다. 한편

$$x\in B\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\cup B$$

이므로 $B\subseteq A\cup B$가 성립한다. 따라서 $A\cup B=B$가 성립한다.

역으로 $A\cup B=B$임을 가정하면

$$A\subseteq A\cup B=B$$

이므로 $A\subseteq B$이다.

이로써 $A\subseteq B$와 $A\cup B=B$는 서로 필요충분조건이다.

② $A\subseteq B$라고 가정하면 $A\cap B\subseteq A$ 그리고 $A=A\cap A\subseteq A\cap B$이므로 $A\cap B=A$가 성립한다.

역으로 $A\cap B=A$임을 가정하면 $A=A\cap B\subseteq B$이므로
$A\subseteq B$가 성립한다.

따라서 $A\subseteq B$와 $A\cap B=A$는 서로 필요충분조건이다.

③ $$\begin{aligned}A\subseteq B&\Leftrightarrow(x\in A\rightarrow x\in B)\\&\Leftrightarrow\sim(x\in A)\vee x\in B\\&\Leftrightarrow x\in B\vee\sim(x\in A)\\&\Leftrightarrow\sim(\sim(x\in B))\vee\sim(x\in A)\\&\Leftrightarrow\sim(x\in B^c)\vee(x\in A^c)\\&\Leftrightarrow B^c\subseteq A^c\end{aligned}$$

(2) $A\subseteq C,\ B\subseteq C$라고 가정하면

$$\begin{aligned}x\in(A\cup B)&\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\\&\Rightarrow x\in C\vee x\in C\\&\Leftrightarrow x\in C\end{aligned}$$

이므로 $A\cup B\subseteq C$가 성립한다.

(3) $A\subseteq B,\ A\subseteq C$라고 가정하면

$$\begin{aligned}x\in A&\Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\\&\Rightarrow x\in B\vee x\in C\\&\Leftrightarrow x\in B\cup C\end{aligned}$$

이므로 $A\subseteq B\cup C$가 성립한다.

(4) $A\subseteq B$라고 가정하면

$$x\in\wp(A)\Leftrightarrow x\subseteq A\Rightarrow x\subseteq B\Leftrightarrow x\in\wp(B)$$

이므로 $\wp(A)\subseteq\wp(B)$가 성립한다.

참고로 이 명제는 역이 성립한다. $\wp(A)\subseteq\wp(B)$가 성립한다고 가정하자. 그러면 $A\in\wp(A)\subseteq\wp(B)$이므로 $A\in\wp(B)$이다. 따라서 $A\subseteq B$가 성립한다.

(5) $A\cup B=A\cap B$라고 가정하면

$$A\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq B$$

그리고

$$B\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq A$$

이므로 $A=B$가 성립한다.

역으로 $A=B$라고 가정하면

$$A\cup B=A\cup A=A=A\cap A=A\cap B$$

이므로 $A\cup B=A\cap B$가 성립한다.

(6) $$\begin{aligned}A\setminus B=A\cap B^c&=\varnothing\cup(A\cap B^c)\\&=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\\&=A\cap(A^c\cup B^c)\\&=A\cap(A\cap B)^c\\&=A\setminus(A\cap B)\end{aligned}$$

(7) A와 B를 모두 포함하는 전체집합을 U라고 하자.
$A\subseteq B$라고 가정하면

$$\begin{aligned}(B\setminus A)\cup A&=(B\cap A^c)\cup A\\&=(B\cup A)\cap(A^c\cup A)\\&=(B\cup A)\cap U\\&=B\cup A=B\end{aligned}$$

이므로 $(B\setminus A)\cup A=B$가 성립한다.

역으로 $(B\setminus A)\cup A=B$라고 가정하면

$$A\subseteq(B\setminus A)\cup A=B$$

이므로 $A\subseteq B$가 성립한다.

1.11 (1) $x_1\in A,\ x_2\in A,\ x_1\neq x_2$라고 가정하자. f는 일대일함수이므로

$$f(x_1)\in B,\ f(x_2)\in B,\ f(x_1)\neq f(x_2)$$

가 성립한다. 또한 g는 일대일함수이므로

$$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$$

이다. 따라서 $g\circ f$는 일대일함수이다.

(2) $z\in C$라고 하자. g는 위에로의 함수이므로 $g(y)=z$를 만족시키는 $y\in B$가 존재한다. 또한 f는 위에로의 함수이므로 $f(x)=y$를 만족시키는 $x\in A$가 존재한다. 즉 $g(f(x))=z$를 만족시키는 $x\in A$가 존재하므로 $g\circ f$는 위에로의 함수이다.

(3) f가 일대일함수가 아니라면

$$x_1 \neq x_2 \text{이지만 } f(x_1)=f(x_2)$$

인 x_1과 x_2가 A에 존재한다. 이때 당연히

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

가 성립하므로 $g \circ f$도 일대일함수가 아니다. 이것은 모순이므로 f는 일대일함수이다.

(4) 만약 g가 위에로의 함수가 아니라면 $z \not\in g(B)$인 z가 C에 존재한다. 즉 임의의 $y \in B$에 대하여 $g(y) \neq z$이다. 그런데 임의의 $x \in A$에 대하여 $f(x) \in B$이므로 $g(f(x)) \neq z$이다. 이것은 $g \circ f$가 위에로의 함수라는 데에 모순이다. 따라서 g는 위에로의 함수이다.

(5) 임의의 $x \in A$에 대하여 $y=f^{-1}(x)$인 $y \in A$가 존재한다. 이때 $x=f(y)$이므로

$$x=f(y)=f(f^{-1}(x))=(f \circ f^{-1})(x)$$

이다. 따라서 $f \circ f^{-1}$는 항등함수이다.

1.12 (1) $y \in f(A_1)$이라고 가정하자. 그러면 $y=f(x)$인 $x \in A_1$이 존재한다. 이때 $A_1 \subseteq A_2$이므로 $x \in A_2$이고 $y=f(x) \in f(A_2)$이다. 즉

$$y \in f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2)$$

이므로 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$가 성립한다.

(2) $x \in f^{-1}(B_1)$이라고 가정하자. 그러면 $y=f(x)$인 $y \in B_1$이 존재한다. 이때 $B_1 \subseteq B_2$이므로 $y \in B_2$이고 $x=f^{-1}(y) \in f^{-1}(B_2)$이다. 즉

$$x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$$

이므로 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$가 성립한다.

(3) $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y=f(x)$

$\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \cup A_2 \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists x : ((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists x : ((x \in A_1 \wedge y=f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y=f(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 : y=f(x)) \vee (\exists x \in A_2 : y=f(x))$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

(4) $y \in f(A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : y=f(x)$

$\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \cap A_2 \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists x : ((x \in A_1 \wedge x \in A_2) \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists x : ((x \in A_1 \wedge y=f(x)) \wedge (x \in A_2 \wedge y=f(x)))$

$\Rightarrow (\exists x \in A_1 : y=f(x)) \wedge (\exists x \in A_2 : y=f(x))$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

※ 이 문제에서 등식이 성립하지 않는 예는 보기 1.4.7에 있다.

(5) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow \exists y \in B_1 \cup B_2 : y=f(x)$

$\Leftrightarrow \exists y : (y \in B_1 \cup B_2 \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists y : ((y \in B_1 \vee y \in B_2) \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists y : ((y \in B_1 \wedge y=f(x)) \vee (y \in B_2 \wedge y=f(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists y \in B_1 : y=f(x)) \vee (\exists y \in B_2 : y=f(x))$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(6) $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow \exists y \in B_1 \cap B_2 : y=f(x)$

$\Leftrightarrow \exists y : (y \in B_1 \cap B_2 \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists y : ((y \in B_1 \wedge y \in B_2) \wedge y=f(x))$

$\Leftrightarrow \exists y : ((y \in B_1 \wedge y=f(x)) \wedge (y \in B_2 \wedge y=f(x)))$ ㉠

$\Leftrightarrow (\exists y \in B_1 : y=f(x)) \wedge (\exists y \in B_2 : y=f(x))$ ㉡

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

여기서 함수의 정의에 의하여 고정된 x에 대하여 $y=f(x)$를 만족시키는 y는 유일하므로 ㉠과 ㉡은 서로 필요충분조건이다. 이것이 앞의 (4)의 증명과의 차이점이다.

※ (3)~(6)은 임의 개수의 집합으로 확장 가능하다. 즉 임의의 i에 대하여 $A_i \subseteq A$이고, 임의의 j에 대하여 $B_j \subseteq B$일 때 다음이 성립한다.

- $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
- $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
- $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
- $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

1.13 임의의 $(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$에 대하여 $ab=ba$이므로 $(a,\ b)R(a,\ b)$이다. 즉 R는 반사적이다.

또한 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$의 원소 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$에 대하여

$$\begin{aligned}(a,\ b)R(c,\ d) &\Leftrightarrow ad=bc \\ &\Leftrightarrow cb=da \\ &\Leftrightarrow (c,\ d)R(a,\ b)\end{aligned}$$

이므로 R는 대칭적이다.

끝으로 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$의 원소 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$, $(e,\ g)$에 대하여

$$\begin{aligned}&(a,\ b)R(c,\ d) \ \wedge\ (c,\ d)R(e,\ g) \\ &\Leftrightarrow ad=bc \ \wedge\ cg=de \\ &\Rightarrow adcg=bcde \\ &\Leftrightarrow ag=be \\ &\Leftrightarrow (a,\ b)R(e,\ g)\end{aligned}$$

이므로 R는 추이적이다. 따라서 R는 동치관계이다. 한편

$$(1,\ 2)R(x,\ y) \Leftrightarrow 1y=2x$$

이므로 $(1,\ 2)$의 동치류는

$$\{\cdots,\ (-2,\ -4),\ (-1,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6),\ \cdots\}$$

이다.

참고로 이러한 동치관계는 정수를 이용하여 유리수를 만들 때 사용된다. 즉 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$의 원소 $(a,\ b)$는 a/b인 분수와

같은 것으로 생각할 수 있다. 그런데 약분하여 같은 분수는 서로 동일한 유리수이므로 이 문제에서와 같은 동치관계 R를 이용하여, 약분하여 같아지는 분수끼리 동일하게 취급되도록 한다. 즉 R에 의한 상집합 $(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))/R$에 덧셈, 곱셈, 순서관계를 적절히 정의하면 이 집합은 유리수 순서체와 동형이 된다. 자세한 내용은 상체(quotient field)를 찾아보기 바란다.

1.14 임의의 $x\in A$에 대하여 $f(x)=f(x)$이므로 $(x,\ x)\in R$이다. 즉 R는 반사적이다. 다음으로 A의 원소 $x,\ y$에 대하여

$$(x,\ y)\in R \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow f(y)=f(x) \Rightarrow (y,\ x)\in R$$

이므로 R는 대칭적이다. 끝으로 A의 원소 $x,\ y,\ z$에 대하여

$$\begin{aligned}&(x,\ y)\in R \wedge (y,\ z)\in R\\ &\quad\Leftrightarrow\ f(x)=f(y) \wedge f(y)=f(z)\\ &\quad\Rightarrow f(x)=f(z)\\ &\quad\Leftrightarrow (x,\ z)\in R\end{aligned}$$

이므로 R는 추이적이다. 따라서 R는 동치관계이다. 참고로 여기서 $f(x)=f(y)$의 등호를 B에서의 동치관계로 바꾸어도 동일한 결론을 얻을 수 있다.

1.15 먼저

$$\bigcup_{i\in I}f(A_i)=f\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=f(A)$$

이다. 즉 $f(A_i)$의 합집합은 $f(A)$가 된다.

다음으로 $y\in f(A_i)$, $y\in f(A_j)$라고 하자. 그러면 $y\in f(A)$이므로 $y=f(x)$인 $x\in A$가 존재한다. 그런데 f는 일대일함수이므로 그러한 x는 유일하다. 한편 $x\in A_i$, $x\in A_j$인데 $\{A_i\,|\,i\in I\}$가 A의 분할이므로 $i=j$이다.

끝으로 임의의 $i\in I$에 대하여 $f(A_i)\neq\varnothing$임은 자명하다.

따라서 $\{f(A_i)\,|\,i\in I\}$는 $f(A)$의 분할이다.

1.16 (1) $y\in f(A)$라고 하자. 그러면 $y=f(x)$인 $x\in A$가 존재한다. a가 A의 최대원소이므로 $x\le a$가 성립한다. 이때 f는 순서보존사상이므로 $y=f(x)\le f(a)$가 성립한다. 더욱이 $f(a)\in f(A)$이다. 따라서 $f(a)$는 $f(A)$의 최대원소이다.

(2) $y\in f(C)$라고 하자. 그러면 $y=f(x)$인 $x\in C$가 존재한다. c가 C의 상계이므로 $x\le c$가 성립한다. 이때 f는 순서보존사상이므로 $y=f(x)\le f(c)$가 성립한다. 따라서 $f(c)$는 $f(C)$의 상계이다.

1.17 (1) a가 A의 극대원소라고 하자. 그리고 $y\in B$, $f(a)\le y$라고 하자. 그러면 $y=f(x)$인 $x\in A$가 존재한다. 이때 f^{-1}가 순서보존사상이므로 $a=f^{-1}(f(a))\le f^{-1}(y)=x$, 즉 $a\le x$이다. 그런데 a가 A의 극대원소이므로 이 부등식으로부터 $a=x$를 얻는다. 따라서 $f(a)=f(x)$이므로 $f(a)$는 B의 극대원소이다. f^{-1}와 f가 가진 성질이 동일하므로 A와 B의 역할을 바꾸고 a와 $f(a)$의 역할을 바꾸면 $f(a)$가 B의 극대원소일 때 a가 A의 극대원소가 됨을 알 수 있다.

(2) f가 순서보존사상이고 $f(A)=B$이므로 a가 A의 최대원소이면 문제 1.16-(1)에 의하여 $f(a)$는 B의 최대원소이다. 또한 f^{-1}도 순서보존사상이므로 A와 B의 역할을 바꾸고 a와 $f(a)$의 역할을 바꾸면 $f(a)$가 B의 최대원소일 때 $a=f^{-1}(f(a))$가 $A=f^{-1}(B)$의 최대원소임을 알 수 있다.

(3) b가 C의 상계이면 문제 1.16-(2)에 의하여 $f(b)$는 $f(C)$의 상계가 된다. 또한 C와 $f(C)$의 역할을 바꾸고 b와 $f(b)$의 역할을 바꾸면 역이 증명된다.

(4) b가 C의 상한이면 b는 C의 상계이므로 (3)에 의하여 $f(b)$는 $f(C)$의 상계이다. 이제 y가 $f(C)$의 상계라고 하자. 그러면 $x:=f^{-1}(y)$는 C의 상계이므로 $b\le x$가 성립한다. f가 순서보존사상이므로 $f(b)\le f(x)=y$가 성립한다. 즉 $f(b)$는 $f(C)$의 상계 중에서 가장 작은 것이므로 $f(C)$의 상한이다. C와 $f(C)$의 역할을 바꾸고 b와 $f(b)$의 역할을 바꾸면 역이 증명된다.

1.18 f^{-1}가 순서보존함수임을 밝히면 된다. 결론에 반하여 f^{-1}가 순서보존함수가 아니라고 가정하자. 그러면 $a\le b$이지만 $f^{-1}(a)\not\le f^{-1}(b)$인 원소 $a,\ b$가 B에 존재한다. 이때 $f^{-1}(a)$와 $f^{-1}(b)$는 A에 속하고 A는 전순서집합이므로 $f^{-1}(b)<f^{-1}(a)$가 성립한다. f가 순서를 보존하는 일대일대응이므로

$$b=f(f^{-1}(b))<f(f^{-1}(a))=a$$

가 되어 $a\le b$라는 가정에 모순이다. 따라서 f^{-1}는 순서보존함수이다.

1.19 $P=\{f^{-1}(\{y\})\,|\,y\in B\}$라고 하면 문제 1.14에 의하여 P는 A의 분할이 되며, f가 위에로의 함수이므로 P는 B와 동일한 개수의 원소를 가진 집합이 된다. 이때 각 y에 대하여 $f^{-1}(\{y\})$에서 원소를 하나씩 택하여 만든 집합은 A의 부분집합이면서 B와 동일한 개수의 원소를 가진 집합이 된다.

1.20 이 명제를 증명하는 방법은 무한집합의 정의와 무한집합에 대한 접근 관점에 따라서 책마다 다르다. 여기서는 직관적으로 이해하기 쉬운 방법으로 증명하겠다.

(1) A가 무한집합이라고 가정하자. A는 공집합이 아니므로 $x_1\in A$를 택할 수 있다. $A\setminus\{x_1\}$은 공집합이 아니므로 원소 x_2를 택할 수 있다. $A\setminus\{x_1,\ x_2\}$는 공집합이 아니므로 원소 x_3을 택할 수 있다. 일반적으로 A의 원소 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$에 대하여 $A\setminus\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\}$는 공집합이 아니므로 원소 x_{k+1}을 택할 수 있다. 이때 $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$은 귀납적으로 잘 정의된 집합이며 A의 부분집합이고 가부번집합이다.

역으로 A의 부분집합 중 가부번집합이 존재한다고 가정하자. 만약 A가 유한집합이라면 A의 부분집합도 유한집합이므로 A는 가부번인 부분집합을 갖는다는 사실에 모순이다. 따라서 A는 유한집합이다.

('역'을 증명하는 다른 방법) A가 가부번집합을 포함한다고 가정하자. 그러면 $\mathbb{N}$으로부터 A로의 일대일함수 $f:\mathbb{N}\to A$가 존재한다. 만약 A가 유한집합이라면 $A\approx\omega_n$인 자연수 n이 존재한다. 이때 A로부터 ω_n에로의 일대일대응을 g라고 하자. 그러

면 $g \circ f : \mathbb{N} \to \omega_n$은 일대일함수이다. 이때 $(g \circ f)^{-1}(\omega_n)$은 최댓값을 갖는데, 그것을 M이라고 하자. [임의의 자연수 n에 대하여 ω_n은 유한집합이므로 $(g \circ f)^{-1}(\omega_n)$은 최댓값을 가진다.] 이때 자연수의 성질에 의하여 $M+1 \in \mathbb{N}$이지만 $(g \circ f)(M+1) \not\in \omega_n$이므로 모순이다. 따라서 A는 유한집합이 아니다.

(2) $A \setminus B$가 유한집합이라고 가정하면 $A \subseteq (A \setminus B) \cup B$로서 A는 두 유한집합의 합집합의 부분이므로 유한집합이 된다. 이것은 모순이므로 $A \setminus B$는 무한집합이다.

(3) A가 무한집합이므로 가부번인 부분집합 S를 가진다. 이때 S는 B의 부분집합이기도 하므로 (1)에 의하여 B는 무한집합이다.

(4) $A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$, $B = \{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$이라고 하자. 이때 함수 $f : A \times B \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 2^m 3^n\}$을

$$f : (a_i,\ b_j) \mapsto 2^i 3^j$$

으로 정의하면 소인수분해의 유일성에 의하여 f는 일대일함수가 된다. f의 공역은 유한집합이므로 f의 치역도 유한집합이다. 따라서 $A \times B$는 유한집합과 대등하므로 $A \times B$도 유한집합이다.

(다른 방법) A, B가 유한집합이므로 $A \approx \omega_a$, $B \approx \omega_b$인 음이 아닌 정수 a, b가 존재한다. 함수 $\phi : A \times B \to \omega_{ab}$를

$$\phi((m,\ n)) = bm + n$$

으로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다. 따라서 $A \times B \approx \omega_{ab}$이므로 $A \times B$는 유한집합이다.

(5) 먼저 A와 B가 모두 가부번집합인 경우를 증명하자. $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$이라고 하자. 이때 $A \times B$의 원소는 두 좌표의 첨수의 합이 작은 것부터 일렬로 나열할 수 있다.

$$(a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ (a_2,\ b_1),\ (a_1,\ b_3),\ (a_2,\ b_2),\ (a_3,\ b_1),\ \cdots$$

따라서 $A \times B$는 가부번집합이다.

A와 B 중 하나가 유한집합이면 A와 B 모두가 가부번집합인 경우보다 원소의 개수가 적거나 또는 그와 같으므로 $A \times B$는 당연히 가산집합이다.

A와 B가 모두 유한집합인 경우는 (4)에서 증명하였다.

(다른 방법) A와 B가 가산집합이라고 하자. 그러면 일대일함수 $\phi_A : A \to \mathbb{N}$, $\phi_B : B \to \mathbb{N}$이 존재한다. 이때 함수

$$\phi : A \times B \to \mathbb{N}\text{을 } \phi((m,\ n)) = 2^{\phi_A(m)} 3^{\phi_B(n)}$$

으로 정의하면, 소인수분해의 유일성에 의하여 ϕ는 일대일함수가 된다. 즉 $A \times B$는 $\mathbb{N}$의 부분집합과 대등하므로 가산집합이다.

1.21 $f \in 2^A$라고 하자. 그러면 f는 정의역이 A이고 공역이 $2 = \{0,\ 1\}$인 함수이다. 즉 각 $a \in A$에 대하여 $f(a)$는 0 또는 1의 값을 갖는다. 집합 S_f를 구성하되 만약 $f(a) = 0$이면 a는 S_f의 원소가 아니고 만약 $f(a) = 1$이면 a는 S_f의 원소인 것으로 정의하자. 그러면 각 f에 대하여 집합 S_f는 A의 부분집합이다. 이때 함수 $\phi : f \mapsto S_f$는 2^A로부터 $\wp(A)$로의 일대일대응이다.

(자세한 증명) 함수 $\phi : 2^A \to \wp(A)$를

$$\phi(f) = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$$

로 정의하자. 이제 ϕ가 일대일대응임을 보이자.

① $f_1 \in 2^A$, $f_2 \in 2^A$, $f_1 \neq f_2$라고 하자. 그러면 $f_1(b) \neq f_2(b)$인 $b \in A$가 존재한다. f_1과 f_2의 공역은 $\{0,\ 1\}$이므로 $f_1(b)$와 $f_2(b)$ 중 하나는 0이고 다른 하나는 1이다. 일반성을 잃지 않고 $f_1(b) = 0$, $f_2(b) = 1$이라고 하자. 그러면 $b \not\in \phi(f_1)$, $b \in \phi(f_2)$이므로 $\phi(f_1) \neq \phi(f_2)$이다. 즉 ϕ는 일대일함수이다.

② $S \in \wp(A)$라고 하자. 그러면 $S \subseteq A$이다. 이때 특성함수 χ_S는 2^A에 속하고 $\phi(\chi_S) = \{a \in A \mid \chi_S = 1\} = S$이므로 ϕ는 위에로의 함수이다.

1.22 $B_i = \mathbb{Q} \cap [i-1,\ i)$라고 하자. A_i가 가산집합이므로 각 i에 대하여 $A_i \preccurlyeq B_i$이다. 그런데 $\cup_i A_i \preccurlyeq \cup_i B_i \subseteq \mathbb{Q}$이고 $\mathbb{Q}$는 가산집합이므로 $\cup_i A_i$도 가산집합이다.

1.23 (1) 성립한다.

$$\begin{aligned} f \in \left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{j \in J} B_j\right) &\Leftrightarrow f \in \left(\prod_{i \in I} A_i\right) \wedge f \in \left(\prod_{j \in J} B_j\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I : f(i) \in A_i) \wedge (\forall i \in I : f(i) \in B_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : [f(i) \in A_i \wedge f(i) \in B_i] \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : f(i) \in A_i \cap B_i \\ &\Leftrightarrow f \in \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i). \end{aligned}$$

(2) 성립하지 않는다. $I = \{1,\ 2\}$이고

$$A_1 = \{a,\ b\},\ A_2 = \{c,\ d\},\ B_1 = \{u,\ v\},\ B_2 = \{x,\ y\}$$

라고 하자. 단, 여기서 서로 다른 알파벳은 서로 다른 원소를 나타낸다. 이때

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a,\ c),\ (a,\ d),\ (b,\ c),\ (b,\ d)\},$$

$$\prod_{i \in I} B_i = \{(u,\ x),\ (u,\ y),\ (v,\ x),\ (v,\ y)\}$$

이므로

$$\#\left(\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\prod_{i \in I} B_i\right)\right) = 4 + 4 = 8$$

이지만

$$A_1 \cup B_1 = \{a,\ b,\ u,\ v\},\ A_2 \cup B_2 = \{c,\ d,\ x,\ y\}$$

이므로

$$\#\left(\prod_{i \in I} (A_i \cup B_i)\right) = 4 \times 4 = 16$$

로서 원소의 개수가 다르다. 여기서 #는 집합의 기수(원소의 개수)를 의미한다.

1.24 $A \approx B$이고 $C \approx D$이므로 두 일대일대응 $f : A \to B$, $g : C \to D$가 존재한다.

(1) 함수 $\phi : A \cup C \to B \cup D$를

$$\phi(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in A \\ g(x) & \text{if } x\in B \end{cases}$$

로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다.

(2) 함수 $\phi : A\times C \to B\times D$를

$$\phi(x,\ y)=(f(x),\ g(x))$$

로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다.

(3) 함수 $\phi : A^C \to B^D$를 임의의 $x\in A^C$에 대하여

$$\phi(x)=f\circ x\circ g^{-1}$$

로 정의하자. 이제 ϕ가 일대일대응임을 보이자.

① $x\in A^C$일 때 $f\circ x\circ g^{-1}$는 D의 원소를 B의 원소에 대응시키므로 ϕ는 잘 정의된 함수이다.

② $x_1\in A^C$, $x_2\in A^C$, $x_1\neq x_2$라고 하자. 그러면 $x_1(c)\neq x_2(c)$인 $c\in C$가 존재한다. $d=g(c)$라고 하자. 그러면 $d\in D$이고

$$\begin{aligned}(f\circ x_1\circ g^{-1})(d)&=(f\circ x_1)(c)\\ &\neq(f\circ x_2)(c)\\ &=(f\circ x_2\circ g^{-1})(d)\end{aligned}$$

이므로 $\phi(x_1)\neq\phi(x_2)$이다. 따라서 ϕ는 일대일함수이다.

③ $y\in B^D$라고 하자. $x=f^{-1}\circ y\circ g$라고 하면 $x\in A^C$이고

$$\phi(x)=f\circ x\circ g^{-1}=f\circ f^{-1}\circ y\circ g\circ g^{-1}=y$$

이다. 따라서 ϕ는 위에로의 함수이다.

1.25 (1) 각 원소 $f\in A^{B\cup C}$는 $B\cup C$로부터 A로의 함수이다. 이때 두 축소함수 $f|_B$와 $f|_C$는 f에 대하여 각각 유일하게 결정된다.

또한 임의의 $f_B\in A^B$, $f_C\in A^C$에 대하여 $f : B\cup C\to A$를

$$f(x)=\begin{cases} f_B(x) & \text{if } x\in B \\ f_C(x) & \text{if } x\in C \end{cases}$$

라고 정의하면 f는 유일하게 결정된다.

따라서 함수 $\phi : A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$를

$$\phi : f\mapsto (f|_A,\ f|_B)$$

로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다.

(2) 각 원소 $f\in(A\times B)^C$는 C로부터 $A\times B$로의 함수이다. 따라서 $f=(f_A,\ f_B)$라고 쓸 수 있다. 이때 각 f에 대하여 f_A와 f_B는 각각 유일하게 결정된다.

또한 함수 $f_A : C\to A$와 $f_B : B\to A$가 주어질 때마다

$$f(x)=(f_A(x),\ f_B(x))$$

로 정의된 함수 $f : C\to A\times B$는 유일하게 결정된다.

따라서 함수 $\phi : (A\times B)^C \to A^C\times B^C$를

$$\phi : f\mapsto (f_A,\ f_B)$$

로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다.

(3) 각 원소 $f\in(A^B)^C$는 C로부터 A^B로의 함수이다. 즉 각 $c\in C$에 대하여 $f(c)\in A^B$이다. 따라서 $f(c)$는 B로부터 A에로의 함수이다. 즉 각 $b\in B$에 대하여 $(f(c))(b)\in A$이다. 이때 $\overline{f}(b,\ c)=(f(c))(b)$를 만족시키는 함수 $\overline{f} : B\times C\to A$는 각 f에 대하여 유일하게 결정된다.

따라서 함수 $\phi : (A^B)^C \to A^{B\times C}$를 $\phi : f\mapsto \overline{f}$로 정의하면 ϕ는 일대일대응이다.

1.26 함수 $\phi : \mathbb{R}\to\wp(\mathbb{Q})$를 $\phi(x)=\{t\in\mathbb{Q}\mid t<x\}$라고 정의하자. 그러면 유리수의 조밀성과 연속함수의 성질에 의하여 ϕ는 일대일함수이므로 $\mathbb{R}\preccurlyeq\wp(\mathbb{Q})$이다.

한편 함수 $\psi : \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$를 임의의 $f\in\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$에 대하여

$$\psi(f)=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}f(n)$$

으로 정의하면, 즉 $\psi(f)$를 즉 소수점 아래 n번째 자리 숫자가 $f(n)$인 소수로 정의하면 ψ는 일대일함수이므로

$$\mathbb{R}\succcurlyeq\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}\approx\wp(\mathbb{N})\approx\wp(\mathbb{Q})$$

이다. 따라서 칸토어-베른슈타인 정리에 의하여 $\mathbb{R}\approx\wp(\mathbb{N})$이다.

1.27 (1) X의 부분집합 A_0에 대하여 A_0이

$$y\in Y\setminus f(A_0)\ \to\ g(y)\not\in A_0$$

을 만족시키는 것을 'A_0이 성질 p를 가진다'라고 표현하자. 그러면 명백히 공집합은 성질 p를 가진다.

$$\Lambda\coloneqq\{A_0\subseteq X\mid A_0\text{은 성질 } p\text{를 가진다}\}$$

라고 하자. 그리고 $A=\cup\Lambda$라고 하자. 만약 $y\in Y\setminus f(A)$이면 각 $A_0\in\Lambda$에 대하여 $y\in Y\setminus f(A_0)$이고 $g(y)\not\in A_0$이다. 임의의 $A_0\in\Lambda$에 대하여 $g(y)\not\in A_0$이므로 $g(y)\not\in A$이다. 따라서 A는 X의 부분집합 중에서 성질 p를 갖는 가장 큰 집합이다.

$$C\coloneqq f(A),\ D\coloneqq Y\setminus C,\ B\coloneqq X\setminus A$$

라고 하자.

이제 $g(D)=B$를 만족시키는 집합 D를 찾아야 한다.

$x\in B=X\setminus A$라고 가정하자. 그러면 $A\cup\{x\}$는 성질 p를 갖지 않는다. 왜냐하면 A는 X의 부분집합 중 성질 p를 갖는 가장 큰 집합이기 때문이다. 따라서

$$y\in Y\setminus f(A\cup\{x\})\subseteq Y\setminus f(A)\eqqcolon D$$

가 존재하여 $g(y)\in A\cup\{x\}$를 만족시킨다. 그런데 A가 성질 p를 가지고 $y\in Y\setminus f(A)$이므로 $g(y)\not\in A$이다.

따라서 $g(y)=x$이므로 증명이 끝난다.

(2) 집합 A, B, C, D가 (1)에서 주어진 것이라고 하고

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in A \\ g^{-1}(x) & \text{if } x\in B \end{cases}$$

라고 하면 h는 X로부터 Y로의 일대일대응이 된다.

(칸토어-베른슈타인 정리를 증명하는 다른 방법)

일반성을 잃지 않고 X와 Y가 서로소라고 하자. 문제의 가정에 의하여 일대일함수 $f : X\to Y$와 $g : Y\to X$가 존재한다.

$x\in X$와 $y\in Y$에 대하여 $g(y)=x$가 성립할 때 y를 x의 **선행자**(parent)라고 부르자. 마찬가지로 $x\in X$와 $y\in Y$에 대하여 $f(x)=y$가 성립할 때 x를 y의 선행자라고 부르자. 선행자의

정의에 의하여 X, Y의 각 원소는 많아야 하나의 선행자를 가진다.

$z \in X \cup Y$로부터 시작하여 선행자를 이어서 나열하여 만든 순서쌍

$$(z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$$

을 z의 **선행자사슬**(parent chain)이라고 부르자. 즉 $z_0 = z$이며, 각 $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$에 대하여 z_{i+1}은 z_i의 선행자이다. 이 사슬의 **길이**(length)를 n으로 정의하자. 선행자사슬의 성분은 두 집합 X, Y의 원소가 번갈아가면서 나타난다.

이제 각 원소 z에 대하여 두 가지 경우를 생각할 수 있다. 임의의 자연수에 대하여 z의 선행자사슬의 길이가 그 자연수보다 더 긴 것이 존재하는 경우, z의 **깊이**(depth)를 무한대로 정의하자. 그렇지 않은 경우 z의 선행자사슬 중 그 길이가 가장 긴 것이 존재하는데, 바로 그 선행자사슬의 길이를 z의 깊이로 정의하자. 물론 z의 선행자가 존재하지 않는 경우에는 z의 깊이를 0으로 정의한다.

X의 원소 중에서 깊이가 짝수인 것들의 모임을 X_e로 나타내고, X의 원소 중에서 깊이가 홀수인 것들의 모임을 X_o로 나타내자. 또한 X의 원소 중에서 깊이가 무한대인 것들의 모임을 X_∞로 나타내자. Y_e, Y_o, Y_∞도 마찬가지 방법으로 정의하자.

$x \in X$의 깊이가 유한이라면 $f(x)$의 깊이는 x의 깊이에 1을 더한 것과 같다. $x \in X$의 깊이가 무한이라면 $f(x)$의 깊이도 무한이다. 그러므로 함수 f는

$$f : X_e \to Y_o,\ f : X_o \to Y_e,\ f : X_\infty \to Y_\infty$$

로 대응시킨다. Y의 원소에 대하여 g도 마찬가지로 작용한다. 더욱이 Y_o와 Y_∞의 각 원소들은 선행자를 가지므로 f에 의한 대응

$$f : X_e \to Y_o,\ f : X_\infty \to Y_\infty$$

는 일대일대응이다. 그러나 Y_e의 원소는 선행자를 갖지 않을 수도 있으므로 $f : X_o \to Y_e$는 일대일대응이 아닐 수도 있다.

이제 함수 $h : X \to Y$를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in X_e \cup X_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \in X_o \end{cases}$$

그러면 h는 일대일대응이다. □

만든이 이슬비 | designeralice@daum.net
펴낸곳 수학 나라의 앨리스 | http://aliceinmathland.com
수정일 2018년 6월 3일