해석적 함수

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 평등수렴의 개념과 성질을 설명할 수 있다.
- 거듭제곱급수의 수렴반경을 구할 수 있다.
- 해석적 함수의 뜻을 설명할 수 있다.
- 다양한 함수를 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다.

내용 순서

- 평등수렴의 개념과 성질
- 거듭제곱급수의 성질
- 해석적 함수의 뜻
- 거듭제곱급수로 나타나는 함수들

함수열의 극한

- 함수열 : 모든 항이 함수인 수열
- 함수열의 극한 :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

예를 들어 $f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$가 $f_n(x) = x^n$으로 주어져 있을 때

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \\ 0 & \text{if } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

인 함수 f에 대하여 $f_n \to f$이다.

함수열의 극한의 문제점 (1/2)

(1) $f_n(x) = |\cos x|^n$일 때 f는 연속이지만 f는 불연속인 점이 있다.

(2) $f_n(x) = \sin^n x$는 미분 가능하지만 f는 미분 불가능한 점이 있다.

(3) $\{x_k\}$가 $(0,\ 1) \cap \mathbb{Q}$의 모든 값을 취하는 수열이고

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x_1, x_2, \cdots x_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

일 때 f_n은 $[0,\ 1]$에서 적분 가능하지만 f는 $[0,\ 1]$에서 적분 불가능하다.

함수열의 극한의 문제점 (2/2)

(4) $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) = x^n/n$ f_n과 f는 모두 미분 가능하지만 $f_n{}' \not\to f$.

(5) $[0,\ 1]$에서

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

일 때 f_n과 f는 모두 적분 가능하지만

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

이러한 문제점이 발생하는 이유는?

x의 값에 따라서 $f_n(x)$가 $f(x)$에 다가가는 속도가 다르기 때문이다.

$$f_n(x) = x^n$$

$0 < x < 1$일 때,

x가 0에 가까우면 $f_n(x)$는 0에 빠르게 가까워지지만,

x가 1에 가까우면 $f_n(x)$는 0에 느리게 가까워진다.

평등수렴 (정의)

함수열 $f_n : D \to \mathbb{R}$과 함수 $f : D \to \mathbb{R}$가 주어졌을 때

- 점별수렴 :

$$\forall x \in D\ \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \to |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

임의의 $x \in D$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$

- 평등수렴 :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in D\ :\ (n > N \to |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(x) - f(x) \| = 0$$

평등수렴 (예제)

문제 1. $[0,\ 1]$에서 함수열 $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$이 평등수렴함을 보여라.

문제 2. $[0,\ 1]$에서 함수열 $f_n(x) = x^n$이 평등수렴하지 않음을 보여라.

평등수렴의 성질

(1) 연속인 함수열이 평등수렴하면 극한함수도 연속이다.

(2) 적분 가능한 함수열이 평등수렴하면 극한함수도 적분 가능하다.
이때 극한함수의 적분은 함수열의 적분의 극한과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx.$$

(3) 미분 가능한 함수열이 수렴하고, 그 도함수열이 연속인 함수에 평등수렴하면 극한함수도 미분 가능하다.
이때 극한함수의 미분은 함수열의 미분의 극한과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right).$$

수렴영역 구하기

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

- $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$
- $R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

거듭제곱급수의 성질

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

(1) 아벨의 정리

"거듭제곱급수가 닫힌구간에서 수렴하면 그 구간에서 평등수렴한다."

(2) 거듭제곱급수를 미분하거나 적분할 때에는 수렴반경 내에서
항별로 미분하거나 적분하면 된다.

해석적 함수의 뜻

(1) 해석적 함수 : 거듭제곱급수로 나타낼 수 있는 함수

(2) 주어진 함수를 거듭제곱급수로 나타내는 방법 - 테일러 급수!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

거듭제곱급수로 나타나는 함수들

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

복소함수로의 확장

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$