리만 적분

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 리만 적분의 정의를 말하고 그 개념을 설명할 수 있다.
- 닫힌구간에서 유계인 함수의 리만 적분 가능성을 판별할 수 있다.
- 리만 적분의 성질을 설명할 수 있다.

내용 순서

- 리만 적분의 정의
- 리만 적분 가능성
- 리만 적분의 성질

구간의 분할 (정의)

P가 $[a,\ b]$의 유한부분집합이고 a, b를 원소로 가질 때 P를 $[a,\ b]$의 **분할**이라고 부른다. 편의상 P를 원소나열법

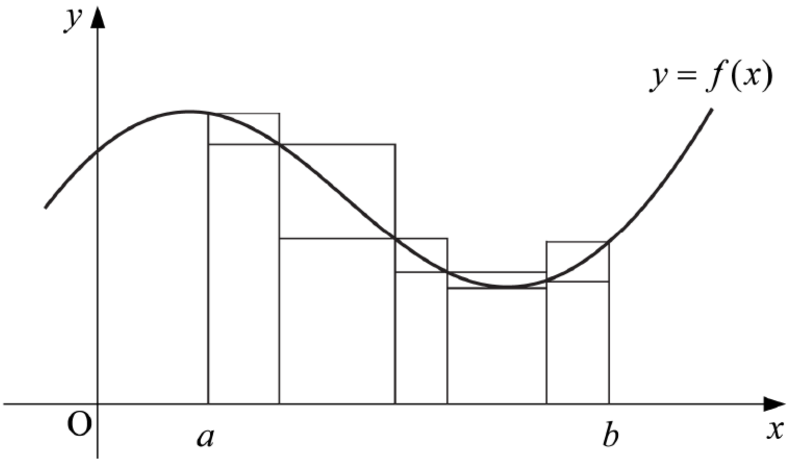
$$P = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$$

으로 나타낼 때에는

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

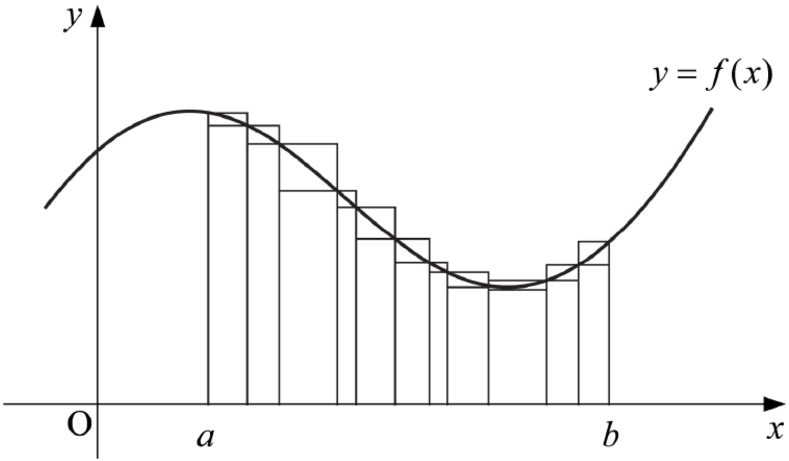
가 성립하는 것으로 약속한다.

상합과 하합 (정의)



- **상합** : $U(f,\ P) = \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1},\ x_i])\,(x_i - x_{i-1})$
- **하합** : $L(f,\ P) = \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1},\ x_i])\,(x_i - x_{i-1})$

세련분할

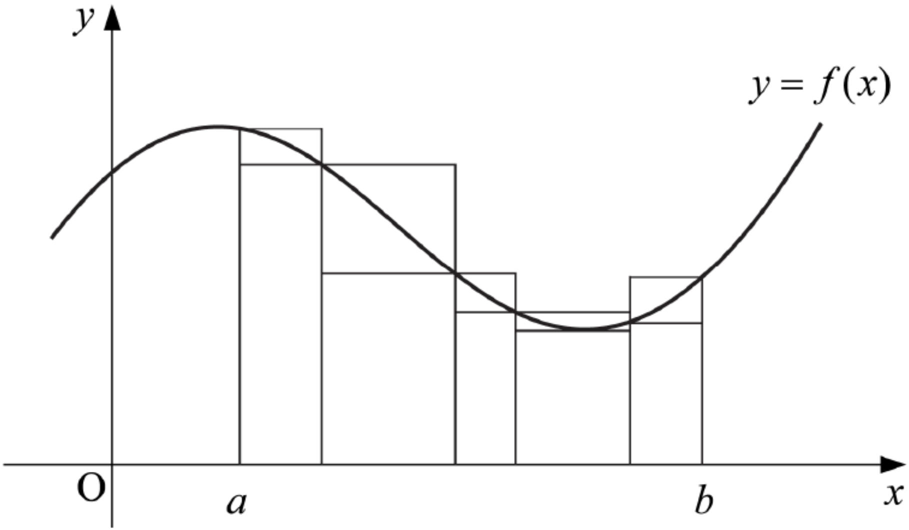


- **상합** : $U(f,\ P) = \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1})$
- **하합** : $L(f,\ P) = \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1})$

세련분할 (정의)

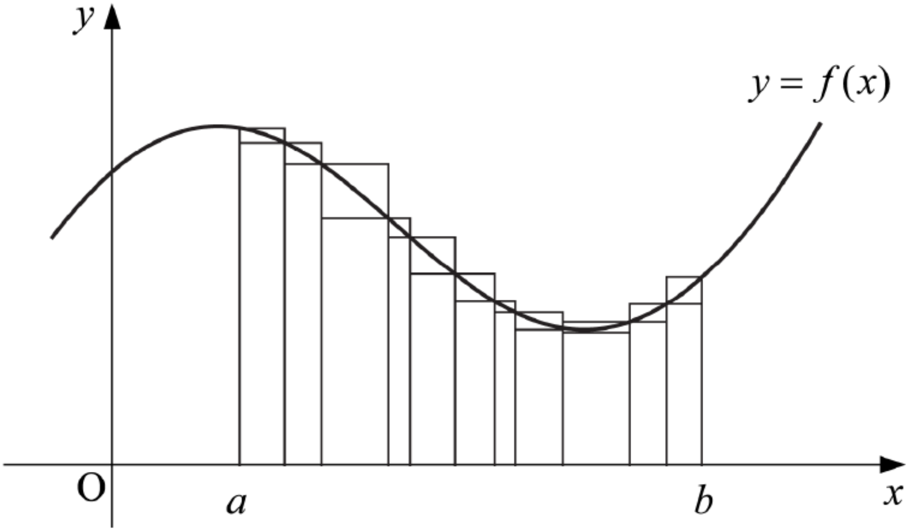
P_1과 P_2가 $[a,\ b]$의 분할이고 $P_1 \subseteq P_2$일 때 P_2를 P_1의 **세련분할**이라고 부른다. 직관적으로 세련분할이란 원래의 분할보다 더 많이 자른 분할을 뜻한다.

P_3이 $[a,\ b]$의 분할이고 $P_1 \cup P_2 \subseteq P_3$일 때 P_3을 P_1과 P_2의 **공통세련분할**이라고 부른다.



$P_1 \subseteq P_2$일 때

$$U(f,\ P_1) \geq U(f,\ P_2),\ L(f,\ P_1) \leq L(f,\ P_2)$$



$$P_1 \subseteq P_2\text{일 때}$$

$$U(f,\ P_1) \geq U(f,\ P_2),\ L(f,\ P_1) \leq L(f,\ P_2)$$

상적분과 하적분 (정의)

- $[a,\ b]$에서 f의 **리만 상적분** :

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}$$

- $[a,\ b]$에서 f의 **리만 하적분** :

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}$$

구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$의 상적분과 하적분은 같을 수도 있고 다를 수도 있다.

상적분과 하적분

구간 $[0,\ 1]$ 에서 다음과 같이 정의된 함수 f 의 상적분과 하적분을 구해보자.

(1) $f(x)=2$

(2) $f(x)=x$

(3) $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}$

리만 적분 (정의)

만약 $[a,\ b]$에서 함수 f의 상적분과 하적분이 같으면 그 값을 $[a,\ b]$에서 f의 **리만 적분**이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

여기서 f를 **피적분함수**라고 부르고 x를 **적분변수**라고 부른다.

리만 적분 가능성 (정리)

리만 적분 가능성을 판별하는 방법은 다음과 같은 것들이 있다.

(i) 리만 적분의 정의를 이용하는 방법.

(ii) 리만 판정법 : 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $[a,\ b]$의 분할 P가 존재하여 $U(f,\ P)-L(f,\ P)<\epsilon$을 만족시키는 것이다.

(iii) 르베그의 정리 : 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 $[a,\ b]$의 점들 중 f가 불연속인 점들의 집합의 측도가 0인 것이다.

(iv) 리만 적분과 동치인 적분의 정의를 이용하는 방법.

리만 적분 가능성

리만 적분 가능성에 대한 다음 문제를 풀어보자.

(1) 함수 f가 $[a, b]$에서 단조이면 f는 $[a, b]$에서 적분 가능함을 보여라.

(2) 함수 f가 $[a, b]$에서 연속이면 f는 $[a, b]$에서 적분 가능함을 보여라.

(3) 다음과 같이 정의된 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$는 $[0, 1]$에서 적분 불가능함을 보여라.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

리만 적분의 기본 성질

두 함수 f, g가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 k가 실수일 때 $f+g$, fg, kf 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

(i) $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(ii) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

(계속)

리만 적분의 기본 성질

또한 $a<c<d<b$이고 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 f는 $[a,\ c]$, $[c,\ b]$, $[c,\ d]$에서도 적분 가능하고 다음이 성립한다.

(iii) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

만약 f와 g가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $f(x)\le g(x)$이면 다음이 성립한다.

(iv) $$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

리만 적분의 값을 계산하는 방법

(1) 미적분학의 기본정리

(2) 부분적분법

(3) 변수변환

※ 이건 미적분학에서 합니다.