함수의 미분

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 미분계수와 도함수의 정의를 말할 수 있다.
- 사칙계산, 함수의 합성과 관련된 미분의 성질을 증명할 수 있다.
- 평균값 정리를 이용하여 함수의 증감과 관련된 성질을 증명할 수 있다.
- 역함수 정리와 도함수의 중간값 성질을 설명할 수 있다.
- 테일러의 정리를 이용하여 함수값의 근삿값을 구할 수 있다.

내용 순서

- 미분계수와 도함수의 정의
- 미분의 성질
- 평균값 정리
- 역함수 정리
- 도함수의 중간값 성질
- 테일러의 정리

미분계수 (정의)

E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $a \in E \cap E'$이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 a에서 미분 가능하다는 것은

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 수렴하는 것을 의미한다. 이 극한을 a에서 f의 **미분계수**라고 부르며 $f'(a)$ 또는 $Df(a)$로 나타낸다.

도함수 (정의)

만약 E의 점들 중 $f : E \to \mathbb{R}$가 미분 가능한 점들의 모임을 H라고 하면

$$f' : H \to \mathbb{R}, \; f' : x \mapsto f'(x)$$

는 H로부터 $\mathbb{R}$로의 함수가 된다. 이때 f'을 f의 **도함수**라고 부른다. 또한 함수의 미분계수를 구하거나 도함수를 구하는 것을 '**미분한다**'라고 말한다.

f를 n번 미분한 함수를 f의 n **계도함수**라고 부르고 $f^{(n)}$으로 나타낸다. 편의상 $f^{(0)} = f$로 정의한다.

C^n급 함수 (정의)

'$f : E \to \mathbb{R}$가 H에서 D^n급이다' $(H \subseteq E)$

$\Longleftrightarrow$ f가 H 위에서 n번 미분 가능하다.

'$f : E \to \mathbb{R}$는 H에서 C^n급이다'

$\Longleftrightarrow$ f가 H 위에서 n번 미분 가능하고 $f^{(n)}$이 H 위에서 연속이다.

$D^n(H)$: H에서 D^n급인 함수들의 모임.

$C^n(H)$: H에서 C^n급인 함수들의 모임.

$D^\infty(H)$, $C^\infty(H)$: H 위에서 임의 횟수로 미분 가능한 함수들의 모임.

미분의 성질 (정리)

두 함수 f, g가 정의역이 같고 a에서 미분 가능하며 $k \in \mathbb{R}$라고 하자.
그러면 $f+g$, kf, fg도 a에서 미분 가능하고 다음이 성립한다.

(ⅰ) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(ⅱ) $(kf)'(a) = kf'(a)$

(ⅲ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

만약 $g(a) \neq 0$이면 f/g도 a에서 미분 가능하고 다음이 성립한다.

(ⅳ) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

연쇄법칙 (합성함수의 미분법)

함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 주어졌다고 하자. 만약 f가 $a \in A$에서 미분 가능하고 $b = f(a)$이며 g가 b에서 미분 가능하면 $g \circ f$는 a에서 미분 가능하고 $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$가 성립한다.

증명의 개요.

$$\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} - g'(b) & \text{if } y \neq b \\ 0 & \text{if } y = b \end{cases}$$

라고 하고 $g(f(x)) - g(f(a))$를 구하고, 이것을 이용하여 $(g \circ f)'(a)$를 계산한다.

평균값 정리 (평균변화율 정리)

함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $a<b$이면

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

를 만족시키는 점 c가 $(a,\ b)$에 존재한다.

평균값 정리를 활용한 증명

이 정리로 쉽게 증명할 수 있는 따름정리는 다음과 같은 것들이 있다.

(ⅰ) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이면 $[a,\ b]$에서 f의 증감은 f'의 부호에 따라 결정된다.

(ⅱ) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $f' \equiv 0$이면 f는 $[a,\ b]$에서 상수함수이다.

(ⅲ) 함수 f와 g가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $f' \equiv g'$이면 f와 g는 상수차이이다.

도함수를 활용한 부등식의 증명

문제. 임의의 양수 x 에 대하여 $1+x<e^x$ 임을 보여라.

풀이. $f(x) \coloneqq e^x - x$ 라고 하면 $f'(x) = e^x - 1$ 이다.

$x>0$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로 f 는 $(0,\ \infty)$ 에서 순증가한다.

따라서 $x>0$ 일 때 $e^x - x = f(x) > f(0) = 1$ 이 성립한다.

역함수 정리

함수 f가 $(a,\ b)$에서 C^1급이고 $c \in (a,\ b)$이며 $f'(c) \neq 0$이라고 하자. 그러면 c의 열린근방 U가 존재하여 f는 U에서 일대일대응이 되고 U 위에서 역함수 g를 가지며 g는 $f(U)$에서 C^1급이고

$$g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

이 성립한다.

도함수의 중간값 성질

함수 f가 a에서 미분 가능하면 f는 a에서 연속이다. 그러나 f'은 a에서 연속이 아닐 수도 있다. 예를 들어 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

으로 주어졌을 때 f는 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하지만 f'은 0에서 연속이 아니다.

그러나 f가 미분 가능한 경우 f'은 항상 중간값 성질을 가진다.
이 성질을 **다르보의 정리**라고 부른다.

문제. 미분 가능한 함수의 도함수는 불연속인 점에서 좌극한과 우극한을 갖지 않음을 증명하여라.

테일러의 정리

테일러의 정리 : 미분 가능한 함수의 근사 다항함수를 만드는 방법

n이 자연수이고 a, b가 실수 또는 무한대이며 $f \in D^{(n+1)}(a,\ b)$라고 하자. 그러면 $(a,\ b)$의 임의의 두 점 x, x_0에 대하여 두 점 사이의 점 c가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

테일러의 정리

여기서

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

을 n차 **테일러 다항식**이라고 부른다. 테일러의 정리에 의하면

$$|f(x)-P_n(x)| \le \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|$$

이 성립한다. 이 부등식은 제한된 범위 내에서 테일러 다항식 P_n이 원래의 함수 f에 얼마나 가까운지 가늠할 수 있도록 해준다.

테일러의 정리 (예제)

문제. 테일러의 정리를 이용하여 오일러 상수 e의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하여라.

$f(x) := e^x$, $x_0 = 0$이라고 하자.

$x \in (0,\ 1]$과 $c \in (0,\ x)$에 대하여 $e^c \le 3$이므로

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!}(x - x_0) \right| \le \frac{3}{(n+1)!}$$

이다. 따라서 $n \ge 7$이고 $x \in (0,\ 1]$이면 $c \in (0,\ x)$가 존재하여

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right| \le \frac{1}{13440} < \frac{5}{10000}$$

를 만족시킨다.

(계속)

$$P_7(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

이므로 $x = 1$을 대입하면

$$e \fallingdotseq P_7(1) = 2.71825396\cdots \fallingdotseq 2.718.$$