함수의 극한

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 수렴하는 함수의 극한의 정의를 설명할 수 있다.
- 극한의 정의를 이용하여 함수의 극한의 성질을 증명할 수 있다.
- 수렴하는 함수의 극한을 증명할 수 있다.
- 연속함수의 정의를 말하고 함수의 연속성을 증명할 수 있다.
- 평등연속의 개념을 설명할 수 있다.
- 여러 가지 극한의 정의를 말할 수 있다.

내용 순서

- 수렴하는 함수의 극한의 정의
- 함수의 극한을 증명하는 기술
- 연속함수
- 평등연속
- 여러 가지 극한

수렴하는 함수의 극한의 정의 (점에서의 극한)

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$은 함수, $L \in \mathbb{R}$, $a \in D'$이라고 하자. 만약

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

이 성립하면 'a에서 f는 L에 **수렴한다**'고 말하고, L을 a에서 f의 **극한** 또는 **극한값**이라고 부른다.

"양수 ϵ이 아무리 작아도 양수 δ가 충분히 작으면 x와 a의 거리가 δ보다 작을 때마다 $f(x)$와 L 사이의 거리가 ϵ보다 작아진다."

이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$x \to a$**일 때** $f(x) \to L$' 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = L$

수렴하는 함수의 극한의 정의 (무한대에서의 극한)

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$은 함수, $L \in \mathbb{R}$이라고 하자. 만약 만약 D가 위로 유계가 아니고

$$\forall \epsilon > 0\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x \in D : (x > X \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

이 성립하면 'f는 양의 무한대에서 L에 수렴한다'고 말하고 L을 양의 무한대에서 f의 극한 또는 극한값이라고 부른다.

"양수 ϵ이 아무리 작아도 X가 충분히 크면 x가 X보다 클 때마다 $f(x)$와 L 사이의 거리가 ϵ보다 작아진다."

기호로는 '$x \to +\infty$ **일 때** $f(x) \to L$' 또는 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

함수의 극한을 증명하는 예

함수의 극한의 정의를 이용하여 다음을 증명해보자.

(1) $f(x)=2x+1$로 정의된 함수 f가 3에서 7에 수렴함을 보여라.

(2) $x \to 2$일 때 $x^2+1 \to 5$임을 증명하여라.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$을 증명하여라.

(4) $x \to -\infty$일 때 $\dfrac{x+1}{x-1} \to 1$임을 보여라.

함수의 극한을 증명하는 기술

(1) 부등식 이용하기

(2) 수열 판정법

(3) 그 외의 방법

부등식 이용하기 (함수의 극한을 증명하는 기술 1)

부등식을 이용하는 것은 함수의 극한을 증명하는 가장 기본적인 방법이다.

(1) $x \to 5$일 때 $\sqrt{x-1} \to 2$임을 보여라.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x = 0$임을 증명하여라.

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$임을 증명하여라.

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$임을 증명하여라.

수열 판정법 (함수의 극한을 증명하는 기술 2)

$D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D'$, $L \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$가 함수일 때, 다음 두 명제는 서로 동등하다.

(i) f가 a에서 L에 수렴한다.

(ii) a에 수렴하고 모든 항이 $D \setminus \{a\}$에 속하는 **모든** 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\{f(x_n)\}$이 L에 수렴한다.

수열 판정법은 수열의 극한의 성질을 함수의 극한으로 옮겨주는 중요한 정리이다.

(계속)

수열 판정법 (함수의 극한을 증명하는 기술 2)

수열 판정법을 이용하면 다음과 같은 문제를 쉽게 풀 수 있다.

(1) $x \to a$일 때 $f(x) \to A$이고 $g(x) \to B$이면 $(f(x)+g(x)) \to (A+B)$임을 증명하여라.

(2) $x \to a$일 때 $f(x) \to A$이고 $g(x) \to B$이면 $f(x)g(x) \to AB$임을 증명하여라.

(3) $\chi_{\mathbb{Q}}$는 수렴하는 점이 없음을 증명하여라.

(4) $x \to 0$일 때 $\sin\dfrac{1}{x}$은 발산함을 증명하여라.

그 밖의 방법들

(1) 코시 조건 이용하기

(2) 단조수렴 정리 이용하기

(3) 상극한과 하극한 이용하기

(4) 로피탈의 정리 이용하기

$$\vdots$$

함수의 연속 (정의)

$a \in D \subseteq \mathbb{R}$이고 함수 $f : D \to \mathbb{R}$가 주어졌다고 하자.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : (|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

이 성립하면 'f는 a **에서 연속이다**'라고 말한다.

$E \subseteq D$이고 E의 모든 점에서 f가 연속일 때 'f는 E**에서 연속이다**'라고 말한다. 정의역의 모든 점에서 연속인 함수를 **연속함수**라고 부른다.

함수의 연속 (동등한 정의)

$f: D \to \mathbb{R}$가 함수이고 $a \in D$일 때 다음은 모두 서로 동등하다.

(ⅰ) f가 a에서 연속이다.

(ⅱ) a가 D의 고립점이거나, a가 D의 집적점인 경우 f가 a에서 $f(a)$에 수렴한다.

(ⅲ) 모든 항이 D에 속하면서 a에 수렴하는 **임의의** 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$가 성립한다.

함수의 연속의 예

(1) 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 0에서 연속임을 보여라.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

(2) 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 한 점에서만 연속임을 보여라.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

연속함수의 성질 (정리)

연속함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

(1) 사칙계산에 의하여 결합된 연속함수는 정의역의 모든 점에서 연속이다.

(2) f가 a에서 연속이면 f는 a의 근방에서 유계이다.

(3) 연속함수는 중간값 성질을 가진다.

(4) $f : K \to \mathbb{R}$가 연속함수이고 K가 긴밀집합이면 f는 K에서 유계이며, 최댓값과 최솟값을 가진다.

(5) 두 연속함수의 합성함수는 연속함수이다.

평등연속

함수 $f:(0,\ \infty)\rightarrow \mathbb{R}$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$\epsilon=1$이고 $a=3$일 때에는 $\delta=1$에 대하여 다음은 참이다.

$$\forall x\in(0,\ \infty):(|x-a|<\delta\rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon)$$

그러나 $\epsilon=1$이고 $a=1$일 때에는 $\delta=1$에 대하여 위 명제는 참일까?

즉 ϵ이 변하지 않아도 a가 변하면 연속의 정의를 만족시키기 위한 δ의 값이 변한다.

(계속)

평등연속

그러나 함수에 따라서는 주어진 ϵ에 대하여 δ가 정해지기만 하면 a의 값이 변해도 연속의 정의가 계속 만족되는 경우가 있다. 즉 함수 $f : D \to \mathbb{R}$가

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall a, x \in D : (|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon])$$

을 만족시키면 'f는 D**에서 평등연속**이다'라고 말한다.

평등연속과 관련하여 다음과 같은 정리가 있다.

(1) 평등연속인 함수는 연속함수이다.

(2) 긴밀집합 위에서 연속인 함수는 그 집합 위에서 평등연속이다.

※ 평등연속성은 적분의 성질을 증명할 때 사용된다.

평등연속의 예

다음과 같이 주어진 함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가 평등연속인지 아닌지 판별하여라.

(1) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

(2) $D = (0,\ 1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(3) $D = [-1,\ 1]$, $f(x) = x^2$

(4) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(5) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

여러 가지 극한

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 실수 a, L에 대하여 다음과 같은 극한을 정의해보자. (a의 조건도 함께 써보자.)

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(3) $\lim_{x \to a-} f(x) = L$

(4) $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

(5) a에서 f의 극한은 진동한다.