열린집합과 닫힌집합

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 열린집합과 닫힌집합의 개념을 설명할 수 있다.
- 집합이 열린집합(또는 닫힌집합)일 필요충분조건을 설명할 수 있다.
- 집적점과 폐포의 개념을 설명할 수 있다.

내용 순서

- 열린구와 닫힌구
- 열린집합과 닫힌집합
- 내부, 외부, 경계
- 부분공간에서의 열린집합과 닫힌집합
- 도집합과 폐포

열린구와 닫힌구

(1) a와 b가 실수일 때

- **열린구간** : $(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **닫힌구간** : $[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

(2) $a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$일 때

- **열린구** : $B_r(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x-a| < r\right\}$ (open ball)
- **닫힌구** : $\overline{B}_r(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x-a| \le r\right\}$ (closed ball)

이때 a를 중심, r를 반지름이라고 부른다.

열린집합과 닫힌집합 (정의)

(1) **열린집합** : 경계를 전혀 포함하지 않는 집합

(2) **닫힌집합** : 경계를 모두 포함하는 집합

※ 열린집합과 닫힌집합의 예

(1) 열린구간은 열린집합이다.

(2) 닫힌구간은 닫힌집합이다.

(3) 공집합은 열린집합이면서 닫힌집합이다.

(4) $a<b$일 때 반열린구간 $[a,\ b)$, $(a,\ b]$는 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다.

내부, 외부, 경계 (정의)

(1) $E \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$라고 하자.

- a가 E의 **내점**이다 $\iff$ $\exists r > 0 : B_r(a) \subseteq E$
- a가 E의 **외점**이다 $\iff$ $\exists r > 0 : B_r(a) \subseteq E^c$

  $\iff$ a가 E^c의 내점이다
- a가 E의 **경계점**이다 $\iff$ a가 E의 내점도 아니고 외점도 아니다

  $\iff$ $\forall r > 0 : (B_r(a) \cap E \neq \varnothing \ \wedge \ B_r(a) \cap E \neq \varnothing)$

- E의 **내부** $=$ E의 내점들의 모임 $= \operatorname{int} E = E^o$
- E의 **외부** $=$ E의 외점들의 모임 $= \operatorname{ext} E = (E^c)^o$
- E의 **경계** $=$ E의 경계점들의 모임 $= \operatorname{bd} E = \partial E$

내부와 경계의 예

	집합	내부	경계
(1)	$[0,\ 6)$	$(0,\ 6)$	$\{0,\ 6\}$
(2)	$\{1,\ 2,\ 3\}$	$\varnothing$	$\{1,\ 2,\ 3\}$
(3)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$
(4)	$(0,\ \pi) \cap \mathbb{Q}$	$\varnothing$	$[0,\ \pi]$
(5)	$[-\pi,\ \pi] \cap \mathbb{Q}$	$\varnothing$	$[-\pi,\ \pi]$
(6)	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

열린집합의 성질

(1) **여러 개**의 열린집합의 합집합은 열린집합이다.

(2) **유한 개**의 열린집합의 교집합은 열린집합이다.

그러나!

(3) **무한 개의 열린집합의 교집합**은 열린집합이 아닐 수도 있다.

예. $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)=[0,\ 1]$

닫힌집합의 성질

(1) **유한 개**의 닫힌집합의 합집합은 닫힌집합이다.

(2) **여러 개**의 닫힌집합의 교집합은 닫힌집합이다.

그러나!

(3) **무한 개의 닫힌집합의 합집합**은 닫힌집합이 아닐 수도 있다.

예. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},\ 3-\frac{1}{n}\right] = (0,\ 3)$

부분공간에서의 열린집합과 닫힌집합 (도입)

※ 3은 구간 $(1,\ 3]$의 내점일까 아닐까?

(1) 전체 공간이 $\mathbb{R}$ 일 때 : 3은 $(1,\ 3]$의 내점이 아니다.

(2) 전체 공간이 $[0,\ 3]$일 때 : 3은 $(1,\ 3]$의 내점이다.

$\because\ B_1(3) = (2,\ 3] \subseteq (1,\ 3]$.

$\therefore$ 전체공간이 $\mathbb{R}$ 일 때 $(1,\ 3]$은 열린집합이 아니지만,
전체공간이 $[0,\ 3]$일 때 $(1,\ 3]$은 열린집합이다.

$\therefore$ 집합이 열린집합인지 아닌지 여부는 전체공간이 무엇이냐에 따라 달라진다.

부분공간에서의 열린집합과 닫힌집합 (정의)

X가 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이라고 하자. (부분벡터공간이 아니라 부분위상공간.)

(1) $a \in X$, $r > 0$일 때 $B_r(a) = \{x \in X \mid |x-a| < r\}$.

(2) $G \subseteq X$라고 하자. G가 **X 에서 열린집합**일 필요충분조건은

$$\forall a \in G \ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq G.$$

(3) $F \subseteq X$라고 하자. F가 **X 에서 닫힌집합**일 필요충분조건은

$$\forall a \in F^c \ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq F^c.$$

(단, $F^c = X \setminus F$)

※ 열린집합 = 개집합 = Gae jip hap / 닫힌집합 = 폐집합 = Fye jip hap.

열린집합과 닫힌집합의 예

	집합	전체집합	판정
(1)	$[0,\ 6)$	$(-10,\ 6)$	closed
(2)	$\{1,\ 2,\ 3\}$	$\mathbb{Z}$	both
(3)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	both
(4)	$[0,\ 6)$	$[0,\ 6)$	both
(5)	$(0,\ \pi)\cap\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	open
(6)	$[-\pi,\ \pi]\cap\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	both
(7)	$[4,\ 7)$	$(0,\ 7]$	neither

부분공간에서 열린집합과 닫힌집합의 판정 (정리)

$X \subseteq \mathbb{R}$ 라고 하자.

(1) G가 $\mathbb{R}$에서 열린집합이면 $G \cap X$는 X에서 열린집합이다.

(2) F가 $\mathbb{R}$에서 닫힌집합이면 $F \cap X$는 X에서 닫힌집합이다.

※ 앞의 예를 다시 보자!

열린집합과 닫힌집합의 예 다시보기

	집합 E	전체집합 X	$E = G \cap X,\ E = F \cap X$
(1)	$[0,\ 6)$	$(-10,\ 6)$	$[0,\ 7] \cap (-10,\ 6)$
(2)	$\{1,\ 2,\ 3\}$	$\mathbb{Z}$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right) \cap \mathbb{Z},\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$
(6)	$[-\pi,\ \pi] \cap \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$(-\pi,\ \pi) \cap \mathbb{Q}$
(7)	$[4,\ 7)$	$(0,\ 7]$	$[4,\ 7) \neq E \cap (0,\ 7]$

도집합과 폐포 (정의와 정리)

$a \in \mathbb{R}$ 이고 $E \subseteq \mathbb{R}$ 라고 하자.

(1) a가 E의 **집적점**이다 $\Longleftrightarrow$ $\forall r > 0 : B_r'(a) \cap E \neq \varnothing$

$\Longleftrightarrow$ $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{a\}$이고 a에 수렴하는 수열 $\{x_n\}$을 만들 수 있다.

$\Longleftrightarrow$ a가 E의 원소이거나 E의 경계점이다.

(2) E의 **도집합** = E의 집적점들의 모임 = E'

(3) E의 **폐포** = E를 포함하는 닫힌집합 중 가장 작은 것 = $\overline{E}$ = $E \cup E'$

(4) E가 닫힌집합이다 $\Longleftrightarrow$ $E = \overline{E}$ $\Longleftrightarrow$ $E' \subseteq E$

도집합과 폐포의 예

	집합	도집합	폐포
(1)	$(1,\ 3)$	$[1,\ 3]$	$[1,\ 3]$
(2)	$(1,\ 3]$	$[1,\ 3]$	$[1,\ 3]$
(3)	$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}$	$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
(4)	$\{1,\ 2,\ 4\}$	$\varnothing$	$\{1,\ 2,\ 4\}$
(5)	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\mathbb{Z}$
(6)	$(1,\ \pi] \cap \mathbb{Q}$	$[1,\ \pi]$	$[1,\ \pi]$
(7)	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$