수열의 극한

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 수렴하는 실수열의 극한의 정의를 설명할 수 있다.
- $\epsilon - N$ 논법으로 수열의 극한의 성질을 증명할 수 있다.
- 수렴하는 수열의 극한을 증명할 수 있다.
- 발산하는 수열의 극한의 정의를 설명할 수 있다.
- 수열의 집적점의 개념을 설명할 수 있다.

내용 순서

- 수렴하는 수열의 극한의 정의
- 수렴하는 수열의 성질
- 수열의 극한을 증명하는 기술 (부등식, 단조수렴 정리, 코시 수열)
- 발산하는 수열의 극한의 정의
- 수열의 집적점
- 상극한과 하극한

수렴하는 수열의 극한의 정의

$\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 만약

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \ \rightarrow \ |a_n - L| < \epsilon)$$

이 성립하면 $\{a_n\}$은 L에 **수렴한다**고 말한다.

"양수 ϵ이 아무리 작아도 N이 충분히 커지면 N번째 항 이후로는 수열의 항과 L 사이의 거리가 ϵ보다 작아진다."

- 이때 L을 $\{a_n\}$의 **극한** 또는 **극한값**이라고 부른다.
- $\{a_n\}$이 L에 수렴하는 것을 $a_n \rightarrow L$ 또는 $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = L$ 로 나타낸다.

수렴하는 수열의 성질 (정리)

(1) 수렴하는 수열은 유계이다.

(2) 수렴하는 수열의 부분수열은 본래의 수열과 같은 값에 수렴한다.

(3) $a_n \to A,\ b_n \to B$ 이면 다음이 성립한다.

① $\{a_n + b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B.$

② $\{a_n b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB.$

③ $\forall n : b_n \neq 0$이고 $B \neq 0$이면 $\{a_n / b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$

수열의 극한을 증명하는 기술

(1) 부등식 이용하기

(2) 단조수렴 정리

(3) 코시 수열

부등식 이용하기 (수열의 극한을 증명하는 기술 1)

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$임을 보여라.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$임을 증명하여라.

(3) $a_n = \dfrac{2n+3}{3n+4}$으로 주어진 수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{2}{3}$에 수렴함을 보여라.

(4) $r > 1$이라고 하자. $n \to \infty$일 때 $\dfrac{1}{r^n} \to 0$임을 증명하여라.

단조수렴 정리 (수열의 극한을 증명하는 기술 2)

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$로 주어진 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보여라.

(2) $0 < r < 1$일 때 $\{r^n\}$의 극한을 구하여라.

(3) $r > 0$일 때 $\{r^{1/n}\}$의 극한을 구하여라.

코시 수열 (정의)

수열 $\{a_n\}$이 조건

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, m, n \in \mathbb{N} : \left[(m > N \wedge n > N) \rightarrow \left| a_m - a_n \right| < \epsilon \right]$$

을 만족시킬 때 $\{a_n\}$을 **코시 수열**이라고 부른다.

- 실수열이 수렴할 필요충분조건은 코시 수열인 것이다.
- 극한값을 알지 못하는 상태에서는 코시 수열을 이용하면 편리하다.

코시 수열 (수열의 극한을 증명하는 기술 3)

실수열 $\{a_n\}$에 대하여 $0<q<1$인 실수 q가 존재하여 임의의 n에 대하여

$$\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right| \le q\left|a_{n+1}-a_n\right|$$

이 성립하면 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

발산하는 수열의 극한의 정의

수렴하지 않는 것을 **발산**이라고 부른다.

'수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하지 않는다'의 정의

$$\exists\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N\ \wedge\ |a_n - L| \geq \epsilon)$$

'수열 $\{a_n\}$이 어떠한 값에도 수렴하지 않는다'의 정의

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N\ \wedge\ |a_n - L| \geq \epsilon)$$

발산하는 수열의 극한

수열 $\{a_n\}$이 발산함을 보이는 방법은 다음과 같은 것들이 있다.

- 수렴의 정의의 부정을 이용하여 발산임을 보인다.
- $\{a_n\}$이 유계가 아님을 보인다.
- $\{a_n\}$의 부분수열 중 서로 다른 값에 수렴하는 것을 찾는다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 발산함을 증명해보자.

(1) $a_n = (-1)^n$

(2) $a_n = n^2$

(3) $a_n = n - n^3$

(4) $a_n = \sin n$

수열의 집적점

다음과 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

$$a_n = (-1)^n$$

그런데 그냥 발산한다고만 하기는 아깝지 않은가?

$$a_{2n} \to 1, \quad a_{2n+1} \to -1$$

이때 1과 -1을 $\{a_n\}$의 집적점이라고 부른다.

즉 수렴하는 부분수열의 극한값을 **집적점**이라고 부른다.

수열의 집적점의 예

일반항이 다음과 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$의 집적점을 구하여라.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(2) $a_n = (-1)^n$

(3) $a_n = n$

(4) $a_n = (-n)^n$

(5) $a_n = n - n(-1)^n$

집합의 집적점

다음과 같은 집합을 생각하자.

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

이 집합의 원소들은 0 주변에 몰려있다. 이때 0을 이 집합의 집적점이라고 부른다.

즉 E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 λ가 실수이며

$$\forall \epsilon > 0 : (\lambda - \epsilon, \ \lambda + \epsilon) \cap E \setminus \{\lambda\} \neq \varnothing$$

일 때 λ를 E의 **집적점**이라고 부른다.

볼차노-바이어슈트라스 정리

(1) 유계인 수열은 집적점을 가진다.

(2) 유계인 무한집합은 집적점을 가진다.

상극한과 하극한

(1) **상극한** : 수열의 집적점 중에서 가장 큰 값.

기호로는 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ 또는 $\limsup_{n\to\infty} a_n$

(2) **하극한** : 수열의 집적점 중에서 가장 작은 값.

기호로는 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ 또는 $\liminf_{n\to\infty} a_n$

주의! $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \inf a_n$

상극한과 하극한의 예

다음 수열의 상극한과 하극한을 증명 없이 구하여라.

		상극한	하극한
(1)	$\{(-1)^n\}$	1	-1
(2)	$\{n+n(-1)^n\}$	$+\infty$	0
(3)	$\{n^2\}$	$+\infty$	$+\infty$
(4)	$\{-n^3\}$	$-\infty$	$-\infty$
(5)	$\{(-n)^n\}$	$+\infty$	$-\infty$