실수계의 성질

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 체 공리를 이용하여 실수의 연산 법칙을 증명할 수 있다.
- 순서 공리를 이용하여 부등호의 성질을 증명할 수 있다.
- 상한과 뜻과 성질을 예를 들어 설명할 수 있다.
- 실수계의 완비성 공리를 이용하여 유리수의 조밀성을 증명할 수 있다.

내용 순서

- 무정의 용어와 공리
- 실수계의 체 공리
- 실수계의 순서 공리
- 상한과 하한
- 실수계의 완비성

'실수계의 성질' 단원은 약간 딱딱하고 지루할 수 있다.
그러나 이 장을 잘 넘기면 다음 단원부터는 재미있는 것들이 많이 나온다.
이어지는 단원은 극한, 미분, 적분, 급수, 함수열, … (^^)/;

무정의 용어와 공리

- 무정의 용어 : 정의할 수 없지만 존재하는 개념
- 공리 : 증명할 수 있지만 정당성을 인정하는 사실

실수계의 공리

실수계의 공리는 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

- 체 공리 : 덧셈, 곱셈과 관련된 공리
- 순서 공리 : 부등호와 관련된 공리
- 완비성 공리 : 극한을 자유롭게 다룰 수 있도록 하는 공리

※ 체 공리는 $\mathbb{R}$에 대수적 구조를 부여한다.

※ 순서 공리와 완비성 공리는 $\mathbb{R}$에 위상적 구조를 부여한다.

실수계의 체 공리 (Field Axiom)

실수 집합 $\mathbb{R}$에 **덧셈**이라고 불리는 이항연산 $+$와 **곱셈**이라고 불리는 이항연산 $\cdot$이 주어져 있으며, 이들은 다음을 만족시킨다.

A1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x+y)+z = x+(y+z)$

A2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x+y = y+x$

A3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : x+0 = x$

A4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R} : x+x' = 0$

M1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

M2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

M3. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$

M4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = 1$

D. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

체 공리와 관련된 정리

(1) 항등원의 유일성과 역원의 유일성

(2) $0x = 0$

(3) $(-1)x = -x$

(4) $(-x)(-y) = xy$

(5) $-(-x) = x$

(6) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

실수계의 순서 공리 (Order Axiom)

실수 집합 $\mathbb{R}$에 **관계** $<$가 주어져 있으며, 이 관계는 다음 네 개의 법칙을 만족시킨다.

O1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ [(x<y \ \vee \ x=y \ \vee \ y<x)$
$\wedge \ \sim((x<y \wedge x=y) \vee (x=y \wedge y<x) \vee (y<x \wedge x<y))]$

O2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ : \ [(x<y \wedge y<z) \rightarrow x<z]$

O3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ : \ (x<y \rightarrow x+z<y+z)$

O4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ : \ [(x<y \wedge 0<z) \rightarrow xz<yz]$

순서 공리와 관련된 정의

- $(x < y \vee x = y)$를 간단히 $x \leq y$로 나타낸다.
- $x < y \iff y > x, \quad x \leq y \iff y \geq x$
- x가 실수이고 $x > 0$이면 x를 **양의 실수** 또는 **양수**라고 부른다.
- x가 실수이고 $x < 0$이면 x를 **음의 실수** 또는 **음수**라고 부른다.

순서 공리와 관련된 정리

(1) $1 > 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; (x > 0 \longleftrightarrow -x < 0)$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; (x < y \longleftrightarrow y - x > 0)$

(4) $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \left(x \neq 0 \longleftrightarrow x^2 > 0\right)$

(5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;:\; [(x < y \wedge z < 0) \rightarrow xz > yz]$

(6) $\forall x \in \mathbb{R}^* \;:\; (x > 0 \longleftrightarrow 1/x > 0)$

(7) $\forall x, y \in \mathbb{R}^* \;:\; [(x > 0 \wedge y > 0 \wedge x < y) \rightarrow 1/y < 1/x]$

(8) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \;:\; \left(x < y \longleftrightarrow x^2 < y^2\right)$

최댓값과 최솟값 (정의)

A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 M과 m이 A의 원소라고 하자.

- M이 A의 **최댓값**이다 $\iff$ $\forall x \in A : x \le M$
- m이 A의 **최솟값**이다 $\iff$ $\forall x \in A : m \le x$

최댓값과 최솟값의 예

	최댓값	최솟값
(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$	7	1
(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$	없음	1
(3) $[0,\ 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$	없음	0
(4) $\left\{\frac{1}{n} \middle\vert n \in \mathrm{N}\right\}$	1	없음
(5) $[0,\ \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$	없음	0

상계와 하계 (정의)

A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 M과 m이 실수라고 하자.

- M이 A의 **상계**이다 $\iff$ $\forall x \in A : x \le M$
- m이 A의 **하계**이다 $\iff$ $\forall x \in A : m \le x$

집합의 유계 (정의)

- 집합 A의 상계가 존재할 때 'A는 **위로 유계**이다'라고 말한다.
- 집합 A의 하계가 존재할 때 'A는 **아래로 유계**이다'라고 말한다.
- 집합 A가 위로 유계이면서 아래로 유계일 때 'A는 **유계**이다'라고 말한다.

유계인 집합의 예

	위	아래
(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$	Y	Y
(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$	N	Y
(3) $[0,\ 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$	Y	Y
(4) $7\mathbb{Z} = \{7n \mid n \in \mathbb{Z}\}$	N	N
(5) $(-\infty,\ \sqrt{2}\,] \cap \mathbb{Q}$	Y	N

상한과 하한 (정의)

A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자.

- A의 상계 중 가장 작은 것을 A의 **상한**이라고 부른다.
  A의 상한을 $\sup A$ 또는 $\operatorname{lub} A$로 나타낸다.
- A의 하계 중 가장 큰 것을 A의 **하한**이라고 부른다.
  A의 하한을 $\inf A$ 또는 $\operatorname{glb} A$로 나타낸다.

- sup = supremum
- inf = infimum
- lub = least upper bound
- glb = greatest lower bound

실수계의 완비성 공리 (Completeness Axiom)

다음 집합의 상한을 구해보자. (단, 무리수의 존재성은 아직 모른다.)

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

이 집합의 상한을 구하려면 '2의 제곱근'의 존재성을 보장할 수 있어야 한다.
따라서 다음과 같은 **공리**가 필요하다.

> "실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이면
> E의 상한이 존재한다."

따름정리 :

> "실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 아래로 유계이면
> E의 하한이 존재한다."

상한과 하한의 예

	상한	하한
(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$	7	1
(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$	$+\infty$	1
(3) $[0,\ 1)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x<1\}$	1	0
(4) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	1	0
(5) $[0,\ \sqrt{2}\,]\cap\mathbb{Q}$	$\sqrt{2}$	0

Warming Up

문제 1. x가 실수일 때 다음을 증명하여라.

$$\forall\,\epsilon > 0 \;:\; |x| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

문제 2. x, y가 실수일 때 다음을 증명하여라.

$$x \le y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\epsilon > 0 \;:\; x < y + \epsilon$$

상한과 하한의 성질 (정리)

(1) 주어진 집합의 상한이 존재하면 그것은 유일하다. (하한도 마찬가지.)

(2) 공집합이 아닌 유한집합은 항상 상한과 하한을 가진다.

(3) E가 공집합이 아닌 집합이고 α가 E의 상계일 때

$$\alpha = \sup E \iff \forall \epsilon > 0\ \exists x \in E : \alpha - \epsilon < x.$$

(4) E가 공집합이 아닌 집합이고 β가 E의 하계일 때

$$\beta = \inf E \iff \forall \epsilon > 0\ \exists x \in E : x < \beta + \epsilon.$$

완비성과 관련된 정리

(1) $\mathbb{N}$은 위로 유계가 아니다.

(2) a, b가 실수이고 $b > 0$ 이면 $a < nb$인 자연수 n이 존재한다.

(3) 서로 다른 두 실수 사이에는 항상 유리수가 존재한다.

제곱근의 정의

$a \geq 0$일 때 $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$으로 정의한다.

예 $\sqrt{3} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$

숙제. $a > 0,\ n \in \mathbb{N}$일 때 $\sqrt[n]{a}$은 어떻게 정의할까?