해석학 공부 시작하기

2017년 1월 기초해석학 강의

Press [Ctrl]+[K], [P]

학습목표

- 해석학이 무엇인지 말할 수 있다.
- 해석학과 미적분학의 차이를 말할 수 있다.

내용 순서

- 해석학이란 무엇인가?
- 미적분학과 해석학의 차이
- 해석학의 분야
- 해석학이 'Analysis'인 이유
- 해석적 함수의 뜻
- 해석적 함수의 응용 예
- 두 가지 의문

해석학이란 무엇인가?

대수적 구조 + 위상적 구조 → **<u>공간</u>**

대수적 구조 : 원소가 결합하여 다른 원소에 대응되는 구조

㉠ 합집합, 교집합, 여집합, 덧셈, 곱셈, 벡터 합, …

위상적 구조 : 원소끼리의 멀고 가까움을 가늠할 수 있는 구조

㉠ 거리, 절댓값, 내적, 노름, 열린집합, …

이 **<u>공간의 성질</u>**과 이 **<u>공간에서 정의된 함수의 성질</u>**을 밝히는 학문

미적분학과 해석학의 차이

미적분학

- 미분과 적분 그 자체가 연구의 대상이다.
- 논증에서 $\epsilon-\delta$, $\epsilon-N$ 논법을 주로 이용한다.

해석학

- 미분과 적분은 연구의 도구이다.
- 논증에서 위상적 방법을 함께 사용한다.

이 외에도 여러 가지 차이점이 있지만
그러한 차이는 앞으로 해석학을 공부하면서 직접 느껴보자.

해석학의 분야

- **기초해석학** : 학부 과정에서 배우는 해석학의 기초 내용
- **다변수 해석학** $\leftarrow$ 2학년 2학기 과정
- 실해석학
- **복소해석학** $\leftarrow$ 2학년 2학기 ~ 3학년 1학기 과정
- 함수해석학
- **미분기하학** $\leftarrow$ 3학년 ~ 4학년 과정
- $p-$진 해석학
- 수치해석학
- 조화해석학
- 비표준해석학

$\vdots$

해석학이 ‘Analysis’인 이유

(1/4)

$|x| < 1$일 때

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

이라고 하면

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots.$$

미분하면

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots.$$

그렇다면 $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$이 성립할까?

해석학이 'Analysis'인 이유

(2/4)

수학자들은 함수 f가 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 수렴하는 x값에 대해서는 항별로 미분과 적분을 할 수 있다는 것을 밝혀냈다.

뉴턴(Newton)은 미적분학과 관련하여 그의 이론을 전개하는 과정에서 무한급수도 유한 다항식과 거의 마찬가지로 다룰 수 있다는 것을 발견하였다. 즉 무한급수에 의한 해석에는 동일한 내적 일관성이 있고 유한량의 대수학과 같은 일반법칙을 따른다는 점이다. 따라서 무한급수는 함수의 근사일 뿐만 아니라 함수와 동등하다고 간주하게 되었다.

해석학이 'Analysis'인 이유 (3/4)

뉴턴은 자신의 논문에서 다음과 같이 말하였다. (1711)

항의 개수가 유한인 방정식을 이용하여 일반적인 해석(곧, 대수)이 할 수 있는 어떠한 계산도 이 새로운 방법으로 무한 방정식을 써서 할 수 있다. 따라서 나는 이 방법에 해석(analysis)이라는 이름을 붙이는 것에 아무런 망설임도 없을 것이다. 왜냐하면 이것에 포함되어 있는 논리는 다른 어떤 논리에 비해 결코 불확실한 것이 아니고, 무한방정식도 부정확한 것이 아니기 때문이다. 비록 아주 한정된 논증 능력밖에 없는, 수명이 짧은 우리 인간에게는 그러한 방정식의 모든 항을 쓰거나 구하는 양을 상상해서 정확하게 알 수 없으나 … 결론을 내리면 이 새로운 방법은 이른바 '해석술(analytic art)'에 속한다고 할 수 있다.

해석학이 'Analysis'인 이유 (4/4)

결국 오늘날과 같은 의미의 해석(Analysis)이라는 말은 뉴턴이 본격적으로 사용하기 시작했다고 볼 수 있다.

해석적 함수의 뜻

다음 급수는 무한차수 다항식처럼 보인다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

이러한 급수를 **멱급수**(power series) 또는 **거듭제곱급수**라고 부른다.

해석적 함수(analytic function) : 거듭제곱급수로 나타낼 수 있는 함수

거듭제곱급수 → <u>다항식을 다루듯이 미분과 적분</u>을 할 수 있게 된다.

해석적 함수의 개념과 그 성질은 기초 해석학에서 가장 중요한 내용!

해석적 함수의 응용 예 1

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + - \cdots$$

$$\int\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1}x\right)dx = \int\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + - \cdots\right)dx$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \cdots$$

여기에 $x=1$을 대입하면

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$$

이 공식을 Madhava-Leibniz 공식이라고 부른다.

해석적 함수의 응용 예 2

다음 무한급수의 값을 구해보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

함수 f를 다음과 같이 정의하자. (단 $0 < x < 1$)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

이제 미분과 적분을 이용하여 이 식을 우리가 원하는 식으로 변형해준다.

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{f(x)}{x} dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{1}{1-x} + C$$

(계속)

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

여기에 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

두 가지 의문

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

- 거듭제곱급수를 마음대로 미분·적분을 하고 x에 값을 대입해도 될까?
- 만약 거듭제곱급수를 그렇게 할 수 있다면 거듭제곱급수가 아닌 다른 급수는 어떨까?

이러한 의문을 해결하기 위해서는

- 급수의 수렴과 발산에 관련된 성질을 명확하게 밝혀야 한다.
- 미분과 적분의 성질을 명확하고 논리적으로 밝혀야 한다.

그것을 위해서는?

→ 극한을 논리적으로 정의해야 한다.

(수렴, 발산, 미분, 적분은 모두 극한으로 정의되기 때문이다.)

그것을 위해서는?

→ 실수계를 논리적으로 정의해야 한다.

(극한의 성질은 실수계의 성질에 의존하기 때문이다.)

집합에 관한 몇 가지 상식

(해석학 공부를 위해 복습이 필요한 내용만)

학습목표

- 한정명제의 참 · 거짓을 판별할 수 있다.
- 한정명제의 부정을 구할 수 있다.
- 무한집합의 성질을 설명하고 그것을 증명에 활용할 수 있다.

내용 순서

- 명제의 연산
- 한정명제
- 한정명제의 부정
- 자연수의 집합론적 정의
- 유한집합과 무한집합
- 집합의 크기 비교
- 일상적으로 사용하는 집합들의 크기

명제의 연산

p와 q가 대상영역이 U인 명제함수라고 하자.
p의 진리집합을 P라고 하고 q의 진리집합을 Q라고 하자.

(1) $\sim p$는 진리집합이 $U \setminus P$인 명제함수이다. (명제의 부정; 일항연산자)
(2) $p \vee q$는 진리집합이 $P \cup Q$인 명제함수이다. (명제의 합)
(3) $p \wedge q$는 진리집합이 $P \cap Q$인 명제함수이다. (명제의 곱)
(4) $p \to q$는 진리집합이 $(U \setminus P) \cup Q$인 명제함수이다. (함의, 조건문)

참고 1. 두 명제함수의 대상영역이 다른 경우는 공통집합을 생각하면 된다.
참고 2. 변수가 없는 명제는 상수함수로 생각하면 된다.

한정명제

명제함수 p의 대상영역이 A이고 $B \subseteq A$이며 p의 진리집합이 P일 때

(1) 전칭명제 : $\forall x \in B : p(x)$는 $B \cap P = B$ 를 뜻한다.

(2) 존재명제 : $\exists x \in B : p(x)$는 $B \cap P \neq \varnothing$을 뜻한다.

한정기호가 여러 개 사용된 경우

p가 두 개의 변수를 가진 명제함수이고 $x \in A,\ y \in B$ 일 때

(1) $\forall x \in A\ \forall y \in B : p(x,\ y)$

(2) $\exists x \in A\ \exists y \in B : p(x,\ y)$

(3) $\forall x \in A\ \exists y \in B : p(x,\ y)$

(4) $\exists x \in A\ \exists y \in B : p(x,\ y)$

예를 들어

(1) $\forall x \in \mathrm{N}\ \forall y \in \mathrm{N}\ : x \leq y$

(2) $\exists x \in \mathrm{N}\ \exists y \in \mathrm{N}\ : x \leq y$

(3) $\forall x \in \mathrm{N}\ \exists y \in \mathrm{N}\ : x \leq y$

(4) $\exists x \in \mathrm{N}\ \forall y \in \mathrm{N}\ : x \leq y$

연달아 나타난 동일한 한정기호

대상영역이 같은 두 전칭기호나 두 존재기호가 연달아 나타나면 간단히 나타낼 수 있다.

(1) $\forall x \in A \ \forall y \in A : p(x,\ y)$를 줄여서 $\forall x, y \in A : p(x,\ y)$

(2) $\exists x \in A \ \exists y \in A : p(x,\ y)$를 줄여서 $\exists x, y \in A : p(x,\ y)$

한정명제의 부정 규칙

$$\sim(\forall x \in A : p(x)) \iff \exists x \in A : (\sim p(x))$$
$$\sim(\exists x \in A : p(x)) \iff \forall x \in A : (\sim p(x))$$

$$\sim(\forall x \in A \ \forall y \in B : p(x, y)) \iff \exists x \in A \ \exists y \in B : (\sim p(x, y))$$
$$\sim(\forall x \in A \ \exists y \in B : p(x, y)) \iff \exists x \in A \ \forall y \in B : (\sim p(x, y))$$
$$\sim(\exists x \in A \ \forall y \in B : p(x, y)) \iff \forall x \in A \ \exists y \in B : (\sim p(x, y))$$
$$\sim(\exists x \in A \ \exists y \in B : p(x, y)) \iff \forall x \in A \ \forall y \in B : (\sim p(x, y))$$

기호의 잘못된 사용

'$\Rightarrow$'는 명제와 명제 사이에 들어가는 기호이며, 이 기호가 포함된 문장은 명제가 아니다. 따라서 다음은 모두 잘못된 표현이다.

(1) $$p(x) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(x))$$

(2) $$\forall x \in A : (p(x) \Rightarrow q(x))$$

(3) $$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

이 문장들을 바르게 고쳐보자.

자연수의 집합론적 정의

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\} \\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0,\ 1\} \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0,\ 1,\ 2\} \\
&\vdots \\
n+1 &= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\} \\
\omega &= \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}
\end{aligned}
$$

자연수 연산의 집합론적 정의 (참고)

(A1) $m+0=m$

(A2) $m+(n+1)=(m+n)+1$

(M1) $m\times 0=0$

(M2) $m\times(n+1)=mn+m$

(ORD) $m\leq n \iff (m\in n \vee m=n)$

예 $2+3=2+(2+1)=(2+2)+1$

$$=(2+(1+1))+1=((2+1)+1)+1$$

$$=(3+1)+1=4+1=5$$

※ 정의를 이용하여 $3+2$와 3×2를 계산해보자.

유한집합과 무한집합 (정의)

(1) A와 B가 집합일 때,
A와 B가 대등하다 $\iff$ 일대일대응 $f : A \to B$ 가 존재한다
$(A \approx B)$

(2) E가 유한집합이다 $\iff$ $\exists n \in \omega : E \approx n$

(3) E가 무한집합이다 $\iff$ E가 유한집합이 아니다

(4) E가 가부번집합이다 $\iff$ $E \approx \omega$

(5) E가 가산집합이다 $\iff$ E가 가부번집합이거나 유한집합이다

(6) E가 비가산집합이다 $\iff$ E가 가산집합이 아니다

무한집합의 판별 (정리)

E가 집합일 때 다음 명제는 모두 서로 동등하다.

(1) E는 무한집합이다.

(2) E는 가부번인 부분집합을 포함한다.

(3) E와 대등한 E의 진부분집합이 존재한다.

(4) E의 임의의 유한부분집합 F에 대하여 $E\setminus F \approx E$이다.

※ (3)을 무한집합의 정의로 사용하기도 한다.

※ (1) $\Rightarrow$ (2)를 증명해보자.

무한집합의 성질 (정리)

다음은 유한집합과 무한집합에 관련된 몇 가지 성질이다.

(1) E가 무한집합이고 $E \subseteq D$이면 D도 무한집합이다.

(2) A와 B가 유한집합이면 $A \times B$도 유한집합이다.

(3) A와 B가 가산집합이면 $A \times B$도 가산집합이다.

(4) A가 유한집합이면 A의 멱집합 $\wp(A)$도 유한집합이다.

(5) $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$의 모든 원소가 가산집합이면 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$도 가산집합이다.

※ (3), (5)를 증명해보자.

집합의 크기 비교 (정의)

(1) A와 B가 집합일 때

$$A \preccurlyeq B \iff \text{일대일함수 } f : A \to B \text{가 존재한다}$$

(2) $A \prec B \iff A \preccurlyeq B \wedge A \not\approx B$

집합의 크기 비교 (정리)

(1) 멱집합의 크기 : A가 집합일 때 $2^A \approx \wp(A)$

(2) 칸토어의 정리 : A가 집합일 때 $A \prec \wp(A)$

(3) 칸토어-베른슈타인의 정리 : A와 B가 집합일 때

$$(A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A) \iff A \approx B$$

※ (1)을 증명해보자.

참고. 2^A는 A로부터 2로의 함수를 의미한다.

일상적으로 사용하는 집합들의 크기

(1) 0과 모든 자연수는 집합론에서는 유한집합이다.

(2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다.

(3) $\mathbb{R}$와 $\mathbb{C}$는 비가산집합이며, $\wp(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$이다.

(4) a와 b가 실수이고 $a < b$이면 $[a, b] \approx (a, b) \approx \mathbb{R}$이다.

(5) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$이다.

※ $\mathbb{Q}$가 가부번집합임을 증명해보자.

※ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$를 증명해보자.