2017년 1월 해석학 특강 **형성평가 (기말)**		
단원	실수계의 성질, 수열의 극한	예시답안 및 채점기준

문제 1. 실수계의 공리 중 완비성 공리를 기술하시오. [5점]

- 답 : E가 실수 집합의 부분집합이고 위로 유계이며 공집합이 아닐 때 E는 실수인 상한을 가진다.
- 채점기준 : '위로 유계', '공집합이 아니다'라는 조건이 빠지면 각각 2점 감점.
  '극한을 자유롭게 다룰 수 있도록 하는 공리'라고만 쓰면 2점 부여.

문제 2. '상한'의 뜻을 쓰고 '상한'과 '최댓값'의 차이를 기술하시오. [10점]

- 답 : 집합 E가 실수 집합의 부분집합일 때 E의 상계 중 가장 작은 값을 E의 상한이라고 부른다.
  E의 최댓값은 E의 원소이지만 E의 상한은 E의 원소가 아닐 수도 있다.
- 채점기준 : 상한의 뜻 5점, 최댓값의 뜻 5점.
  상한을 동등한 다른 문장으로 정의해도 정답으로 인정함.
  의미는 비슷하지만 표현상의 오류가 있는 경우 8점 부여.

문제 3. $H \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ 이고 함수 $f : E \to \mathbb{R}$ 가 주어졌다고 하자. 이때 다음 문장 또는 기호의 정의를 쓰시오. [10점]

⑴ "함수 f가 H에서 C^n급이다."

- 답 : f가 H에서 n번 미분 가능하고, f의 n계도함수가 H에서 연속이다. (5점)
- 채점기준 : 'n번 미분 가능' 3점, 'n계도함수가 연속' 2점.

⑵ $C^\infty(H)$

- 답 : H 위에서 임의 횟수로 미분 가능한 함수들의 모임. (5점)
- 채점기준 : '무한 번 미분 가능'으로 표현해도 정답으로 인정.
  '도함수가 연속이다'라는 말이 들어가도 정답으로 인정.

문제 4. 다음과 같이 주어진 수열의 상극한과 하극한을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [15점]

	수열	상극한	하극한
(1)	$\cos\dfrac{n\pi}{2}$	1	-1
(2)	$n^n+(-n)^n$	∞ 또는 $+\infty$	0
(3)	$\dfrac{n}{3}+\dfrac{n}{2}-\left[\dfrac{n}{3}\right]-\left[\dfrac{n}{2}\right]$	$\dfrac{7}{6}$	0

- 채점기준 : 각 문항 당 5점, 상극한과 하극한 중 하나만 맞으면 2점.
- (3)의 풀이. n의 값에 따라서 각 항의 값을 구하면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
$n/3$	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	9/3	10/3	11/3	12/3	$\cdots$
$[n/3]$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	$\cdots$
$n/3-[n/3]$	1/3	2/3	0	1/3	2/3	0	1/3	2/3	0	1/3	2/3	0	$\cdots$
$n/2$	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2	9/2	10/2	11/2	12/2	$\cdots$
$[n/2]$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	$\cdots$
$n/2-[n/2]$	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2	0	$\cdots$
$\dfrac{n}{3}-\left[\dfrac{n}{3}\right]+\dfrac{n}{2}-\left[\dfrac{n}{2}\right]$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	0	$\cdots$

여기서 풀이의 핵심 아이디어는 $n/3-[n/3]$의 값은 세 항마다 반복되고, $n/2-[n/2]$의 값은 두 항마다 반복되므로, 수열의 값이 여섯 항마다 반복된다는 것이다.

문제 5. 다음과 같이 주어진 집합의 도집합과 폐포를 구하시오. (단, 전체 공간은 $\mathbb{R}$이다.) [15점]

	집합	도집합	폐포
(1)	$\{1,\ 2,\ 3\}$	$\varnothing$	$\{1,\ 2,\ 3\}$
(2)	$(1,\ 3]\setminus\mathbb{Q}$	$[1,\ 3]$	$[1,\ 3]$
(3)	$\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\ \middle|\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\}$	$\left\{\dfrac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$	$\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\ \middle|\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\dfrac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$

- 채점기준 : 각 문항 당 5점, 도집합 3점, 폐포 2점.

문제 6. 평등연속의 정의를 기술하고, $f(x)=2x$로 정의된 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 평등연속임을 $\epsilon-\delta$ 논법으로 증명하시오. [15점]

- 풀이. $E\subseteq D$일 때 함수 $f:D\to\mathbb{R}$가 E에서 평등연속이라는 것은 다음을 만족시키는 것이다. … 1점

  $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall a,x\in D:(|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\epsilon)$ … 4점

  이제 주어진 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 평등연속임을 보이자.

  양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. … 2점

  $\delta\le\epsilon/2$인 양수 δ를 택하면 … 3점

  $|x-a|<\delta$인 임의의 실수 x, a에 대하여 … 3점

  $|f(x)-f(a)|=2|x-a|<2\delta\le\epsilon$ … 2점

  이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 평등연속이다.
- 채점기준 : 단계별 표기된 점수대로 점수를 부여함.

  ϵ을 선언하기 전에 x와 a 중 하나를 언급하고 δ가 언급한 x 또는 a와 독립적임을 언급하지 않으면 2점 감점.

2017년 1월 해석학 특강 형성평가 (기말)	예시답안 및 채점기준

문제 7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하고 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$일 때 f는 $\mathbb{R}$에서 단조임을 보이시오. (즉, 단조증가만 하거나 단조감소만 함을 보이시오.) [15점]

- 풀이. 결론에 반하여 f가 $\mathbb{R}$에서 단조가 아니라고 가정하자. … 1단계
  그러면 f가 증가상태에 있는 점 a와 f가 감소상태에 있는 점 b가 존재한다. … 2단계
  그런데 f가 미분 가능하므로 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$이다. … 3단계
  도함수는 중간값 성질을 가지므로(Darboux의 정리) $f'(c) = 0$인 점 c가 a와 b 사이에 존재한다. … 4단계
  이것은 모순이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 단조이다. … 5단계
- 채점기준 : 단계별 3점씩 총 15점 부여.
  다른 방법으로 풀이한 경우 논리적 모순이 없으면 만점을 부여하고, 논리적 모순이 있으면 예시 풀이에 준하는 비율로 점수 부여.

문제 8. 다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 어느 점에서도 연속이 아님을 보이시오. [15점]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- 풀이. 결론에 반하여 f가 연속인 점 a가 존재한다고 가정하자.
  f가 a에서 연속이므로 a에서 f의 극한이 수렴한다. … 1단계
  a가 유리수인 경우, a에 수렴하고 $x_n \neq a$인 무리수열 $\{x_n\}$이 존재한다.
  이때 $f(a) = 1$이지만 $f(x_n) \to 0$이므로 a에서 f의 극한이 수렴하지 않는다. … 2단계
  a가 무리수인 경우, a에 수렴하고 $x_n \neq a$인 유리수열 $\{x_n\}$이 존재한다.
  이때 $f(a) = 0$이지만 $f(x_n) \to 1$이므로 a에서 f의 극한이 수렴하지 않는다. … 3단계
  이것은 모순이므로 f는 a에서 연속이 아니다. … 4단계
  즉 f가 연속인 점이 존재하지 않는다. … 5단계
- 다른 풀이. 실수 a가 임의로 주어졌다고 하자. … 1단계
  $\epsilon = 1$이라고 하고 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자. … 2단계
  a가 유리수인 경우, 무리수의 조밀성에 의하여 $|x-a| < \delta$인 무리수 x가 존재하여
  $|f(x) - f(a)| = |0-1| = 1 \geq \epsilon$
  을 만족시킨다. … 3단계
  a가 무리수인 경우, 유리수의 조밀성에 의하여 $|x-a| < \delta$인 유리수 x가 존재하여
  $|f(x) - f(a)| = |1-0| = 1 \geq \epsilon$
  을 만족시킨다. … 4단계
  어느 경우에나 $|x-a| < \delta$이지만 $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$인 x가 존재하므로 f는 a에서 연속이 아니다. … 5단계
- 채점기준 : 단계별 3점씩 총 15점 부여.
  다른 방법으로 풀이한 경우 논리적 모순이 없으면 만점을 부여하고, 논리적 모순이 있으면 예시 풀이에 준하는 비율로 점수 부여.

수고하셨습니다.