2017년 1월 해석학 특강 **형성평가 (중간)**		
단원	실수계의 성질, 수열의 극한	예시답안 및 채점기준

문제 1. 다음 집합의 최댓값, 최솟값, 상한, 하한을 구하시오. (없으면 '없음'이라고 쓸 것.) [20점]

	집합	최댓값	최솟값	상한	하한
(1)	$\{1,\ 3,\ 5\}$	5	1	5	1
(2)	$[0,\ 1)$	없음	0	1	0
(3)	$\left\{\frac{1}{n}\,\middle\vert\, n\in\mathbb{N}\right\}$	1	없음	1	0
(4)	$(3,\ \pi]\cap\mathbb{Q}$	없음	없음	π	3
(5)	$[\sqrt{2},\ 5)\setminus\mathbb{Q}$	없음	$\sqrt{2}$	5	$\sqrt{2}$

※ 항목 1개 당 1점, 항목별 부분점수 없음.

문제 2. 다음은 유리수의 조밀성을 증명하는 과정의 앞부분이다.

> a와 b가 실수이고 $a<b$라고 하자.
>
> (ⅰ) $a>0$인 경우. 먼저 아르키메데스의 정리에 의하여
>
> $$1<n(b-a) \tag{1}$$
>
> 인 자연수 n이 존재한다. 다음으로 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $m\geq bn$인 자연수 m이 존재한다. 그러한 자연수 m 중에서 가장 작은 것을 택하자. 그러면
>
> $$\frac{m}{n}\geq b \text{ 그리고 } \boxed{\text{(가)}} \tag{2}$$
>
> 이 성립한다. 한편 (1)과 (2)의 첫 번째 부등식에 의하여
>
> $$a=(a-b)+b< -\frac{1}{n}+\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}$$
>
> 이다. 그러므로 $r=\boxed{\text{(나)}}$이라고 하면 r는 $a<r<b$를 만족시키는 유리수가 된다.
>
> (ⅱ) $a\leq 0$인 경우. (후략)

빈칸에 들어갈 적절한 내용을 쓰시오. [20점]

(가)	$\frac{m-1}{n}<b$	(나)	$\frac{m-1}{n}$

※ 항목 1개 당 10점.

※ 논리적으로 틀린 식은 아니지만 정답이 아닌 경우 항목 당 부분점수 5점.

2017년 1월 해석학 특강 형성평가 (중간)	예시답안 및 채점기준

문제 3. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 실수열이고 A와 B가 실수이며 $a_n \to A$, $b_n \to B$라고 하자.
이때 $(a_n + b_n) \to (A+B)$임을 $\epsilon - N$ 논법으로 증명하시오. [20점]

풀이. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$a_n \to A$이므로 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때 $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족시킨다.

$b_n \to B$이므로 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때 $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족시킨다.

$N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{1}$$

이므로 $(a_n + b_n) \to (A+B)$이다. (끝)

※ 논리적으로 문제가 있지 않은 사소한 오타는 감점하지 않음.
※ 증명의 전개를 방해하지 않는 정도의 오류가 있으면 15점.
(‘임의의 양수 ϵ이 주어졌다’를 두 번 이상 언급하는 경우.)
※ 전체적인 전개 방향은 맞지만 증명의 전개를 방해하는 오류가 있으면 10점.
(‘임의의’와 ‘적당한’을 혼동하는 경우, $n > N$ 등의 조건을 빼먹은 경우
※ 삼각부등식을 사용하여 (1)과 비슷한 부등식을 만들었지만 그 외의 내용은 부족한 경우 5점.

문제 4. $r > 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$을 증명하시오. ($\epsilon - N$ 논법 또는 조임 정리를 이용할 것.) [20점]

풀이. $r > 1$이므로 $r = 1 + x$인 양수 x가 존재한다.
베르누이 부등식에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $(1+x)^n \ge 1 + xn$이 성립한다.
이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < \epsilon x N$인 자연수 N이 존재한다. $n > N$일 때

$$\left|\frac{1}{r^n} - 0\right| = \frac{1}{(1+x)^n} \le \frac{1}{1+nx} \le \frac{1}{1+Nx} < \frac{1}{Nx} < \epsilon$$

이므로 $\frac{1}{r^n} \to 0$이다. (끝)

※ 논리적으로 문제가 있지 않은 사소한 오타는 감점하지 않음.
※ 증명의 전개를 방해하지 않는 정도의 오류가 있으면 15점.
(논리적 문제는 없지만 자연수 N의 존재성에 대한 근거가 부족한 경우.)
※ 증명 전개의 흐름은 맞지만 논리적으로 문제가 있거나 부등식이 틀린 경우 10점.