

형성평가 (중간)

단원	실수계의 성질, 수열의 극한	작성자
----	-----------------	-----

문제 1. 다음 집합의 최댓값, 최솟값, 상한, 하한을 구하시오. (없으면 ‘없음’이라고 쓸 것.) [20점]

	집합	최댓값	최솟값	상한	하한
(1)	{1, 3, 5}				
(2)	[0, 1)				
(3)	$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$				
(4)	$(3, \pi] \cap \mathbb{Q}$				
(5)	$[\sqrt{2}, 5) \setminus \mathbb{Q}$				

문제 2. 다음은 유리수의 조밀성을 증명하는 과정의 앞부분이다.

a 와 b 가 실수이고 $a < b$ 라고 하자.

(i) $a > 0$ 인 경우. 먼저 아르키메데스의 정리에 의하여

$$1 < n(b-a) \tag{1}$$

인 자연수 n 이 존재한다. 다음으로 자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $m \geq bn$ 인 자연수 m 이 존재한다. 그러한 자연수 m 중에서 가장 작은 것을 택하자. 그러면

$$\frac{m}{n} \geq b \text{ 그리고 } \boxed{\text{(가)}} \tag{2}$$

이 성립한다. 한편 (1)과 (2)의 첫 번째 부등식에 의하여

$$a = (a-b) + b < -\frac{1}{n} + \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n}$$

이다. 그러므로 $r = \boxed{\text{(나)}}$ 이라고 하면 r 는 $a < r < b$ 를 만족시키는 유리수가 된다.

(ii) $a \leq 0$ 인 경우. (후략)

빈칸에 들어갈 적절한 내용을 쓰시오. [20점]

(가)		(나)	
-----	--	-----	--

문제 3. $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 실수열이고 A 와 B 가 실수이며 $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$ 라고 하자.
이때 $(a_n + b_n) \rightarrow (A + B)$ 임을 $\epsilon - N$ 논법으로 증명하시오. [20점]

문제 4. $r > 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 을 증명하시오. ($\epsilon - N$ 논법 또는 조임 정리를 이용할 것.) [20점]