기초 해석학 길잡이

Invitation to Mathematical Analysis
based on The Art of Analysis

2017년 1월

이슬비

designeralice@daum.net

일러두기

이 노트는 현미경이 아닌 망원경입니다. 나뭇잎을 보기 위한 것이 아니라 숲을 보기 위한 것입니다. 이 노트는 해석학을 처음 공부하는 사람들에게 해석학이란 무엇인지 개괄적으로 소개하고 공부 방향을 안내하기 위한 것입니다. 해석학의 내용을 빠짐없이 담고 있지는 않으며, 중요한 개념과 간단한 예제만 담고 있습니다. 주요 내용은 1장부터 8장까지이며, 9장과 10장은 이후에 공부하게 될 내용에 대한 간략한 소개입니다. 생략된 증명이나 더 자세한 내용을 알고 싶은 사람은 『맛있는 해석학』을 참고하기 바랍니다.

이 노트는 해석학을 처음 공부하는 사람들을 위해서 제작되었지만, 해석학을 이미 공부해본 사람이 내용을 정리하고 복습하는 용도로 보아도 괜찮습니다.

이 노트가 해석학 공부에 첫 걸음을 내딛는 사람들에게 많은 도움이 되기를 바랍니다.

參考

- ‘Prove!’라고 써 있는 내용은 반드시 직접 증명해 보아야 한다는 뜻입니다.
- 로마자 대문자로 번호가 매겨진 내용은 정리(theorem)이거나 또는 정리와 같이 중요하게 여겨야 할 내용입니다.
- 로마자 소문자로 번호가 매겨진 내용은 예제나 연습문제 정도로 여기면 됩니다.

내용 순서

들어가기

해석학이란 무엇인가

0.1 해석학의 의미. 해석학은 대수적 구조와 위상적 구조를 함께 가지고 있는 공간의 성질과 그러한 공간 위에서 정의된 함수의 성질을 밝히는 수학의 분야이다. 대수적 구조는 집합에 속한 원소를 다른 원소에 대응시키는 규칙을 의미하며, 위상적 구조는 집합에 속한 점들의 멀고 가까움을 가늠하는 척도를 의미한다. 이러한 의미에서 해석학은 대수학과 위상수학의 중간 지점에 놓여 있다고 볼 수 있으며, 그 때문에 수학에서 대단히 중요한 위치를 차지한다.

대수적 구조가 주어진 공간	• 합집합, 교집합, 여집합이 정의된 집합들의 모임 • 내적이 주어지지 않은 벡터공간
대수적 구조와 위상적 구조가 모두 주어진 공간	• 절댓값이 주어진 실수계 • 내적이나 노름이 주어진 벡터공간
위상적 구조가 주어진 공간	• 거리함수가 주어진 거리공간 • 위상이 주어진 위상공간 • 두 점 사이의 거리가 정의된 평면

0.2 미적분학과 해석학의 차이. 미적분학은 미분과 적분 그 자체가 연구 대상이지만, 해석학에서는 미적분을 도구로 하여 함수와 공간의 성질을 연구한다. 또한 미적분학에서는 이론을 전개할 때 주로 $\epsilon - N$ 논법과 $\epsilon - \delta$ 논법을 사용하는 데에 비해 해석학에서는 위상적 방법을 함께 사용한다.

0.3 해석학의 분야. 학부 과정에서 배우는 해석학은 기초해석학, 다변수해석학, 복소해석학 개론 등이 있으며, 학부 과정에서는 실해석학의 기초 내용까지 배우는 곳도 있다. 해석학은 수십 가지의 분야로 나뉘는데 그 중 몇 가지를 소개하면 다음과 같다.

- **기초해석학** : 해석학의 기초 내용. (우리가 앞으로 공부할 내용)
- **다변수해석학** : 변수가 여러 개인 함수의 성질을 연구하는 분야.
- 실해석학 : 측도와 르베그 적분에 관련된 성질을 연구하는 분야.
- **복소해석학** : 복소수계와 복소수함수의 성질을 연구하는 분야.
- 함수해석학 : 노름선형공간과 그 위에서의 변환에 대하여 연구하는 분야.
- **미분기하학** : 다양체의 성질을 연구하는 분야. (위상수학 또는 기하학의 분야에 더 가깝다.)
- $p-$진 해석학 : $p-$진 공간의 성질을 연구하는 분야.
- 수치해석학 : 연속적 대상의 근사 알고리즘을 연구하는 분야.
- 조화해석학 : 추상화된 푸리에 해석을 연구하는 분야. (함수해석학에 포함된다.)
- 비표준해석학 : 초실수(hyperreal) 집합에서의 해석을 연구하는 분야.

$\vdots$

0.4 해석학이 'Analysis'인 이유. 다음 예를 통해 'Analysis'라는 이름이 붙게 된 배경을 살펴보자.

$|x|<1$일 때 무한등비급수의 합 공식에 의하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \tag{1}$$

함수 $f:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \tag{2}$$

여기서 (1)과 (2)를 결합하면

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\ \cdots$$

를 얻는다. 이제 f를 미분해보자. 먼저 (2)를 이용하면

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{3}$$

이다. 한편 (1)을 이용하면

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+x^4+\ \cdots) \\ &=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 그러면 (3)과 (4)를 통해 $|x|<1$인 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ \cdots$$

이 성립한다고 할 수 있을까? 무한급수를 마치 '무한 차 다항식'처럼 항별로 미분해도 되는 걸까?

수학자들은 함수 f가 거듭제곱급수

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

의 꼴로 나타낼 수 있을 때, **수렴하는 x값에 대해서는 항별로 미분과 적분을 할 수 있다**는 것을 밝혀냈다.

뉴턴(Newton)은 미적분학과 관련하여 그의 이론을 전개하는 과정에서 무한급수도 유한 다항식과 거의 마찬가지로 다룰 수 있다는 것을 발견하였다. 즉 무한급수에 의한 해석에는 동일한 내적 일관성이 있고 유한량의 대수학과 같은 일반법칙을 따른다는 점이다. 따라서 무한급수는 함수의 근사일 뿐만 아니라 함수와 동등하다고 간주하게 되었다. 뉴턴은 자신의 논문에서 다음과 같이 말하였다(1711).

> 항의 개수가 유한인 방정식을 이용하여 일반적인 해석(곧, 대수)이 할 수 있는 어떠한 계산도 이 새로운 방법으로 무한 방정식을 써서 할 수 있다. 따라서 나는 이 방법에 해석(analysis)이라는 이름을 붙이는 것에 아무런 망설임도 없을 것이다. 왜냐하면 이것에 포함되어 있는 논리는 다른 어떤 논리에 비해 결코 불확실한 것이 아니고, 무한방정식도 부정확한 것이 아니기 때문이다. 비록 아주 한정된 논증 능력밖에 없는, 수명이 짧은 우리 인간에게는 그러한 방정식의 모든 항을 쓰거나 구하는 양을 상상해서 정확하게 알 수 없으나 … 결론을 내리면 이 새로운 방법은 이른바 '해석술(analytic art)'에 속한다고 할 수 있다.

결국 오늘날과 같은 의미의 해석(Analysis)이라는 말은 뉴턴이 본격적으로 사용하기 시작했다고 볼 수 있다.

0.5 해석적 함수의 뜻. 기초해석학의 주된 학습목표는 해석적 함수의 뜻과 성질을 알고 그것을 활용하여 다양한 문제를 해결하는 것이다. 그러므로 해석적 함수의 뜻을 간단히 짚고 넘어가자.

$\{a_n\}$이 실수열일 때, 다음 급수는 차수가 무한인 다항식처럼 보인다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

이러한 급수를 **멱급수**(power series) 또는 **거듭제곱급수**라고 부른다. 그리고 **거듭제곱급수**로 나타낼 수 있는 함수를 **해석적 함수**(analytic function)라고 부른다.

함수를 거듭제곱급수로 나타내면 마치 다항식을 다루듯이 미분과 적분을 할 수 있게 된다. 해석적 함수의 개념과 그 성질은 기초 해석학에서 가장 중요한 내용이다.

0.5.1 해석적 함수의 응용 1. 역탄젠트 함수를 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

또한 무한등비급수의 공식을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +- \cdots$$

따라서 역탄젠트 함수의 도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +- \cdots$$

양변을 다시 적분하면 다음을 얻는다.

$$\int\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1}x\right)dx = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +- \cdots dx,$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} +- \cdots.$$

그런데 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $x \to 1-$인 극한을 생각하여 위 식에 $x=1$을 대입하면

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +- \cdots$$

과 같은 원주율 공식을 얻는다. 이 공식을 **Madhava-Leibniz 공식**이라고 부른다.

0.5.2 해석적 함수의 응용 2. 다음 급수의 값을 구해보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

열린구간 $(0,\ 1)$ 위에서 함수 $f : (0,\ 1) \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

양변을 x로 나누면 다음 등식을 얻는다.

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

양변의 부정적분을 구하면

$$\int \frac{f(x)}{x}dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C$$

이고, 무한등비급수 공식을 이용하면

$$\int \frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{1}{1-x} + C$$

를 얻는다. 양변을 미분하면

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2} + C,$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + Cx$$

이며, 양변을 다시 미분한 뒤 $x=0$을 대입하면 $C=0$이라는 사실을 알 수 있다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

이고, 이 식에 $x = \dfrac{1}{2}$을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

를 얻는다.

0.6 두 가지 의문. 우리는 지금 두 가지 등식을 살펴보았다.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

여기서 다음과 같은 두 가지 의문이 생긴다.

(1) 거듭제곱급수를 항별로 미분·적분을 하고 x에 값을 대입해도 등식이 성립할까?

(2) 만약 거듭제곱급수를 그렇게 다룰 수 있다면 거듭제곱급수가 아닌 다른 급수는 어떨까?

이러한 의문을 해결하기 위해서는

(1) 급수의 수렴과 발산에 관련된 성질을 명확하게 밝혀야 한다,

(2) 미분과 적분의 성질을 명확하고 논리적으로 밝혀야 한다.

또한 그것을 위해서는 **극한을 논리적으로 정의해야 한다.** 왜냐하면 수렴, 발산, 미분, 적분은 모두 극한으로 정의되기 때문이다. 다시, 그것을 위해서는 **실수계를 논리적으로 정의해야 한다.** 왜냐하면 극한의 논리적 성질은 실수계의 성질에 의존하기 때문이다.

길잡이

기초 해석학의 핵심 개념들

해석학을 처음 공부하다보면 수많은 정의와 정리들 속에서 방향을 잃고 헤맬 수 있다. 이때에는 다음 다섯 가지 개념이 핵심 개념이라는 사실을 생각하면 공부 방향을 잡는 데에 도움이 된다.

1. 실수계의 완비성. 실수계에서는 극한을 자유롭게 다룰 수 있다. 즉 실수열 또는 실함수가 수렴하면 그 극한은 반드시 실수집합 내에 존재하게 된다. 이것은 실수계가 유리수계와 구분되는 중요한 성질이다.

※ 관련 개념 : 상한과 하한, 완비성 공리, 코시 수열, 단조수렴 정리, 볼차노–바이어슈트라스 정리.

2. 긴밀 집합. 가까이서 보았을 때 성립하는 성질(국소적 성질)이 항상 전체에서도 성립하는 것(대역적 성질)은 아니다. 그러나 집합이 '특정한 조건'을 만족시키면 그 집합 위에서 정의된 함수의 경우 가까이서 보았을 때 성립하는 성질이 전체에서도 성립한다. 이때 '특정한 조건'을 긴밀성이라고 부른다.

※ 관련 개념 : 열린집합과 닫힌집합, 볼차노–바이어슈트라스 정리, 하이네–보렐 정리, 평등연속.

3. 해석적 함수. 다항함수는 함수 중에서 대단히 단순한 함수이다. 왜냐하면 다항함수를 미분하거나 적분할 때에는 항별로 미분하거나 적분하면 되기 때문이다. 만약 어떠한 함수를 다항함수의 극한으로 정의한다면 그러한 함수는 마치 거대한 다항함수 즉 차수가 무한인 다항함수처럼 다룰 수 있다. 그러한 함수를 해석적 함수라고 부른다.

※ 관련 개념 : 함수열의 평등수렴, 평등수렴과 미분 · 적분의 관계, 거듭제곱급수.

제 1 장

집합에 관한 몇 가지 상식들

1.1 한정기호. 명제함수 p의 대상영역이 A이고 B가 A의 부분집합일 때, '$p(x)$의 진리집합이 B를 포함한다'는 명제를 다음과 같이 나타낸다.1)

$$\forall x \in B : p(x) \tag{1}$$

또한 '$p(x)$의 진리집합과 B의 교집합이 공집합이 아니다'는 명제를 다음과 같이 나타낸다.

$$\exists x \in B : p(x) \tag{2}$$

'$\forall$'를 **전칭기호**, '$\exists$'를 **존재기호**라고 부르며 이 둘을 통틀어 **한정기호**라고 부른다. 전칭기호가 가장 늦은 우선순위로 포함된 논리식으로 나타난 명제를 **전칭명제**, 존재기호가 가장 늦은 우선순위로 포함된 논리식으로 나타난 명제를 **존재명제**라고 부르며, 전칭명제와 존재명제를 통틀어 **한정명제**라고 부른다.

1.2 자유변수와 묶인변수. 명제함수 p의 대상영역이 A이고 $x \in A$일 때 논리식 $p(x)$에서 x는 A의 원소 중 어느것이라도 될 수 있으므로 **자유변수**(free variable)이다. 그러나 (1)이나 (2)에서와 같은 논리식에서 x는 더이상 임의로 값을 택할 수 있는 변수가 아니므로 **묶인변수**(bounded variable)이다.

조건문에서도 묶인변수를 찾을 수 있다. 즉 p와 q가 모두 대상영역이 A인 명제함수이면 $p(x)$와 $q(x)$ 각각에서 x는 자유변수이지만 명제

$$\forall x \in A : (p(x) \rightarrow q(x)) \tag{3}$$

에서 x는 묶인변수이다.

자유변수와 묶인변수는 수학의 여러 분야에서 흔하게 찾아볼 수 있다. 예를 들어 a와 b가 $a<b$인 실수이고 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의된 리만 적분 가능한 실함수일 때 $f(x)$에서 x는 자유변수이지만

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

에서 x는 묶인변수이다. 대신 이 식에서 자유변수는 $a,\ b,\ f$이다.

자유변수와 묶인변수를 구분하는 방법은 다음과 같다. 만약 하나의 식에서 해당 변수를 나타내는 문자를 일괄적으로 현재 식에 포함되지 않은 다른 문자로 바꾸었을 때 식의 의미나 값이 달라지지 않으면 묶인변수이고, 그렇지 않으면 자유변수이다. 예를 들어 (1)을 $\forall y \in B : p(y)$로 바꾸어도 의미가 변하지 않으므로 (1)에서 x는 묶인변수이며, (4)를

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

로 바꾸어도 의미가 변하지 않으므로 (4)에서 x는 묶인변수이다. 그러나 만약 (4)를

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

로 바꾸면 의미가 달라지므로 f는 자유변수이다.

하나의 변수가 하나의 논리식 내에서 자유변수인 동시에 묶인변수일 수 있지만, 이 교재에서는 다른 문자를 사용함으로써 그러한 혼동을 피하기로 한다.

1) 사실은 '명제'가 아니라 '논리식' 또는 '일계논리식'이라고 불러야 맞다. 하지만 여기서는 직관적으로 접근하여 '명제'라고 부른다.

1.3 한정기호가 여러 개 사용된 경우. p가 두 개의 변수를 가진 명제함수이고 $x \in A$, $y \in B$일 때

$$\exists\, y \in B : p(x,\ y)$$

에서 x는 자유변수이므로 이 식의 앞에 x에 대한 한정기호를 하나 더 붙여서

$$\forall\, x \in A\ \exists\, y \in B : p(x,\ y) \tag{5}$$

와 같은 논리식을 만들 수 있다.

예를 들어 x와 y가 실수일 때 부등식 '$x < y$'를 $p(x,\ y)$로 나타내면 (5)는

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} : x < y \tag{6}$$

가 된다. 실수 x가 주어질 때마다 그보다 더 큰 실수 y가 존재하므로 (6)은 참이다. 만약 (6)의 전칭기호와 존재기호의 순서를 바꾸어

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} : x < y \tag{7}$$

로 나타내면 (7)은 거짓이다. 왜냐하면 하나의 실수 y가 모든 실수 x보다 클 수는 없기 때문이다. 이와 같이 한정기호의 순서를 바꾸면 의미가 달라진다.

대상영역이 같은 두 전칭기호나 두 존재기호가 연달아 나타나면 간단히 나타낼 수 있다. 즉

$\forall\, x \in A\ \forall\, y \in A : p(x,\ y)$를 줄여서 $\forall\, x, y \in A : p(x,\ y)$로,
$\exists\, x \in A\ \exists\, y \in A : p(x,\ y)$를 줄여서 $\exists\, x, y \in A : p(x,\ y)$로

나타낸다. 그러나 $\forall\, x \in A\ \forall\, y \in B : p(x,\ y)$와 같이 대상영역이 다른 경우는 줄여서 나타내지 않는다.

1.4 한정명제의 부정. 한정명제의 부정 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sim (\forall\, x \in A : p(x)) &\iff \exists\, x \in A : (\sim p(x)) \\ \sim (\exists\, x \in A : p(x)) &\iff \forall\, x \in A : (\sim p(x)) \end{aligned}$$

이 규칙은 한정기호가 여러 개 사용된 경우에도 똑같이 적용된다.

$$\begin{aligned} \sim (\forall\, x \in A\ \forall\, y \in B : p(x,\ y)) &\iff \exists\, x \in A\ \exists\, y \in B : (\sim p(x,\ y)) \\ \sim (\forall\, x \in A\ \exists\, y \in B : p(x,\ y)) &\iff \exists\, x \in A\ \forall\, y \in B : (\sim p(x,\ y)) \\ \sim (\exists\, x \in A\ \forall\, y \in B : p(x,\ y)) &\iff \forall\, x \in A\ \exists\, y \in B : (\sim p(x,\ y)) \\ \sim (\exists\, x \in A\ \exists\, y \in B : p(x,\ y)) &\iff \forall\, x \in A\ \forall\, y \in B : (\sim p(x,\ y)) \end{aligned}$$

1.5 기호의 잘못된 사용. '$\Rightarrow$'는 명제와 명제 사이에 들어가는 기호이며, 이 기호가 포함된 문장은 명제가 아니다. 예를 들어 다음은 명제가 아니다.[2)]

$$p(x) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(x)),$$
$$\forall\, x \in A : (p(x) \Rightarrow q(x)),$$
$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

---

2) 하지만 '명제에 대한 진술'인 '메타명제'로 볼 수는 있다.

1.6 동등관계와 분할. A와 B가 집합일 때 두 집합의 **카르테시안 곱**을

$$A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A\ \wedge\ y \in B\}$$

로 정의한다. 또한 $A \times A$를 A^2으로 나타낸다. 세 개 이상의 집합의 카르테시안 곱도 마찬가지로 정의한다.

A와 B가 집합일 때 $A \times B$의 부분집합을 **A에서 B로 가는 관계**라고 부른다. $A = B$인 경우 A에서 A로 가는 관계를 간단히 **A 위의 관계**라고 부른다.

R가 A 위의 관계일 때 $(x,\ y) \in R$를 xRy로 나타낸다. 예를 들어 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$일 때 부등호 $\leq$는

$$\leq = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3)\}$$

으로 정의된 관계이다. 이때 $(2,\ 3) \in \leq$로 나타내는 대신 $2 \leq 3$으로 나타낸다.

A가 집합이고 R가 A 위의 관계일 때, 다음과 같이 정의한다.

- R가 **반사적**이라는 것은 $\forall x \in A : xRx$를 만족시키는 것이다.
- R가 **대칭적**이라는 것은 $\forall x, y \in A : (xRy \leftrightarrow yRx)$를 만족시키는 것이다.
- R가 **추이적**이라는 것은 $\forall x, y, z \in A : ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$를 만족시키는 것이다.
- 반사적이고 대칭적이며 추이적인 관계를 **동등관계**(equivalent relation)라고 부른다.[3]

A가 집합이고 R가 A 위의 동등관계이며 $x \in A$일 때, R에 의한 x의 **동등류**(equivalent class)를 다음과 같이 정의한다.

$$\{y \in A \mid (x,\ y) \in R\}$$

이 동등류를 $[x]_R$ 또는 $\overline{x}$ 또는 R_x로 나타낸다. A 위의 동등관계 R에 의한 A의 모든 원소의 동등류를 모은 집합을 R에 의한 A의 **몫집합**(quotient set; 상집합)이라고 부르며 A/R로 나타낸다. 즉

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

이다.

A가 집합이고 A의 부분집합들의 모임 P가 두 조건

- P의 원소들은 공집합이 아니고 쌍마다 서로소이다,
- P의 모든 원소의 합집합은 A가 된다

를 모두 만족시키면 P를 A의 **분할**(partition)이라고 부른다.

A가 집합이고 R가 A 위의 동등관계이면 A/R는 A의 분할이 된다. 역으로 A가 집합이고 P가 A의 분할일 때, A의 임의의 원소 $x,\ y$에 대하여

$$(x,\ y) \in R \iff \exists E \in P : (x \in E\ \wedge\ y \in E)$$

로 정의하면 R는 A 위의 동등관계가 된다. 이러한 동등관계를 A/P로 나타낸다.

즉 동등관계는 항상 분할을 유도하며, 분할은 항상 동등관계를 유도한다. 더욱이 R가 A 위의 동등관계이고 P가 A의 분할일 때 $A/(A/R) = R$이고 $A/(A/P) = P$이다.

---

3) 'equivalent'를 주로 '동치'로 번역하지만, 이 교재에서는 일본식 표현을 지양하고 '동등'으로 번역한다.

1.7 함수. A와 B가 집합일 때 A의 각 원소를 B의 하나의 원소에 대응시키는 관계를 A로부터 B로의 함수라고 부른다. 즉 f가 세 조건

- $f \subseteq A \times B$,
- $\forall x \in A\ \exists y \in B : (x,\ y) \in f$,
- $\forall x \in A\ \forall y_1 \in B\ \forall y_2 \in B : (((x,\ y_1) \in f\ \wedge\ (x,\ y_2) \in f)\ \to\ y_1 = y_2)$

를 모두 만족시킬 때 f를 A로부터 B로의 **함수**라고 부르고 $f : A \to B$로 나타낸다. 이때 A를 f의 **정의역**, B를 f의 **공역**이라고 부른다. 정의역과 공역이 명확하여 혼동할 염려가 없을 땐 $f : A \to B$를 f로 나타낸다. 또한 $(x,\ y) \in f$를 $y = f(x)$로 나타낸다. [만약 정의역과 공역에 대한 언급 없이 '함수 f'라고 한다면 이때에는 f의 정의역과 공역이 중요하지 않거나 언급할 필요가 없는 것으로 생각할 수 있다.]

함수를 나타낼 때에는 항상 '정의역', '공역', '두 집합 사이의 관계'가 명확하게 드러나야 한다. 예를 들어

$$f(x) = 2x + 3 \tag{8}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 \tag{9}$$

는 함수가 아니며 **함수식**이다. 그러나 만약 문맥상 x와 y가 속하는 집합이 명확하다면 편의상 (8)과 (9)는 함수를 나타낸다고 할 수 있다. 한편

$$\text{'함수 } x^2 + 2x + 3\text{을 미분하면 …'} \tag{10}$$

도 잘못된 표현이다. 이것을 정확하게 바꾸면

$$\text{'}f(x) = x^2 + 2x + 3\text{으로 정의된 함수 } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\text{ 를 미분하면 …'}$$

이 된다.

f가 A로부터 B로의 함수이고 $y = f(x)$인 것을 $f : x \mapsto y$로 나타낸다. 이때 y를 f에 의한 x의 함숫값이라고 부른다. 만약 이 함수의 이름 f가 주어지지 않고 단지 A로부터 B로의 대응관계만 주어졌다면 이 함수를 $x \mapsto y$로 나타낸다. 이러한 관점에서 (10)은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\text{'}x\text{가 실수일 때 함수 } x \mapsto x^2 + 2x + 3\text{을 미분하면 …'}$$

하지만 보통은 편의상 하나의 대수식이 주어지면 그 대수식은 대수식에 포함된 변수들에 대입시킬 수 있는 값들의 모임을 정의역으로 하는 함수인 것으로 여긴다. 예컨대 x가 실수일 때 $x^2 + 2x + 3$은 x에 대한 이차식인 동시에 x를 $x^2 + 2x + 3$에 대응시키는 함수인 것으로 여긴다.

1.8 연산. 두 실수 x, y의 합 $x + y$는 $(x,\ y)$를 $x + y$에 대응시키는 함수로 생각할 수 있다. 또한 x가 실수일 때 $-x$는 x를 $-x$에 대응시키는 함수로 생각할 수 있다. 이처럼 A가 집합일 때, A^2으로부터 A로의 함수를 **이항연산**이라고 부르며, A로부터 A로의 함수를 **일항연산**이라고 부른다. 즉 연산은 함수의 일종이다.

일반적으로 A가 집합일 때 A^n으로부터 A로의 함수를 **n항연산**이라고 부른다. 집합의 여집합, 실수의 절댓값 등은 일항연산이며, 집합의 합집합, 집합의 교집합, 실수의 덧셈, 실수의 곱셈 등은 이항연산이다. 일항연산은 **변환**이라고 불리기도 한다.

1.9 대응에 따른 함수의 구분. A와 B가 집합이고 f가 A로부터 B로의 함수일 때 다음과 같이 정의한다.

- f가 **일대일함수**(단사)라는 것은 $\forall x_1,\ x_2 \in A\ :\ \left(x_1 \neq x_2\ \rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)\right)$를 만족시키는 것이다.
- f가 **위에로의 함수**(전사)라는 것은 $\forall y \in B\ \exists x \in A\ :\ y = f(x)$를 만족시키는 것이다.
- f가 **일대일대응**(전단사)이라는 것은 f가 일대일함수이면서 동시에 위에로의 함수인 것이다.

더욱이 $C \subseteq A,\ D \subseteq B$일 때 다음과 같이 정의한다.

- f에 의한 C의 **상** : $f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C : y = f(x)\}$
- f에 의한 D의 **역상** : $f^{-1}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in D : y = f(x)\}$

즉 $f : A \rightarrow B$가 위에로의 함수라는 것은 $f(A) = B$인 것을 의미한다.

1.10 유한집합과 무한집합. 집합론에서는 0 이상의 정수를 다음과 같이 정의한다.

- $0 = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0,\ 1\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0,\ 1,\ 2\}$,

  $\vdots$
- $n+1 = n \cup \{n\}$

이때 0 이상의 모든 정수들의 모임을 ω로 나타내며, 1 이상의 모든 정수들의 모임을 $\mathbb{N}$으로 나타낸다.

두 집합 A와 B에 대하여 일대일대응 $f : A \rightarrow B$가 존재할 때 'A와 B는 **대등하다**'고 말하고 $A \approx B$로 나타낸다. 즉 A와 B가 대등하다는 것은 A와 B의 원소의 개수가 같다는 것을 의미한다.

E가 집합이라고 하자. 만약 $\exists n \in \omega : E \approx n$이면 E를 **유한집합**이라고 부른다. 유한집합이 아닌 집합을 **무한집합**이라고 부른다. 또한 ω와 대등한 집합을 **가부번집합**이라고 부르며, 유한집합과 가부번집합을 통틀어 **가산집합**이라고 부른다. 가산집합이 아닌 집합을 **비가산집합**이라고 부른다.

E가 집합일 때 다음 명제는 모두 서로 동등하다. Prove!

(ㄱ) E는 무한집합이다.

(ㄴ) E는 가부번인 부분집합을 포함한다.

(ㄷ) E와 대등한 E의 진부분집합이 존재한다.

(ㄹ) E의 임의의 유한부분집합 F에 대하여 $E \setminus F \approx E$이다.

다음은 유한집합과 무한집합에 관련된 몇 가지 성질이다. Prove!

(Ⅰ) E가 무한집합이고 $E \subseteq D$이면 D도 무한집합이다.

(Ⅱ) A와 B가 유한집합이면 $A \times B$도 유한집합이다.

(Ⅲ) A와 B가 가산집합이면 $A \times B$도 가산집합이다.

(Ⅳ) A가 유한집합이면 A의 거듭제곱집합 $\wp(A)$도 유한집합이다.

(Ⅴ) $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$의 모든 원소가 가산집합이면 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$도 가산집합이다.

1.11 집합의 크기 비교. 두 집합 A와 B에 대하여 일대일함수 $f : A \to B$가 존재하면 $A \preccurlyeq B$로 나타낸다. 만약 $A \preccurlyeq B$이지만 $A \not\approx B$이면 $A \prec B$로 나타낸다.

다음은 집합의 크기에 관한 몇 가지 정리이다.

(Ⅰ) **거듭제곱집합의 크기**. 집합 A로부터 2로의 모든 함수들의 모임을 2^A라고 하면 $2^A \approx \wp(A)$이다. Prove!
(Ⅱ) **칸토어의 정리**. E가 집합이고 $\wp(E)$가 E의 거듭제곱집합이면 $E \prec \wp(E)$이다.
(Ⅲ) **칸토어-베른슈타인의 정리**. A와 B가 집합이고, $A \preccurlyeq B$이며 $A \succcurlyeq B$이면 $A \approx B$이다.

일상적으로 사용하는 수 집합들의 크기는 다음과 같다.

(Ⅳ) 0과 모든 자연수는 집합론에서는 유한집합이다.
(Ⅴ) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다. Prove!
(Ⅵ) $\mathbb{R}$와 $\mathbb{C}$는 비가산집합이며, $\wp(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$이다.
(Ⅶ) a와 b가 실수이고 $a < b$이면 $[a,\ b] \approx (a,\ b) \approx \mathbb{R}$이다. Prove!

1.12 순서집합. A가 집합이고 R가 A 위의 관계이며

$$\forall x,\ y \in A : ((xRy \wedge yRx) \to x = y)$$

가 성립할 때 R를 **반대칭적 관계**라고 부른다. 또한 반사적이고 반대칭적이며 추이적인 관계를 **순서관계**라고 부르며, 순서관계가 주어진 집합을 **순서집합**이라고 부른다. 집합 A에 순서관계 $\leq$가 주어졌을 때 '$\leq$가 주어진 순서집합 A'를 $\langle A,\ \leq \rangle$로 나타낸다.

$\langle A,\ \leq \rangle$가 순서집합이고 a와 b가 A의 원소라고 하자. 만약 $a \leq b$ 또는 $b \leq a$가 성립하면 'a와 b는 **비교 가능하다**'고 말한다. $\langle A,\ \leq \rangle$의 임의의 두 원소가 비교 가능할 때, 즉 $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$일 때 A를 **선형순서집합** 또는 **전순서집합**이라고 부른다.

$\langle A,\ \leq \rangle$가 순서집합이고 M, m이 A의 원소라고 하자. 만약 $\forall x \in A : x \leq M$이 성립하면 M을 A의 **최대원소**라고 부르고 $\max A$로 나타낸다. 만약 $\forall x \in A : m \leq x$가 성립하면 m을 A의 **최소원소**라고 부르고 $\min A$로 나타낸다.

$\langle A,\ \leq \rangle$가 순서집합이고 $B \subseteq A$이며 a와 b가 B의 원소라고 하자. 만약 $\forall x \in B : (b \leq x \to b = x)$가 성립하면 b를 B의 **극대원소**라고 부른다. 만약 $\forall x \in B : (x \leq a \to x = a)$가 성립하면 a를 B의 **극소원소**라고 부른다.

$\langle A,\ \leq \rangle$가 순서집합이고 $B \subseteq A$이며 u와 v가 A의 원소라고 하자. 만약 $\forall x \in B : x \leq u$가 성립하면 u를 B의 **상계**라고 부른다. 만약 $\forall x \in B : v \leq x$가 성립하면 v를 B의 **하계**라고 부른다. 상계를 갖는 집합을 **위로 유계인 집합**이라고 부르며, 하계를 갖는 집합을 **아래로 유계인 집합**이라고 부른다. 상계 중 가장 작은 것을 **최소상계** 또는 **상한**이라고 부르며, 하계 중 가장 큰 것을 **최대하계** 또는 **하한**이라고 부른다.

$\langle A,\ \leq \rangle$가 순서집합이고 A의 공집합 아닌 모든 부분집합이 단 하나의 극소원소를 가지면 A를 **정렬집합**이라고 부른다.

1.13 선택공리* 네 집합

$$A_1 = \{1,\ 2\},\ A_2 = \{2,\ 3,\ 4\},\ A_3 = \{2,\ 4\},\ A_4 = \{1,\ 3,\ 5\}$$

를 원소로 갖는 집합족 $F = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$가 주어졌다고 하자. F의 각 원소 A_i에서 원소를 하나씩만 택하여 만든 집합을 생각할 수 있다. 예를 들어 $1 \in A_1$, $3 \in A_2$, $4 \in A_3$, $1 \in A_4$를 택하여 $\{1,\ 3,\ 4\}$를 구성할 수 있다. 집합족 F가 무한집합인 경우에도 이와 같은 방법으로

'F의 각 원소에서 원소를 하나씩 택하여 만든 집합이 존재한다'

는 것을 보장할 수 있을까? 이 명제는 처음에는 증명될 수 있는 명제라고 생각되었지만 1963년 폴 코헨은 이 명제가 증명될 수 없음을 증명하였다. 따라서 우리는 이 명제를 **선택공리**라고 부르고 참인 명제로 받아들이기로 약속한다.

다음은 선택공리와 동등한 명제들이다.

(Ⅰ) **하우스도르프의 극대 원리**. 순서집합 $\langle A,\ \le \rangle$의 모든 선형부분집합들의 모임 P에 관계 $\subseteq$가 부여된 순서집합 $\langle P,\ \subseteq \rangle$은 극대원소를 가진다.

(Ⅱ) **조른의 보조정리**. 순서집합 $\langle A,\ \le \rangle$의 모든 선형부분집합이 상계를 가지면 A는 극대원소를 가진다.

(Ⅲ) **제르멜로의 정렬 정리**. 임의의 집합 A에 대하여 $\langle A,\ \le \rangle$가 정렬집합이 되도록 하는 순서관계 $\le$가 존재한다.

집합 A에 적절한 순서관계를 정의하여 A가 정렬집합이 되도록 할 수 있으면 'A는 **정렬 가능하다**'고 말한다. 정렬 정리에 의하면 임의의 집합은 정렬 가능하다. 그러나 정렬 정리는 집합의 정렬 가능성을 보장할 뿐, 실제로 그 집합에 어떠한 순서관계를 부여해야 정렬집합이 되는지에 대한 정보를 주지는 않는다. 예를 들어 정렬 정리에 의하여 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$는 정렬 가능하지만, 어떠한 순서관계가 $\mathbb{R}$를 정렬집합이 되도록 하는지는 알려져 있지 않다.

1.14 연속체 가설* 집합의 크기에 관한 칸토어의 정리에 의하여 다음을 얻는다.

$$\mathbb{Q} < \mathbb{R} < \wp(\mathbb{R}) < \wp(\wp(\mathbb{R})) < \wp(\wp(\wp(\mathbb{R}))) < \cdots$$

그렇다면 $\mathbb{Q} < S < \mathbb{R}$인 집합 S가 존재하는가? 일반화시켜 생각해보면

임의의 무한집합 E에 대하여 $E < S < \wp(E)$인 집합 S가 존재하는가?

라는 의문이 생긴다. 20세기 초까지 많은 수학자들이 그러한 집합 S는 존재하지 않을 것이라고 추측하였는데, 이러한 추측을 **연속체 가설**이라고 부른다. 1938년 쿠르트 괴델은 연속체 가설이 집합론의 기존 공리에 모순이 되지 않는다는 것을 증명하였으며, 1963년 폴 코헨은 연속체 가설이 집합론의 기존 공리와 독립적임을 증명하였다. 즉 연속체 가설은 선택 공리와 마찬가지로 그것을 참으로 받아들이든 그것을 부정하든 전혀 모순이 발생하지 않는다.

제 2 장

실수계의 성질

2.1 무정의 용어와 공리. 증명은 이미 알고 있는 사실을 통해 주어진 내용이 참인지 또는 거짓인지 판별하는 것이다. 따라서 어떠한 내용을 증명하기 위해서는 충분히 많은 내용을 알고 있어야 한다. 그런데 그러한 내용들 또한 증명을 통해 참임을 인정받은 것이므로 그것을 위해서 또 다른 내용들을 참으로 인정해야 한다. 그리고 그것들이 참임을 증명하기 위해서는 또 다른 내용들을 참으로 인정해야 한다.

어떠한 수학적 내용을 증명하기 위해 주어진 내용을 검토하다 보면 결국 더 이상 증명할 수 없는 상태가 된다. 또는 무리하게 계속 증명을 시도하다 보면 자칫 논리적 순환의 오류에 빠질 수도 있다.

정의도 마찬가지이다. 어떠한 개념을 정의하기 위해서는 다른 개념을 이용해야 하는데, 그러한 개념도 정의된 것이므로 그것들을 정의하기 위해서는 또 다른 개념을 이용해야 한다. 이렇게 계속하여 정의를 하다 보면 언젠가는 더 이상 정의할 수 없는 개념을 만나게 된다.

요컨대 수학에는 정의할 수 없지만 존재하는 개념이 있다. 이러한 개념을 **무정의 용어**라고 부른다. 마찬가지로 수학에는 증명할 수 없지만 정당성을 인정해야 하는 사실이 있다. 이러한 사실을 **공리**라고 부른다.

집합에 구조가 주어졌을 때 그 집합을 **계**(system)라고 부른다. 집합 $\mathbb{R}$ 에 덧셈, 곱셈, 순서 관계가 주어지고, 이 연산과 관계에 대하여 완비성(극한에 대한 닫힘 성질)을 가질 때 $\mathbb{R}$ 를 **실수계**라고 부른다.

실수계를 정의하는 방법은 여러 가지가 있는데 크게 두 가지를 생각할 수 있다. 하나는 집합을 이용하여 자연수계를 정의하고, 자연수계를 정수계, 유리수계, 실수계까지 확장하는 구성적 방법이며, 다른 하나는 공리를 이용하여 실수계를 규정하는 공리적 방법이다.

실수계는 다음과 같은 세 개의 공리로 규정된다.

- 체 공리 : $\langle \mathbb{R},\ +,\ \cdot \rangle$는 체(field)이다.
- 순서 공리 : $\langle \mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \leq \rangle$는 순서체(ordered field)이다.
- 완비성 공리 : $\mathbb{R}$ 의 부분집합 중 공집합이 아니고 위로 유계인 것은 상한을 가진다.

2.2 실수계의 체 공리. 실수 집합 $\mathbb{R}$ 에 덧셈이라고 불리는 이항연산 $+$와 곱셈이라고 불리는 이항연산 $\cdot$ 이 주어져 있으며, 이들은 다음과 아홉 개의 법칙을 모두 만족시킨다.

A1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ :\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (덧셈의 결합법칙)

A2. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ x+y = y+x$ (덧셈의 교환법칙)

A3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ :\ x+0 = x$ (덧셈에 대한 항등원)

A4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, x' \in \mathbb{R}\ :\ x+x' = 0$ (덧셈에 대한 역원)

M1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ :\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (곱셈의 결합법칙)

M2. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ x \cdot y = y \cdot x$ (곱셈의 교환법칙)

M3. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ x \cdot 1 = x$ (곱셈에 대한 항등원)

M4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, x' \in \mathbb{R}\ :\ x \cdot x' = 1$ (곱셈에 대한 역원)

D. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ :\ x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (분배법칙)

우리가 잘 알고 있는 것처럼 실수의 덧셈, 곱셈과 관련하여 다음과 같이 약속한다.

- 두 실수의 곱 $x \cdot y$를 xy로 나타낸다.
- 0을 **덧셈에 대한 항등원**, 1을 **곱셈에 대한 항등원**이라고 부른다.
- $x+x'=0$일 때 x'을 x의 **덧셈에 대한 역원**이라고 부르며 $-x$로 나타낸다.
- $xx'=1$일 때 x'을 x의 **곱셈에 대한 역원**이라고 부르며 x^{-1} 또는 $\dfrac{1}{x}$ 또는 $1/x$로 나타낸다.
- $x+(-y)$를 $x-y$로 나타낸다. $x \cdot \dfrac{1}{y}$를 $\dfrac{x}{y}$ 또는 x/y로 나타낸다.

체 공리를 이용하면 지금까지 당연하게 여겨왔던 다음과 같은 법칙들을 증명할 수 있다. Prove!

(i) 실수계에서 0은 단 하나만 존재한다.
(ii) 실수계에서 1은 단 하나만 존재한다.
(iii) x가 실수이면 x의 덧셈에 대한 역원은 단 하나만 존재한다.
(iv) x가 0이 아닌 실수이면 x의 곱셈에 대한 역원은 단 하나만 존재한다.
(v) x가 실수이면 $0x=0$.
(vi) x가 실수이면 $(-1)x=-x$.
(vii) x, y가 실수이면 $(-x)(-y)=xy$.
(viii) x가 실수이면 $-(-x)=x$.
(ix) x, y가 0이 아닌 실수이면 $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy}$.
(x) x, y가 0이 아닌 실수이면 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$.

2.3 실수계의 순서 공리. 실수 집합 $\mathbb{R}$에 관계 $<$가 주어져 있으며, 이 관계는 다음 네 개의 법칙을 만족시킨다.

O1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : [(x<y \vee x=y \vee y<x)$
$\wedge \sim((x<y \wedge x=y) \vee (x=y \wedge y<x) \vee (y<x \wedge x<y))]$ (삼자택일법칙)

O2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : [(x<y \wedge y<z) \rightarrow x<z]$ (추이법칙)

O3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x<y \rightarrow x+z<y+z)$ (평행이동법칙)

O4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : [(x<y \wedge 0<z) \rightarrow xz<yz]$

우리가 잘 알고 있는 것처럼 실수의 순서와 관련하여 다음과 같이 약속한다.

- $(x<y \vee x=y)$를 간단히 $x \leq y$로 나타낸다.
- $x<y \iff y>x$, $x \leq y \iff y \geq x$
- x가 실수이고 $x>0$이면 x를 **양의 실수** 또는 **양수**라고 부른다.
- x가 실수이고 $x<0$이면 x를 **음의 실수** 또는 **음수**라고 부른다.
- E가 수의 집합이면 $E^+=\{x \in E \mid x>0\}$, $E^-=\{x \in E \mid x<0\}$, $E^*=\{x \in E \mid x \neq 0\}$.

순서 공리를 이용하면 지금까지 당연하게 여겨왔던 다음과 같은 법칙들을 증명할 수 있다. Prove!

(i) $1>0$

(ii) $\forall x\in\mathbb{R} \ : (x>0 \longleftrightarrow -x<0)$

(iii) $\forall x, y\in\mathbb{R} \ : (x<y \longleftrightarrow y-x>0)$

(iv) $\forall x\in\mathbb{R} \ : (x\neq 0 \longleftrightarrow x^2>0)$

(v) $\forall x, y, z\in\mathbb{R} \ : [(x<y \ \wedge \ z<0) \rightarrow xz>yz]$

(vi) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} : (x>0 \longleftrightarrow 1/x>0)$

(vii) $\forall x, y\in\mathbb{R} \ : [(x>0 \ \wedge \ y>0 \ \wedge \ x<y) \rightarrow 1/y<1/x]$

(viii) $\forall x, y\in\mathbb{R}^+ : (x<y \longleftrightarrow x^2<y^2)$

2.4 절댓값. 실수 x에 대하여 절댓값 $|x|$를 다음과 같이 정의한다.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{if } x\geq 0 \\ -x & \text{if } x<0 \end{cases}$$

기하학적으로 $|x|$는 수직선에서 x를 나타내는 점이 원점으로부터 떨어진 거리를 의미한다.

x, y, z가 실수이고 $z\neq 0$일 때 다음이 성립한다. Prove!

(i) $|x|=|-x|$

(ii) $|x||y|=|xy|$

(iii) $|1/z|=1/|z|$

(iv) $|x/z|=|x|/|z|$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 크다. 이것을 절댓값을 포함한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall x, y\in\mathbb{R} \ : |x+y|\leq|x|+|y|$$

이 부등식을 **삼각부등식**이라고 부른다.

2.5 상한과 하한. A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 M, m이 A의 원소라고 하자. 만약 $\forall x\in A : x\leq M$이 성립하면 M을 A의 **최대원소**라고 부르고 $\max A$로 나타낸다. 만약 $\forall x\in A : m\leq x$가 성립하면 m을 A의 **최소원소**라고 부르고 $\min A$로 나타낸다.

B가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 a와 b가 B의 원소라고 하자. 만약 $\forall x\in B : (b\leq x \rightarrow b=x)$가 성립하면 b를 B의 **극대원소**라고 부른다. 만약 $\forall x\in B : (x\leq a \rightarrow x=a)$가 성립하면 a를 B의 **극소원소**라고 부른다.

C가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 u와 v가 실수라고 하자. 만약 $\forall x\in C : x\leq u$가 성립하면 u를 C의 **상계**라고 부른다. 만약 $\forall x\in C : v\leq x$가 성립하면 v를 C의 **하계**라고 부른다. 상계를 갖는 집합을 **위로 유계인 집합**이라고 부르며, 하계를 갖는 집합을 **아래로 유계인 집합**이라고 부른다. 상계 중 가장 작은 것을 **최소상계** 또는 **상한**이라고 부르며, 하계 중 가장 큰 것을 **최대하계** 또는 **하한**이라고 부른다.

공집합의 상한은 $-\infty$, 공집합의 하한은 $+\infty$로 정의한다.

E가 $\mathbb{R}$ 의 부분집합이고 α가 E의 하한일 때, 기호로

$$\alpha = \inf E \quad \text{또는} \quad \alpha = \mathrm{glb}E$$

로 나타낸다. 또한 β가 E의 상한일 때 기호로

$$\beta = \sup E \quad \text{또는} \quad \beta = \mathrm{lub}E$$

로 나타낸다. 한편 집합 D와 함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $E = f(D)$일 때

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup E, \quad \inf_{x \in D} f(x) = \inf E$$

로 정의한다.

다음은 상계 · 하계, 상한 · 하한과 관련된 성질이다. Prove!

(Ⅰ) $\mathbb{R}$ 의 부분집합 E와 실수 u에 대하여 (u가 E의 상계이다) $\Longleftrightarrow$ ($-u$가 $-E$의 하계이다).

(Ⅱ) $\mathbb{R}$ 의 부분집합 E와 실수 α에 대하여 $\sup E = \alpha \iff \inf(-E) = -\alpha$.

(Ⅲ) $\mathbb{R}$ 의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이며 α가 E의 상계일 때,

$$\sup E = \alpha \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists x \in E : \alpha - \epsilon < x \le \alpha.$$

(Ⅳ) $\mathbb{R}$ 의 부분집합 E가 공집합이 아니고 아래 유계이며 β가 E의 하계일 때,

$$\inf E = \beta \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists x \in E : \beta + \epsilon > x \ge \beta.$$

2.6 실수계의 완비성. 체 공리와 순서 공리를 만족시키는 계는 실수계만 있는 것이 아니다. 유리수계도 체 공리와 순서 공리를 만족시키며, $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ 를 만족시키는 임의의 체 F는 체 공리와 순서 공리를 만족시킨다. 그러므로 실수계와 유리수계를 구분할 수 있는 공리가 더 필요하다.

다음과 같은 집합을 생각하자.

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

이 집합의 상한은 무엇일까? 만약 2의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}$의 존재성이 보장된다면 위 집합의 상한은 $\sqrt{2}$라고 할 수 있다. 그렇다면 과연 $\sqrt{2}$는 존재할까? 이것은 체 공리와 순서 공리만으로는 보장되지 않는다. 따라서 다음 공리를 도입한다.

완비성 공리. 실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이면 E의 상한이 존재한다.

완비성 공리에 의하여 다음 성질들이 증명된다. Prove!

(Ⅰ) $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}$ 이고 E가 아래로 유계이면 E의 하한이 존재한다.

(Ⅱ) $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}$ 이고 E가 유한집합이면 E는 최댓값과 최솟값을 가진다.

(Ⅲ) $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{Z}$ 이고 E가 위로 유계이면 E는 최댓값을 가진다.

(Ⅳ) **아르키메데스의 정리**. a, b가 실수이고 $b > 0$이면 $a < nb$인 자연수 n이 존재한다.

(Ⅴ) $\mathbb{N}$ 은 위로 유계가 아니다.

(Ⅵ) **유리수 집합의 조밀성**. a, b가 실수이고 $a < b$이면 $a < q < b$인 유리수 q가 존재한다.

(Ⅶ) **무리수 집합의 조밀성**. a, b가 실수이고 $a < b$이면 $a < r < b$인 무리수 r가 존재한다.

2.7 자연수와 수학적 귀납법. E가 $\mathbb{R}$ 의 부분집합이고 두 조건

- $1 \in E$,
- $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

를 모두 만족시킬 때 E를 **귀납적 집합**이라고 부른다. 또한 모든 귀납적 집합들의 교집합을 **자연수 집합**이라고 부르고 $\mathbb{N}$ 으로 나타낸다. **정수 집합**과 **유리수 집합**은 각각 다음과 같이 정의한다.

- $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

유리수가 아닌 실수를 **무리수**라고 부른다.

어떠한 명제가 임의의 자연수에 대하여 참임을 보일 때에는 다음과 같은 **수학적 귀납법**을 사용할 수 있다. 즉 정의역이 자연수 집합인 명제함수 $p : \mathbb{N} \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$가 두 조건

(ㄱ) $p(1)$이 참이다,
(ㄴ) $p(k)$가 참이라고 가정하면 $p(k+1)$도 참이다

를 모두 만족시키면 $p(\mathbb{N}) = \{\mathrm{T}\}$이다. Prove!

수학적 귀납법은 정의역이 자연수 집합인 함수를 정의할 때에도 사용된다. 즉 $\mathbb{N}$ 위에서 함수 f를 정의할 때

(ㄱ) $f(1)$의 값을 정의하고,
(ㄴ) $f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(k)$의 값이 정의되어 있다고 가정하고 이를 이용하여 $f(k+1)$의 값을 정의

하면 임의의 자연수 n에 대하여 함숫값 $f(n)$이 정해진다. 이러한 방법으로 정의하는 것을 **귀납적 정의**[4)]라고 부른다. 귀납적 정의의 대표적인 예는 지수가 자연수인 거듭제곱이다. 즉, 실수 x와 자연수 n에 대하여 **자연수 지수를 가진 거듭제곱**을 다음과 같이 정의한다.

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x$$

2.8 지수의 확장. 0이 아닌 실수 x와 자연수 n에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

유리수 지수를 정의하는 것은 조금 까다롭다. 왜냐하면 자연수 n과 양수 x에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y가 존재한다는 것을 보장해야 하기 때문이다.

정리. 양수 x와 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 양수 y가 유일하게 존재한다.

증명의 개요. $E = \{ t \in \mathbb{R}^+ \mid t^n < x \}$로 두고 $y = \sup E$라고 하면 $y^n = x$가 성립한다. 이 정리의 증명이 어려우면 $x = 3,\ n = 2$로 두고 증명을 시도해보기 바란다.

4) '재귀적 정의' 또는 '자기호출 정의'라고 부르기도 한다.

이제 다음과 같이 정의한다.

- 음이 아닌 실수 x와 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y를 x의 **n제곱근**이라고 부르며, x의 n제곱근 중에서 음이 아닌 것을 $x^{1/n}$ 또는 $\sqrt[n]{x}$ 로 나타낸다.
- 음이 아닌 실수 x와 자연수 m, n에 대하여 $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$으로 정의한다.
- 음수 x와 홀수인 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y를 x의 **n제곱근**이라고 부른다.
- 음수 x와 홀수인 자연수 n, 자연수 m에 대하여 $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$으로 정의한다.
- 실수 x와 양의 유리수 r에 대하여 $x^{-r} = (x^r)^{-1}$로 정의한다.

실수 지수의 정의는 더욱 까다롭다. x가 양수이고 r가 무리수일 때 다음과 같이 정의한다.

- $x \geq 1$일 때 $x^r = \sup\{x^t \mid t \leq r,\ t \in \mathbb{Q}\}$.
- $0 < x \leq 1$일 때 $x^r = ((x^{-1})^r)^{-1}$.

2.9 열린집합과 닫힌집합. 집합 G가 실수 집합의 부분집합이고 $x \in G$라고 하자. 만약 $x \in I \subseteq G$를 만족시키는 열린구간 I가 존재하면 x를 G의 **내점**이라고 부른다. G의 내점들의 모임을 G의 **내부**라고 부르며 G^o 또는 $\mathrm{int}G$로 나타낸다. G의 모든 원소가 G의 내점일 때 G를 **열린집합**이라고 부른다.

집합 F가 실수 집합의 부분집합이라고 하자. $F^c \coloneqq \mathbb{R} \setminus F$가 열린집합일 때 F를 **닫힌집합**이라고 부른다.

열린집합과 닫힌집합은 다음과 같은 성질을 가진다. Prove!

(Ⅰ) $\{G_i \mid i \in I\}$가 열린집합들의 모임이면 $\bigcup_{i \in I} G_i$도 열린집합이다.

(Ⅱ) $\{G_k \mid k = 1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$가 유한 개의 열린집합들의 모임이면 $\bigcap_{k=1}^{p} G_k$도 열린집합이다.

(Ⅲ) $\{F_i \mid i \in I\}$가 닫힌집합들의 모임이면 $\bigcap_{i \in I} F_i$도 닫힌집합이다.

(Ⅳ) $\{F_k \mid k = 1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$가 유한 개의 닫힌집합들의 모임이면 $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$도 닫힌집합이다.

실수 x와 양수 r에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- 중심이 x이고 반지름이 r인 **열린구** : $B_r(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$
- 중심이 x이고 반지름이 r인 **닫힌구** : $\overline{B_r}(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| \leq r\}$
- 중심이 x이고 반지름이 r인 **구멍뚫린 열린구** : $B_r{}'(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-y| < r\}$
- 중심이 x이고 반지름이 r인 **구멍뚫린 닫힌구** : $\overline{B_r}{}'(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-y| \leq r\}$

열린구를 이용하면 내점을 정의할 수 있다. 즉 점 x가 집합 G의 내점이라는 것은 $B_\epsilon(x) \subseteq G$인 양수 ϵ이 존재하는 것이다.

실수 집합의 부분집합 E와 실수 x에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이고 $B_\epsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing$이면 x를 E의 **경계점**이라고 부른다. E의 경계점들의 모임을 E의 **경계**라고 부르며 ∂E 또는 $\mathrm{bd}\,E$로 나타낸다.
- x가 E의 내점도 아니고 경계점도 아니면 x를 E의 **외점**이라고 부른다. E의 외점들의 모임을 E의 **외부**라고 부르며 $\mathrm{ext}\,E$로 나타낸다.

다음은 실수계에서 열린집합과 닫힌집합에 관련된 여러 가지 예이다. Prove!

(i) 열린구간은 열린집합이며 닫힌구간은 닫힌집합이다.

(ii) x가 실수일 때, 한점집합 $\{x\}$는 닫힌집합이다. $\{x\}$의 경계는 $\{x\}$이며 내부는 공집합이다.

(iii) 공집합은 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 공집합의 내부와 경계는 공집합이다.

(iv) 실수 집합 $\mathbb{R}$는 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. $\mathbb{R}$의 내부는 $\mathbb{R}$이고 경계는 공집합이다.

(v) 구간 $(0,\ 1]$은 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다. 내부는 $(0,\ 1)$이고 경계는 $\{0,\ 1\}$이다.

(vi) 정수 집합 $\mathbb{Z}$는 닫힌집합이다. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$는 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다.

2.10 상대적 열린집합과 상대적 닫힌집합. 전체공간을 $\mathbb{R}$가 아닌 $\mathbb{R}$의 부분집합으로 생각했을 때에도 열린집합과 닫힌집합을 정의할 수 있다.

집합 $U \subseteq \mathbb{R}$와 U의 부분집합 G, F가 주어졌다고 하자. 만약 전체공간을 U로 제한했을 때 G가 열린집합이 되면 G를 **U에서의 상대적 열린집합**이라고 부른다. 또한 전체공간을 U로 제한했을 때 F가 닫힌집합이 되면 F를 **U에서의 상대적 닫힌집합**이라고 부른다.

예를 들어 $\mathbb{R}$에서 반열린구간 $G=[0,\ 1)$은 열린집합이 아니다. 그러나 전체공간을 $U=[0,\ 3)$으로 제한하면 G는 열린집합이 된다. 왜냐하면

$$B_1(0)=\{y\in U \mid |0-y|<1\}\subseteq G$$

로서 0은 G의 내점이 되기 때문이다. 또한 $\mathbb{R}$에서 $F=[2,\ 3)$은 닫힌집합이 아니지만 전체공간을 U로 제한하면 F는 닫힌집합이 된다. 즉 어떤 집합이 열린집합 또는 닫힌집합이 되는지의 여부는 전체공간을 무엇으로 두느냐에 따라 달라질 수 있다.

상대적 열린집합과 상대적 닫힌집합을 판별하는 좋은 방법은 다음과 같은 것이 있다.

> G가 U에서의 상대적 열린집합이 될 필요충분조건은 $\mathbb{R}$에서의 열린집합 G_1이 존재하여 $G=U\cap G_1$을 만족시키는 것이다. 또한 F가 U에서의 상대적 닫힌집합이 될 필요충분조건은 $\mathbb{R}$에서의 닫힌집합 F_1이 존재하여 $F=U\cap F_1$을 만족시키는 것이다.

예컨대 $U=[0,\ 3)$일 때, $G_1=(-1,\ 1)$은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이고 $[0,\ 1)=U\cap G_1$이므로 $[0,\ 1)$은 U에서 열린집합이다.

제 3 장

수열의 극한

3.1 수열의 정의. 정의역이 자연수집합과 순서동형인 함수를 수열이라고 부른다. 더 구체적으로 말하면, 정수 n_0이 존재하여 $D=\{n\in\mathbb{Z} \mid n\geq n_0\}$의 꼴로 나타낼 수 있는 정의역을 갖는 함수를 **수열**이라고 부른다. 특히 공역이 실수인 수열을 실수열, 공역이 유리수인 수열을 유리수열, 공역이 무리수인 수열을 무리수열이라고 부른다. 각 $n\in D$에 대하여 $a:D\to\mathbb{R}$의 함숫값을 $a(n)$으로 나타내는 대신 a_n으로 나타낸다. 또한 수열 $a:D\to\mathbb{R}$를 $\{a_n\}$, $\langle a_n\rangle$ 또는 $(a_n \mid n\in D)$와 같이 나타낸다.

3.2 두 점 사이의 거리. 수직선에서 두 실수 x, y를 나타내는 점 사이의 거리는 $|x-y|$이다.
만약 x, y가 $\mathbb{R}^2$의 점이고 $x=(x_1,\ x_2)$, $y=(y_1,\ y_2)$이면 x와 y 사이의 거리는

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

이 된다. 더욱 일반적으로 p가 자연수이고 x, y가 $\mathbb{R}^p$의 점이며

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p),\ \ y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p)$$

이면 x와 y 사이의 거리는

$$|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i-y_i)^2}$$

이 된다. 이때 절댓값 $|\ |$은 다음과 같은 성질을 가진다. Prove!

(i) $\forall x\in\mathbb{R}^p : (|x|=0 \longleftrightarrow x=0)$

(ii) $\forall x\in\mathbb{R}^p : |x|=|-x|$

(iii) $\forall x, y\in\mathbb{R}^p : |x+y|\leq|x|+|y|$

여기서 (iii)을 **삼각부등식**이라고 부른다.

3.3 수렴하는 수열의 극한의 정의. $\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 만약

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} : (n>N \to |a_n-L|<\epsilon)$$

이 성립하면 $\{a_n\}$은 L에 **수렴한다**고 말하고 L을 $\{a_n\}$의 **극한** 또는 **극한값**이라고 부른다. $\{a_n\}$이 L에 수렴하는 것을 $a_n\to L$로 나타낸다.

수열 $\{a_n\}$의 극한은 유일하다. 즉 L과 M이 실수이고 $(a_n\to L)\wedge(a_n\to M)$이면 $L=M$이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 것을 다음과 같이 등호를 사용하여 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L$$

3.4 수렴하는 수열의 성질. 수렴하는 수열은 다음과 같은 성질을 가진다. Prove!

(Ⅰ) $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이면 $\{a_n\}$은 유계이다. 즉 $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall n : |a_n| < M$.

(Ⅱ) $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $\{a_n\}$의 부분수열 $\{a_{n_k}\}$도 L에 수렴한다.

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$일 때 다음이 성립한다. Prove!

(Ⅲ) $\{a_n + b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

(Ⅳ) $\{a_n - b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$.

(Ⅴ) $\{a_n b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$.

(Ⅵ) $\forall n : b_n \neq 0$이고 $B \neq 0$이면 $\{a_n / b_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

(Ⅶ) p가 자연수일 때 $\{(a_n)^p\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = A^p$.

3.5 수열의 극한을 증명하는 기술. 수렴하는 수열의 극한을 증명하는 방법은 여러 가지가 있는데, 여기서는 그 중 대표적인 세 가지를 소개한다.

3.5.1 부등식 이용하기. 수열의 극한을 증명하는 가장 기본적인 방법이다.

(ⅰ) $a_n = \frac{1}{n}$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$임을 보여라.

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$임을 증명하여라.

(ⅲ) $a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$으로 주어진 수열 $\{a_n\}$이 $\frac{2}{3}$에 수렴함을 보여라.

(ⅳ) $r > 1$이라고 하자. $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{r^n} \to 0$임을 증명하여라.

3.5.2 단조수렴정리. 단조증가하는 수열과 단조감소하는 수열을 통틀어 **단조수열**이라고 부른다. 단조이면서 유계인 실수열은 항상 수렴한다. Prove! 즉 어떠한 수열이 단조이고 유계임을 보이면 그 수열이 수렴함을 증명하게 되는 것이다.

(ⅰ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$로 주어진 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보여라.

(ⅱ) $0 < r < 1$일 때 $\{r^n\}$의 극한을 구하여라.

(ⅲ) $r > 0$일 때 $\{r^{1/n}\}$의 극한을 구하여라.

3.5.3 코시 수열. 실수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \in \mathbb{N} : [(n > N \wedge m > N) \to |a_m - a_n| < \epsilon]$$

이 성립하면 $\{a_n\}$을 **코시 수열**이라고 부른다. 실수계에서 수열이 수렴할 필요충분조건은 코시 수열인 것이다. Prove! 따라서 극한값을 알지 못하는 상태에서도 수열이 코시 수열임을 보이기만 하면 수렴함이 증명된다.

코시 수열의 성질을 이용하여 다음을 증명해보자.

(ⅰ) 실수열 $\{a_n\}$에 대하여 $0 < q < 1$인 실수 q가 존재하여 임의의 n에 대하여

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q|a_{n+1} - a_n|$$

이 성립하면 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

(ⅱ) $0 < r < 1$일 때 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} r^k$이 수렴함을 보여라.

3.6 발산하는 수열. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, '$\{a_n\}$은 **발산한다**'라고 말한다. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 것을 부정하면 다음과 같다.

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \ \wedge \ |a_n - L| \geq \epsilon)$$

'$\{a_n\}$이 어떠한 값에도 수렴하지 않는다'를 증명하려면 다음을 보이면 된다.

$$\forall L \in \mathbb{R} \ \exists \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \ \wedge \ |a_n - L| \geq \epsilon)$$

수열 $\{a_n\}$이 발산함을 보이는 방법은 다음과 같은 것들이 있다.

(Ⅰ) 수렴의 부정을 이용하여 발산함을 보인다.
(Ⅱ) $\{a_n\}$이 유계가 아님을 보인다.
(Ⅲ) $\{a_n\}$의 부분수열 중 서로 다른 값에 수렴하는 것을 찾는다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 발산함을 증명해보자.

(ⅰ) $a_n = (-1)^n$

(ⅱ) $a_n = n^2$

(ⅲ) $a_n = n - n^3$

(ⅳ) $a_n = \sin n$

실수열 $\{a_n\}$의 발산을 다음과 같이 구분한다.

- $\forall Y \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \to \ a_n > Y)$이면 '$\{a_n\}$은 **양의 무한대로 발산한다**'라고 말하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$로 나타낸다.
- $\forall Y \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \to \ a_n < Y)$이면 '$\{a_n\}$은 **음의 무한대로 발산한다**'라고 말하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$로 나타낸다.
- 발산하지만 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지 않는 경우 '**진동한다**'라고 말한다.

3.7 수열과 집합의 집적점. $a_n = (-1)^n$으로 정의된 실수열 $\{a_n\}$은 발산하지만 부분수열 $\{a_{2k}\}$는 1에 수렴하고, 부분수열 $\{a_{2k+1}\}$은 -1에 수렴한다. 이처럼 실수열 $\{a_n\}$과 실수 L에 대하여 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재하여 $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$이 성립하면 L을 $\{a_n\}$의 **집적점**이라고 부른다.

직관적으로 L이 $\{a_n\}$의 집적점이라는 것은 L 주변에 $\{a_n\}$의 항이 무수히 많이 몰려있다는 것을 의미한다. 달리 표현하면 L을 중심으로 하는 아무리 작은 원을 그려도 그 원 안에 $\{a_n\}$의 항이 무한히 많이 들어간다.

이러한 개념은 집합에도 적용할 수 있다. E가 실수 집합의 부분집합이고 λ가 실수라고 하자. 만약

$$\forall \epsilon > 0 \, : \, B_\epsilon{}'(\lambda) \cap E \neq \varnothing$$

이 성립하면 λ를 E의 **집적점**이라고 부른다. 즉 집적점은 수열의 집적점과 집합의 집적점으로서 두 가지 개념이 있다.

3.8 볼차노-바이어슈트라스 정리. 실수 집합의 부분집합 E가 무한집합이라고 하자. 만약 E가 유계라면 E의 원소들이 몰려 있는 점이 적어도 하나 이상 존재할 것이다. 왜냐하면 원소들이 몰려 있는 점이 없고 유계인 집합은 유한집합이 될 것이기 때문이다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

유계인 무한집합은 집적점을 가진다. Prove!

수열에 대해서도 비슷한 정리를 얻는다.

유계인 실수열은 집적점을 가진다. Prove!

달리 말하면 유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

3.9 상극한과 하극한. 실수열 $\{a_n\}$이 유계인 경우 $\{a_n\}$의 집적점들의 모임 C를 생각할 수 있다. $\{a_n\}$이 유계가 아닌 경우에는 $\{a_n\}$의 집적점이 존재할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있지만 어쨌든 이 경우에도 $\{a_n\}$의 집적점들의 모임 C를 생각할 수 있다. 이때 C의 상한을 $\{a_n\}$의 **상극한**이라고 부르며, C의 하한을 $\{a_n\}$의 **하극한**이라고 부른다.

실수 $\varLambda$가 수열 $\{a_n\}$의 상극한인 것을

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \varLambda \quad \text{또는} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \varLambda$$

로 나타낸다. 또한 실수 λ가 수열 $\{a_n\}$의 하극한인 것을

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lambda \quad \text{또는} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lambda$$

로 나타낸다.

직관적으로 $\{a_n\}$의 상극한이란 $\{a_n\}$의 부분수열의 극한값 중 가장 큰 것을 의미하며, $\{a_n\}$의 하극한이란 $\{a_n\}$의 부분수열의 극한값 중 가장 작은 것을 의미한다.

다음과 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$의 상극한과 하극한을 (직관적인 방법으로) 구해보자.

(i) $a_n = (-1)^n$ (ii) $a_n = r^n$ (단, $0 < r < 1$)

(iii) $a_n = n + n(-1)^n$ (iv) $a_n = n^2$

(v) $a_n = -n^3$ (vi) $a_n = (-n)^n$

수렴하는 수열의 극한을 정의할 때 $\epsilon - N$ 논법을 이용한 것처럼 상극한도 $\epsilon - N$ 논법으로 정의할 수 있다. 즉 수열 $\{a_n\}$이 유계이고 Λ가 실수일 때, Λ가 $\{a_n\}$의 상극한일 필요충분조건은 두 조건

㈀ $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \left[n > N \rightarrow a_n < \Lambda + \epsilon \right]$,

㈁ $\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} : \left[n > N \wedge a_n > \Lambda - \epsilon \right]$

을 모두 만족시키는 것이다. 여기서 ㈀은 $\{a_n\}$의 부분수열이 Λ보다 큰 값에 수렴할 수 없다는 뜻이며, ㈁은 Λ 이상의 값에 수렴하는 부분수열이 존재한다는 뜻이다. 하극한에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

또한 상극한과 하극한은 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} a_k,$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

3.10 닫힌집합에서의 극한. 집합 E에 대하여, E를 포함하는 닫힌집합 중에서 가장 작은 것을 E의 **폐포** 또는 **닫개**라고 부른다. E의 폐포를 $\overline{E}$로 나타낸다. 집합 E의 집적점들의 모임을 **도집합**이라고 부르며 E'으로 나타낸다. 폐포의 정의에 의하여 다음이 성립한다. Prove!

(Ⅰ) $E \subseteq \overline{E}$

(Ⅱ) F가 닫힌집합이고 $E \subseteq F$이면 $\overline{E} \subseteq F$이다.

(Ⅲ) E가 닫힌집합일 필요충분조건은 $\overline{E} = E$인 것이다.

(Ⅳ) $\overline{E} = E \cup E'$

(Ⅴ) $\overline{E} = E^o \cup \partial E$

즉 어떠한 집합 F가 닫힌집합이라는 것은 자신의 집적점을 모두 원소로 가지는 것을 의미한다. 그런데 수열의 경우 집적점은 그 점에 수렴하는 부분수열이 존재한다는 것을 의미한다. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 닫힌집합 F에 속하면 $\{a_n\}$의 치역은 유한집합이거나 또는 무한집합인데, $\{a_n\}$의 치역이 무한집합인 경우 그 집적점은 F에 속한다. $\{a_n\}$의 치역의 집적점은 곧 $\{a_n\}$의 집적점이다. 그러므로 다음과 같은 결론을 얻는다.

$\{a_n\}$의 모든 항이 F에 속하고 F가 닫힌집합이며 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 극한값은 F에 속한다.

즉 어떠한 집합이 닫혀있다는 것은 그 집합 안에서 수열을 만들었을 때 그 수열의 극한이 그 집합에서 벗어나지 못한다는 것을 의미한다.

3.11 긴밀집합* 함수 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$가 D의 각 점의 근방에서 어떠한 성질을 가지고 있다고 해서 f가 D 전체에서 그러한 성질을 가지고 있다고 단정할 수 없다. 예를 들어 $D = (0,\ 1]$일 때 함수 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

그러면 임의의 $a \in D$에 대하여 f가 $B_\epsilon(a)$에서 유계가 되도록 하는 양수 ϵ이 존재한다. 즉 임의의 $a \in D$에 대하여 f는 a의 근방에서 유계이다. 그러나 f는 D에서 유계가 아니다. 즉 f는 각 점에서 국소적으로 유계이지만 D 전체에서는 유계가 아니다.

그러나 D의 특성에 따라서는 $f : D \to \mathbb{R}$ 의 국소적 성질을 대역적 성질로 확장하는 것이 가능한 경우도 있다. 긴밀집합은 그러한 대표적인 집합이다.

집합 K와 집합족 $C = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$에 대하여 $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$가 성립할 때 C를 K의 **덮개**라고 부른다.

만약 C의 모든 원소가 열린집합이면 C를 K의 **열린덮개**라고 부른다. 만약 C의 모든 원소가 닫힌집합이면 C를 K의 **닫힌덮개**라고 부른다.

집합족 C_1이 C의 부분집합이면서 K의 덮개이면 C_1을 K를 덮는 C의 **부분덮개**라고 부른다. C_1이 C의 부분덮개이면서 유한집합이면 C_1을 C의 **유한부분덮개**라고 부른다.

다음은 열린덮개와 부분덮개의 예이다.

(i) 집합족 $C = \{(n-1,\ n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$는 $\mathbb{R}$ 의 열린덮개이다. 임의의 정수는 C의 한 개의 원소에 의해서만 덮이기 때문에 C의 원소 중 하나라도 빠지면 덮이지 않는 정수점이 존재하게 된다. 따라서 C는 진부분덮개를 갖지 않는다.

(ii) $I_n = (1/n,\ 2)$일 때 집합족 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $(0,\ 2)$의 열린덮개이다. C는 $(0,\ 2)$를 덮는 부분덮개 $C_1 = \{I_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$을 가진다.

(iii) 집합족 $C = \{B_1(x) \mid x \in \mathbb{Q}\}$는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 열린덮개이다. C는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$를 덮는 유한부분덮개 $C_1 = \{B_1(1),\ B_1(2),\ B_1(3),\ B_1(4)\}$를 가진다.

집합 K를 덮는 임의의 열린덮개 C가 K를 덮는 유한부분덮개 C_1을 가지면 K를 **긴밀집합**이라고 부른다. 긴밀집합의 정의를 이용하여 다음을 증명해보자.

(iv) 구간 $I = (0,\ 2]$는 긴밀집합이 아니다.
(v) 실수 집합의 부분집합 K가 유한이면 K가 긴밀집합이다.

3.12 하이네-보렐 정리* 긴밀집합의 정의를 이용하여 집합의 긴밀성을 판별하고 증명하는 것은 매우 불편하다. 다음 정리는 실수 집합의 부분집합이 긴밀집합인지를 쉽게 판별하는 방법을 제공한다.

실수 집합의 부분집합 K가 긴밀집합일 필요충분조건은 유계이고 닫힌집합인 것이다.

이 정리를 **하이네-보렐 정리**라고 부른다. 이 정리를 이용하여 다음을 증명해보자.

(i) $\mathbb{Q}$ 는 실수계에서 긴밀집합이 아니다.
(ii) $\mathbb{Z}$ 는 실수계에서 긴밀집합이 아니다.
(iii) 반열린구간 $[0,\ 3)$은 실수계에서 긴밀집합이 아니다.
(iv) 공집합은 긴밀집합이다.
(v) 두 긴밀집합의 합집합과 교집합은 긴밀집합이다.

제 4 장

함수의 극한

4.1 수렴하는 함수의 극한. '$x \to a$일 때 $f(x) \to L$이다'라는 함수의 극한은 a가 한 점인 경우와 a가 양의 무한대 또는 음의 무한대인 경우로 나누어 생각한다.

D가 $\mathbb{R}$ 의 부분집합이고 함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 실수 L이 주어져 있다고 하자.

- 만약 a가 D의 집적점이고,

  $$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : [0 < |x-a| < \delta \to |f(x)-L| < \epsilon]$$

  이 성립하면 'a에서 f는 L에 **수렴한다**' 또는 '$x \to a$일 때 $f(x) \to L$이다'라고 말하고, L을 a에서 f의 **극한값**이라고 부른다. 이것을 기호로는 $\lim_{x \to a} f(x) = L$로 나타낸다.

- 만약 D가 위로 유계가 아니고,

  $$\forall \epsilon > 0 \ \exists X \in \mathbb{R} \ \forall x \in D : [x > X \to |f(x)-L| < \epsilon]$$

  이 성립하면 'f는 양의 무한대에서 L에 **수렴한다**' 또는 '$x \to +\infty$일 때 $f(x) \to L$이다'라고 말하고, L을 양의 무한대에서 f의 **극한값**이라고 부른다. 기호로는 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$로 나타낸다.

- $x \to -\infty$일 때의 극한은 직접 정의해보자.

함수의 극한의 정의를 이용하여 다음을 증명해보자.

(i) $f(x) = 2x+1$로 정의된 함수 f가 3에서 7에 수렴함을 보여라.

(ii) $x \to 2$일 때 $x^2+1 \to 5$임을 증명하여라.

(iii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$을 증명하여라.

(iv) $x \to -\infty$일 때 $\frac{x+1}{x-1} \to 1$임을 보여라.

4.2 함수의 극한을 증명하는 기술. 수렴하는 함수의 극한을 증명하는 방법은 여러 가지가 있는데, 여기서는 그 중 대표적인 두 가지를 소개한다.

4.2.1 부등식 이용하기. 함수의 극한을 증명하는 가장 기본적인 방법이다.

(i) $x \to 5$일 때 $\sqrt{x-1} \to 2$임을 보여라.

(ii) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$임을 증명하여라.

(iii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$임을 증명하여라.

(iv) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$임을 증명하여라.

4.2.2 수열 판정법. D가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 a가 D의 집적점이며 L이 실수이고 $f : D \to \mathbb{R}$가 함수라고 하자. 이때 다음 두 명제는 서로 동등하다.

㈀ f가 a에서 L에 수렴한다.

㈁ a에 수렴하고 $\forall n : x_n \in D \setminus \{a\}$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\{f(x_n)\}$이 L에 수렴한다.

수열 판정법을 이용하면 다음과 같은 명제를 쉽게 증명할 수 있다.

(Ⅰ) $x \to a$일 때 $f(x) \to A$이고 $g(x) \to B$이면 $(f(x)+g(x)) \to (A+B)$이다. Prove!

(Ⅱ) $x \to a$일 때 $f(x) \to A$이고 $g(x) \to B$이면 $(f(x)g(x)) \to AB$이다. Prove!

(Ⅲ) f와 g가 정의역이 D인 함수이고, $a \in D'$이며, a의 한 근방에서 $f \leq g$이며 a에서 f와 g가 수렴하면 $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$가 성립한다. Prove!

수열 판정법은 함수가 발산함을 증명할 때에도 사용한다.

(i) $\chi_{\mathbb{Q}}$는 수렴하는 점이 없음을 증명하여라.

(ii) $x \to 0$일 때 $\sin \frac{1}{x}$은 발산함을 증명하여라.

생각하기. 수열 판정법을 이용하여 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$과 같은 극한은 어떻게 증명하는지 생각해보자.

4.2.3 그 외의 방법들. 앞에서 소개한 두 방법 외에 다음과 같은 방법도 있다.

(Ⅰ) 코시 조건 이용하기.

(Ⅱ) 단조수렴정리 이용하기.

(Ⅲ) 상극한과 하극한 이용하기.

(Ⅳ) 로피탈의 정리 이용하기.

4.3 연속함수. D가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $a \in D$이며 함수 $f : D \to \mathbb{R}$가 주어졌다고 하자.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : [|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon]$$

이 성립하면 'f는 ***a*에서 연속**이다'라고 말한다. $E \subseteq D$이고 E의 모든 점에서 f가 연속일 때 'f는 ***E*에서 연속**이다'라고 말한다. 정의역의 모든 점에서 연속인 함수를 **연속함수**라고 부른다.

연속은 다음과 같이 다른 방법으로 정의할 수 있다. Prove!

(Ⅰ) $f : D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 연속일 필요충분조건은 a가 D의 고립점이거나, a가 D의 집적점인 경우 f가 a에서 $f(a)$에 수렴하는 것이다.

(Ⅱ) $f : D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 연속일 필요충분조건은 모든 항이 D에 속하면서 a에 수렴하는 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$가 성립하는 것이다.

(Ⅲ) $f : D \to \mathbb{R}$가 연속함수일 필요충분조건은 임의의 열린집합 G에 대하여 $f^{-1}(G)$가 D에서의 열린집합인 것이다.

4.4 연속함수의 성질. 연속함수는 다음과 같은 성질을 가진다. Prove!

(Ⅰ) 사칙계산으로 연속함수를 결합하여 만든 함수는 정의역의 모든 점에서 연속이다.

(Ⅱ) f가 a에서 연속이면 f는 a의 근방에서 유계이다.

(Ⅲ) $f : K \to \mathbb{R}$ 가 연속함수이고 K가 긴밀집합이면 f는 K에서 유계이며, 최댓값과 최솟값을 가진다.

(Ⅳ) 연속함수는 중간값 성질을 가진다.

4.5 평등연속. 함수 $f : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ 가

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

로 주어졌다고 하자. $\epsilon = 1$이고 $a = 3$일 때에는 $\delta = 1$에 대하여

$$\forall x \in (0,\ \infty) : [|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon]$$

은 참이다. 그러나 $\epsilon = 1$이고 $a = 1$일 때에는 $\delta = 1$에 대하여 위 명제는 참이 아니다. $\delta = 1/2$이어야 참이 된다. 즉 ϵ이 변하지 않아도 a가 변하면 연속의 정의를 만족시키기 위한 δ의 값이 변한다.

그러나 함수에 따라서는 주어진 ϵ에 대하여 δ가 정해지기만 하면 a의 값이 변해도 연속의 정의가 계속 만족되는 경우가 있다. 즉 함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a, x \in D : [|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon]$$

을 만족시키면 'f는 D에서 **평등연속**이다'라고 말한다. 평등연속을 **균등연속**이라고 부르기도 한다.

평등연속과 관련하여 다음 명제는 참이다. Prove!

(Ⅰ) 평등연속인 함수는 연속함수이다.

(Ⅱ) 긴밀집합 위에서 연속인 함수는 그 집합 위에서 평등연속이다.

(Ⅲ) D가 유계인 집합이고 함수 f가 D 위에서 평등연속이면 f는 D에서 유계이다.

4.6 함수의 여러 가지 극한. 함수의 극한 '$x \to$ ㉠일 때 $f(x) \to$ ㉡이다'의 정의는 ㉠과 ㉡에 따라 여러 가지로 나눌 수 있다. 즉 ㉠이 실수인 경우, 양의 무한대인 경우, 음의 무한대인 경우, 실수이면서 좌극한인 경우, 실수이면서 우극한인 경우로 나눌 수 있으며, ㉡이 실수인 경우, 양의 무한대인 경우, 음의 무한대인 경우로 나눌 수 있다. 이것만 해도 15가지가 된다. 여기에 만약 상극한과 하극한까지 고려한다면 경우의 수는 훨씬 많아진다.

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 실수 $a,\ L$에 대하여 다음과 같은 극한을 정의해보자. (a의 조건도 함께 써보자.)

(ⅰ) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

(ⅱ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(ⅲ) $\lim_{x \to a-} f(x) = L$

(ⅳ) $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

(ⅴ) a에서 f의 극한은 진동한다.

제 5 장

함수의 미분

해석학의 미분 단원은 고등학교의 미적분에서 배웠던 내용과 가장 비슷한 단원이다. 여기서는 고등학교 과정에서 다루지 않은 내용 위주로 살펴보자.

5.1 미분계수와 도함수. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $a \in E \cap E'$이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 **a에서 미분 가능하다**는 것은

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 수렴하는 것을 의미한다. 이 극한을 a에서 f의 **미분계수**라고 부르며 $f'(a)$ 또는 $Df(a)$로 나타낸다. 만약 E의 점들 중 f가 미분 가능한 점들의 모임을 H라고 하면

$$f' : H \to \mathbb{R}, \ f' : x \mapsto f'(x)$$

는 H로부터 $\mathbb{R}$로의 함수가 된다. 이때 f'을 f의 **도함수**라고 부른다. 또한 함수의 미분계수를 구하거나 도함수를 구하는 것을 '**미분한다**'라고 말한다.

f를 n번 미분한 함수를 f의 **n계도함수**라고 부르고 $f^{(n)}$으로 나타낸다. 편의상 $f^{(0)} = f$로 정의한다.

$H \subseteq E$이고 $f : E \to \mathbb{R}$가 H 위에서 n번 미분 가능할 때 'f는 H에서 **D^n급**이다'라고 말한다. 만약 f가 H 위에서 n번 미분 가능하고 $f^{(n)}$이 H 위에서 연속일 때 'f는 H에서 **C^n급**이다'라고 말한다. H에서 D^n급인 함수들의 모임을 $D^n(H)$로 나타내며, H에서 C^n급인 함수들의 모임을 $C^n(H)$로 나타낸다.

만약 f가 H 위에서 임의 횟수로 미분 가능하면 'f는 H에서 **D^∞급**이다' 또는 'f는 H 위에서 **C^∞급**이다' 라고 말하며, 그러한 함수들의 모임을 $D^\infty(H)$ 또는 $C^\infty(H)$로 나타낸다.

5.2 미분계수의 성질. 두 함수 f, g가 정의역이 같고 a에서 미분 가능하며 $k \in \mathbb{R}$라고 하자. 그러면 $f+g$, kf, fg도 a에서 미분 가능하고 다음이 성립한다. Prove!

(Ⅰ) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(Ⅱ) $(kf)'(a) = kf'(a)$

(Ⅲ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

만약 $g(a) \neq 0$이면 f/g도 a에서 미분 가능하고 다음이 성립한다. Prove!

(Ⅳ) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

만약 f와 g가 a에서 n번 미분 가능하면 다음과 같은 **라이프니츠의 법칙**이 성립한다. Prove!

(Ⅴ) $(fg)^{(n)}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$

5.3 연쇄법칙. 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 주어졌다고 하자. 만약 f가 $a \in A$에서 미분 가능하고 $b = f(a)$이며 g가 b에서 미분 가능하면 $g \circ f$는 a에서 미분 가능하고 $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$가 성립한다.

생각하기. 연쇄법칙을 증명하기 위해 $z = g(y)$, $y = f(x)$라고 두고

$$(g \circ f)'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

라고 하면 될까?

5.4 평균값 정리. 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $a < b$이면

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

를 만족시키는 점 c가 $(a,\ b)$에 존재한다. [지금부터 별다른 언급이 없는 한 구간 $(a,\ b)$와 $[a,\ b]$를 말할 땐 $a < b$인 것으로 약속하자.]

이 정리로 쉽게 증명할 수 있는 따름정리는 다음과 같은 것들이 있다. Prove!

(Ⅰ) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이면 $[a,\ b]$에서 f의 증감은 f'의 부호에 따라 결정된다.

(Ⅱ) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $f' \equiv 0$이면 f는 $[a,\ b]$에서 상수함수이다.

(Ⅲ) 함수 f와 g가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $f' \equiv g'$이면 f와 g는 상수차이이다.

평균값 정리는 부등식을 증명하는 데에도 이용된다.

(ⅰ) 임의의 양수 x에 대하여 $1 + x < e^x$임을 보여라.

(ⅱ) $0 < \alpha \le 1$, $x \ge -1$일 때 $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$가 성립함을 보여라.

5.5 역함수 정리. 함수 f가 $(a,\ b)$에서 C^1급이고 $c \in (a,\ b)$이며 $f'(c) \ne 0$이라고 하자. 그러면 c의 열린 근방 U가 존재하여 f는 U에서 일대일대응이 되고 역함수 g를 가지며 g는 $f(U)$에서 C^1급이고

$$g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

이 성립한다.

5.6 도함수의 중간값 성질. 함수 f가 a에서 미분 가능하면 f는 a에서 연속이다. 그러나 f'은 a에서 연속이 아닐 수도 있다. 예를 들어 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{if } x \ne 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

으로 주어졌을 때 f는 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하지만 f'은 0에서 연속이 아니다.

그러나 f가 미분 가능한 경우 f'은 항상 중간값 성질을 가진다. 이 성질을 **다르보의 정리**라고 부른다.

5.7 테일러의 정리. 다항함수는 수학에서 다루는 실수함수 중 가장 다루기 쉬운 함수이다. 만약 어떠한 함수가 주어졌을 때 그 함수에 충분히 가까운 다항함수를 만들 수 있다면 원래의 함수의 함숫값을 구하는 대신 근사한 다항함수의 함숫값을 구하면 되므로, 함수의 다항함수 근사는 수학에서 중요한 문제 중 하나이다.

테일러의 정리는 미분 가능한 함수의 근사 다항함수를 만드는 방법을 제공한다.

n이 자연수이고 $a,\ b$가 실수 또는 확장실수이며 $a < b$이고 $f \in D^{(n+1)}(a,\ b)$라고 하자. 그러면 $(a,\ b)$의 임의의 두 점 $x,\ x_0$에 대하여 두 점 사이의 점 c가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

여기서

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

을 **n차 테일러 다항식**이라고 부른다. 테일러의 정리에 의하면

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \le \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|$$

이 성립한다. 이 부등식은 제한된 범위 내에서 테일러 다항식 P_n이 원래의 함수 f에 얼마나 가까운지 가늠할 수 있도록 해준다. 예컨대, 위 부등식을 이용하여 다음 문제를 해결할 수 있다.

(i) 테일러의 정리를 이용하여 $100 < x < 102$의 범위에서

$$\left| P(x) - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10000}$$

을 만족시키는 다항식 $P(x)$를 구하여라.

(ii) 테일러의 정리를 이용하여 오일러 상수 e의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하여라.

제 6 장

리만 적분

6.1 리만 적분의 정의. 리만 적분은 아마도 학부 과정의 기초 해석학에서 다루는 개념 중 하나의 개념을 정의하기 위한 보조 개념이 가장 많이 필요한 개념일 것이다. 리만 적분은 분할, 상합과 하합, 상적분과 하적분, 리만 적분 순서대로 정의한다.

6.1.1 구간의 분할. $a<b$인 두 실수 $a,\ b$에 대하여 구간 $[a,\ b]$가 주어졌다고 하자. $[a,\ b]$의 유한부분집합 중 a와 b를 모두 원소로 갖는 것을 $[a,\ b]$의 **분할**이라고 부른다. $[a,\ b]$의 분할 P를 원소나열법으로 나타낼 땐 보통 다음과 같이 원소의 크기 순으로 나타낸다.

$$P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\},\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

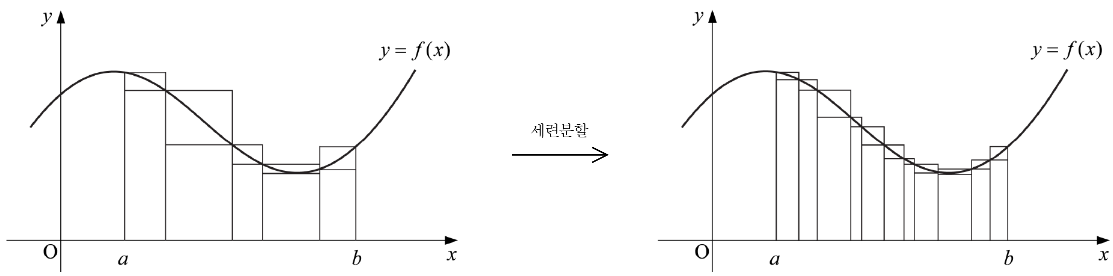
직관적으로 분할이란 닫힌구간을 작은 구간들로 쪼갠 것을 나타낸다. 이때 쪼개진 작은 구간을 성분구간이라고 부른다. 즉 $1\le i\le n$인 자연수 i에 대하여 $[x_{i-1},\ x_i]$를 P의 **성분구간**이라고 부른다.

P_1과 P_2가 $[a,\ b]$의 분할이고 $P_1\subseteq P_2$일 때 P_2를 P_1의 **세련분할**이라고 부른다. 직관적으로 세련분할이란 원래의 분할보다 더 많이 자른 분할을 뜻한다. P_3이 $[a,\ b]$의 분할이고 $P_1\cup P_2\subseteq P_3$일 때 P_3을 P_1과 P_2의 **공통세련분할**이라고 부른다.

6.1.2. 상합과 하합. 함수 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$가 $[a,\ b]$에서 유계이고 $P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$이 $[a,\ b]$의 분할이라고 하자. 이때 분할 P에 대한 f의 상합과 하합을 각각 다음과 같이 정의한다.

- **상합** : $U(f,\ P)=\sum_P M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ (단, $M_i=\sup f([x_{i-1},\ x_i]),\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$)
- **하합** : $L(f,\ P)=\sum_P m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ (단, $m_i=\inf f([x_{i-1},\ x_i]),\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$)

P_1가 P_2가 $[a,\ b]$의 분할이고 $P_1\subseteq P_2$일 때 P_1과 P_2에 대한 함수 f의 상합과 하합을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$L(f,\ P_1),\ U(f,\ P_1)$ $L(f,\ P_2),\ U(f,\ P_2)$

즉 P_2과 P_1의 세련분할일 때 $L(f,\ P_1)\le L(f,\ P_2)\le U(f,\ P_2)\le U(f,\ P_1)$이 성립한다. 또한 임의의 분할에 대하여 (하합)$\le$(상합)이다.

6.1.3 상적분과 하적분. 함수 $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$에서 유계일 때 $[a,\ b]$의 어떠한 분할 P가 주어진다 하더라도 상합 $U(f,\ P)$는 일정한 값보다 작아질 수 없으며 하합 $L(f,\ P)$는 일정한 값보다 커질 수 없다. 즉 두 집합

$$\{U(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\},\ \ \{L(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}$$

는 모두 유계이다. 따라서 순서대로 이들 집합의 하한과 상한을 구할 수 있다. 이 값을 각각 상적분, 하적분이라고 부른다.

- $[a,\ b]$에서 f의 **리만 상적분** : $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}$
- $[a,\ b]$에서 f의 **리만 하적분** : $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}$

구간 $[0,\ 1]$에서 다음과 같이 정의된 함수 f의 상적분과 하적분을 구해보자.

(i) $f(x) = 2$
(ii) $f(x) = x$
(iii) $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$

6.1.4 리만 적분. 구간 $[a.\ b]$에서 함수 $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 의 상적분과 하적분은 같을 수도 있고 다를 수도 있다. 만약 $[a,\ b]$에서 함수 f의 상적분과 하적분이 같으면 그 값을 $[a,\ b]$에서 f의 **리만 적분**이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

여기서 f를 **피적분함수**라고 부르고 x를 **적분변수**라고 부른다.

리만 적분과 관련된 문제는 대부분 다음과 같은 두 가지 형태로 귀결된다.

(i) 주어진 함수는 리만 적분 가능한가?
(ii) 리만 적분 가능한 함수라면 그 적분값은 어떻게 구하는가?

6.2 리만 적분 가능성을 판별하는 방법. 주어진 함수의 리만 적분 가능성을 판별하는 방법은 다음과 같은 것들이 있다.

(Ⅰ) 리만 적분의 정의를 이용하는 방법.
(Ⅱ) **리만 판정법** : 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $[a,\ b]$의 분할 P가 존재하여 $U(f,\ P) - L(f,\ P) < \epsilon$을 만족시키는 것이다. Prove!
(Ⅲ) **르베그의 정리** : 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 $[a,\ b]$의 점들 중 f가 불연속인 점들의 집합의 측도가 0인 것이다.
(Ⅳ) 리만 적분과 동등한 적분의 정의를 이용하는 방법.

리만 적분 가능성에 대한 다음 문제를 풀어보자.

(i) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 단조이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보여라.

(ii) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보여라.

(iii) 유리수 집합의 특성함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $[0,\ 1]$에서 적분 불가능함을 보여라.

(iv) $D=\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in D\\ 0 & \text{if } x\notin D\end{cases}$$

로 정의된 함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$는 $[0,\ 1]$에서 적분 가능함을 보여라.

6.3 리만 적분의 기본 성질. 두 함수 $f,\ g$가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 k가 실수일 때 $f+g,\ fg,\ kf$ 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다. Prove!

(I) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(II) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

또한 $a<c<d<b$이고 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 f는 $[a,\ c],\ [c,\ b],\ [c,\ d]$에서도 적분 가능하고 다음이 성립한다.

(III) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

만약 f와 g가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $f(x)\le g(x)$이면 다음이 성립한다.

(IV) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

6.4 리만 적분의 값을 계산하는 방법. 리만 적분 가능한 함수의 적분값을 계산하는 방법은 다음과 같은 것들이 있다. (대부분 고등학교 과정에서 접했던 것들이다.)

(I) **미적분의 기본정리** : 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 F가 f의 한 부정적분이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

(II) **부분적분법** : 두 함수 $f,\ g$가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 $f',\ g'$이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(III) **변수변환** : 함수 ϕ가 $[a,\ b]$에서 연속적으로 미분 가능하고 f가 $\phi([a,\ b])$에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$$

6.5 리만 적분의 다른 정의들. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 $P=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 $[a,\ b]$의 분할이라고 하자. P의 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 점 $t_i \in [x_{i-1},\ x_i]$를 하나씩 택하여 만든 유한수열 $t=\{t_i\}$에 대하여

$$S(f,\ P,\ t)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$$

를 P와 t에 대한 f의 **리만 합**이라고 부른다. 이때 t를 P의 표집수열이라고 부른다.

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 I가 실수라고 하자. 이때 다음 세 조건은 서로 동등하다.

(Ⅰ) f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 그 적분값이 I이다.

(Ⅱ) 임의의 양수 ϵ에 대하여 $[a,\ b]$의 분할 P_ϵ이 존재하여 P_ϵ의 임의의 세련분할 P와 P의 임의의 표집수열 t에 대하여 $|S(f,\ P,\ t)-I|<\epsilon$이 성립한다.

(Ⅲ) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $[a,\ b]$의 분할 P가 $\|P\|<\delta$를 만족시킬 때마다 P의 임의의 표집수열 t에 대하여 $|S(f,\ P,\ t)-I|<\epsilon$이 성립한다. 단, $\|P\|$는 P의 성분구간의 길이 중 가장 큰 값을 나타낸다.

위와 같은 정의를 이용하면 고등학생 때 적분을 구분구적법으로 정의한 것이 타당함을 증명할 수 있다. 즉 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

6.6 특이적분. $a\in\widetilde{\mathbb{R}}$, $b\in\widetilde{\mathbb{R}}$이고 $a<b$이며 f가 $(a,\ b)$에서 정의된 실함수라고 하자.

- f가 $(a,\ b)$에서 **국소적으로 적분 가능하다**는 것은 $I\subseteq(a,\ b)$인 임의의 닫힌구간 I에 대하여 f가 I에서 적분 가능하다는 것을 의미한다.
- f가 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하다는 것은 f가 $(a,\ b)$에서 국소적으로 적분 가능하고

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}\int_c^d f(x)\,dx\right)$$

  가 유한값으로서 존재하는 것을 의미한다. 이때 위 적분을 $(a,\ b)$에서 f의 **특이적분**이라고 부른다.

특이적분이 수렴하는지 여부를 보이는 방법은 다음과 같은 것들이 있다.

(Ⅰ) 특이적분의 정의를 이용한 방법.

(Ⅱ) 특이적분의 비교 판정법.

(Ⅲ) 특이적분의 절대수렴 판정법.

(Ⅳ) 특이적분의 교대 판정법.

이들은 모두 미적분학에서 배웠던 것들이다.

제 7 장

무한급수

7.1 무한급수의 정의. 무한급수의 정의는 간단하다. $\{a_n\}$이 실수열이고 첫째항이 a_m이며 $p \geq m$일 때 다음과 같이 정의한다.

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=p}^{n} a_k \right)$$

이 무한급수가 수렴하는 경우 그 극한값을 **무한급수의 합**이라고 부른다. ['무한급수의 값'이라고 불러야 정확하지만 관용적으로 '무한급수의 합'이라고 부른다.]

무한급수에 대하여 논할 때에는 보통 두 가지 문제를 다룬다.

(i) 주어진 무한급수는 수렴하는가?
(ii) 주어진 무한급수의 합은 얼마인가?

무한급수가 수렴하는지 여부를 논할 때에는 수열의 첫째항이 어디서 시작하는지는 중요하지 않다. 왜냐하면 수열의 유한 개의 항의 값을 바꾸어도 수렴 여부는 변하지 않기 때문이다. [이러한 이유 때문에 무한급수를 나타낼 때 합 기호의 아래첨자와 위첨자를 생략하는 경우가 많다.]

재미있는 것은 무한급수의 합을 구할 때에도 수열의 첫째항이 어디서 시작하는지는 크게 중요하지는 않다는 것이다. 왜냐하면, 처음 몇 개의 항의 값에 상관없이, 중간에서부터라도 무한급수의 합을 구하는 방법을 알아내고 나면 처음 몇 개의 항의 값은 나중에 계산하여 더할 수 있기 때문이다.

7.2 무한급수의 수렴을 판정하는 방법. 기초해석학에서 다루는 무한급수에 관한 대부분의 내용은 미적분학에서 공부한 것과 크게 다르지 않다. 단, 여기서는 무한급수의 수렴을 판정하는 것 못지않게 판정법 자체를 증명하는 것도 중요하다.

7.2.1 일반항 판정법. 무한급수 $\sum a_n$이 수렴하면 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다. Prove!

7.2.2 코시 판정법. 무한급수 $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n \geq m > N$일 때마다 $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon$이 성립하는 것이다. Prove!

7.2.3 절대수렴 판정법. 절대수렴하는 무한급수는 수렴한다. Prove!

7.2.4 양항급수의 유계 판정법. 양항급수가 수렴할 필요충분조건은 부분합 수열이 유계인 것이다. Prove!

7.2.5 양항급수의 비교 판정법. 두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n \leq b_n$이 성립하고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다. Prove!

7.2.6 양항급수의 극한 비교 판정법. 두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음이 성립한다. Prove!

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n)<\infty$이고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n)>0$이고 $\sum a_n$이 수렴하면 $\sum b_n$도 수렴한다.

7.2.7 양항급수의 적분 판정법. 함수 f가 $[1,\ \infty)$에서 정의된 감소하는 실함수이고 $a_n=f(n)$일 때, $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 특이적분 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하는 것이다. Prove!

7.2.8 p-급수 판정법. $\sum \frac{1}{n^p}$이 수렴할 필요충분조건은 $p>1$인 것이다. Prove!

7.2.9 양항급수의 응집 판정법. $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열일 때, $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $\sum 2^n a_{2^n}$이 수렴하는 것이다.

7.2.10 양항급수의 비 판정법. $\{a_n\}$의 모든 항이 양수일 때 다음이 성립한다. Prove!

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n)<1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n)>1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

7.2.11 양항급수의 제곱근 판정법. $\{a_n\}$이 양항수열이고 $\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$일 때 다음이 성립한다. Prove!

(i) $\rho<1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.

(ii) $\rho>1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

7.2.12 교대급수 판정법. $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열일 때 교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

이 수렴할 필요충분조건은 $\{a_n\}$이 0에 수렴하는 것이다. 특히 교대급수의 오차의 한계 공식은 다음과 같다.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n-s_n\right|\le a_{n+1}$$

여기서 s_n은 첫째항부터 n항까지의 부분합을 나타낸다.

이 외에도 많이 있지만 학부 과정에서는 이 정도면 충분하다. 써놓고 나니 무척 많은 것 같은데, 증명 과정을 이해하고 나면 굳이 외우지 않아도 저절로 기억하게 되는 당연한 정리들이다.

7.3 무한급수의 합. 수렴하는 무한급수의 합을 알고자 하는 것은 자연스러운 일이다. 특히 순수수학이 아닌 수학이 응용되는 분야에서는 더욱 그렇다. 여기서는 간단한 몇 가지 성질을 살펴보자.

7.3.1. 두 무한급수의 합과 차. $\sum a_n$과 $\sum b_n$이 수렴하는 무한급수이면 다음이 성립한다.

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \ \sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$$

7.3.2 두 무한급수의 곱. 두 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$이 수렴하고, 둘 중 하나 이상이 절대수렴하면 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

이 곱을 무한급수의 **코시 곱**이라고 부른다.

7.3.3 무한급수의 재배열. 무한급수 $\sum a_n$이 절대수렴하면 이 무한급수를 재배열해도 같은 값에 수렴한다. 만약 무한급수 $\sum b_n$이 조건수렴하면 이 무한급수를 재배열하여 어떤 값에든 수렴하도록 할 수 있다.

7.3.4 거듭제곱급수를 이용한 무한급수의 계산. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하기 위해 함수 f를

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

으로 정의하고 $f(x)$의 수렴구간을 구한다. 만약 $f(x)$의 수렴구간의 폐포가 1을 원소로 가지면 미분과 적분을 이용하여 $f(x)$의 유한형태를 구한 뒤 $f(1)$의 값을 구한다. [이 방법의 정당성은 '실해석적 함수' 단원에서 밝혀진다.]

제 8 장

실해석적 함수

8.1 함수열의 뜻. 각 항이 함수인 수열을 함수열이라고 부른다. 즉 D가 실수집합의 부분집합일 때, 모든 항이 $\mathbb{R}^D$인 수열을 D 위에서의 **실함수열** 또는 간단히 **함수열**이라고 부른다. 실수열과 마찬가지로 함수열도 $\{f_n\}$과 같이 나타낸다.

8.2 함수열의 수렴. $\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자. 만약 D 위에서 정의된 함수 f가 존재하여 임의의 $x \in D$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

를 만족시키면 '**$\{f_n\}$은 f에 수렴한다**'라고 말한다. 이때 f를 $\{f_n\}$의 **극한함수**라고 부른다. 함수열의 수렴을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall x \in D \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ [(n > N) \ \rightarrow \ (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon)]$$

$\{f_n\}$이 f에 수렴하는 것을 다음과 같이 나타낸다.

$$f_n \ \rightarrow \ f \quad \text{또는} \quad \lim_{n \to \infty} f_n = f$$

함수급수에 대해서도 마찬가지로 정의한다.

이제 다음 문제를 풀어보자. (단, f는 $\{f_n\}$의 극한함수를 나타낸다.)

(i) $f_n(x) = |\cos x|^n$일 때 $\mathbb{R}$에서 $\{f_n\}$의 극한함수를 구하여라.

(ii) $x \in [0, \ \pi]$에 대하여 $f_n(x) = \sin^n x$라고 하자. 이때 f_n과 f의 미분 가능성을 비교하여라.

(iii) $\{x_k\}$를 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{Q} \cap (0, \ 1)$로의 일대일대응인 수열이라고 하자. 그리고 $[0, \ 1]$에서

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 정의되었다고 하자. 이때 f_n과 f의 적분 가능성을 비교하여라.

(iv) $x \in [0, \ 1]$에 대하여 $f_n = x^n/n$이라고 하자. 이때 f_n의 도함수와 f의 도함수를 비교하여라.

(v) $[0, \ 1]$에서 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있을 때, f_n의 적분값과 f의 적분값을 비교하여라.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

위 문제로부터 함수열의 극한은 미적분과 관련하여 다음과 같은 약점을 가지고 있다는 사실을 알 수 있다.

(Ⅰ) $f_n \ \rightarrow \ f$이고 f_n이 연속이더라도 f는 연속이 아닐 수 있다.

(Ⅱ) $f_n \ \rightarrow \ f$이고 f_n이 미분 가능하더라도 f는 미분 불가능할 수 있다.

(Ⅲ) $f_n \ \rightarrow \ f$이고 f_n이 적분 가능하더라도 f는 적분 불가능할 수 있다.

(Ⅳ) $f_n \ \rightarrow \ f$이고 f_n과 f가 모두 적분 가능하더라도 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx$일 수 있다.

8.3 함수열의 평등수렴. $\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이고 f가 D 위에서의 함수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$이고 $x \in D$일 때마다 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$이 성립하면 '$\{f_n\}$은 f에 **평등수렴**한다'고 말한다. 이것을 기호로는 $f_n \rightrightarrows f$ 또는 $f_n \Rightarrow f$로 나타낸다. 평등수렴과 구분하기 위하여 8.2에서 정의한 함수열의 수렴을 '**점별수렴**'이라고 부르기도 한다.

함수열의 평등수렴을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in D : \ [(n > N) \rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon)]$$

D에서 함수 f의 **상한노름**을 $\|f\|_D = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$로 정의하면 함수열의 평등수렴은 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$$f_n \rightrightarrows f\text{일 필요충분조건은 } \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_D = 0\text{인 것이다.}$$

평등수렴은 다음과 같은 중요한 성질을 가진다.

(Ⅰ) $[a,\ b]$ 위에서 $f_n \rightrightarrows f$이고 f_n이 연속함수이면 f도 연속함수이다. Prove!

(Ⅱ) $[a,\ b]$ 위에서 $f_n \rightrightarrows f$이고 f_n이 적분 가능하면 f도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(Ⅲ) $[a,\ b]$ 위에서 f_n이 미분 가능하고 $[a,\ b]$의 한 점에서 $\{f_n\}$이 수렴하며 $f_n{}' \rightrightarrows g$이고 g가 연속함수이면, $\{f_n\}$은 미분 가능한 함수에 평등수렴하며 $f' = g$가 성립한다.

함수급수의 경우 부분합수열을 함수열로 생각하면 위 정리를 마찬가지로 적용할 수 있다.

이제 다음 문제를 풀어보자.

(ⅰ) $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) = nx^2(1 + nx)^{-1}$로 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 평등수렴함을 보여라.

(ⅱ) $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) = x^n$으로 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 평등수렴하지 않음을 보여라.

(ⅲ) $\mathbb{R}$에서 다음과 같이 정의된 함수 f의 도함수를 구하여라.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

8.4 함수급수의 평등수렴 판정법. 실수열의 무한급수에 대해서 수렴에 관한 다양한 판정법이 존재하는 것처럼 함수열의 무한급수에 대해서도 평등수렴에 관한 다양한 판정법이 존재한다.

(Ⅰ) 일반항 판정법 : D에서 $\sum f_n$이 평등수렴하면 $f_n \rightrightarrows 0$이다.

(Ⅱ) 절대수렴 판정법 : D에서 $\sum |f_n|$이 평등수렴하면 $\sum f_n$도 평등수렴한다.

(Ⅲ) M-판정법 : $\{M_n\}$이 실수열이고 임의의 $x \in D$와 n에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$이 성립하며 무한급수 $\sum M_n$이 수렴하면 $\sum f_n$은 D에서 평등수렴한다.

(Ⅳ) 디니의 정리 : 긴밀집합 위에서 연속함수열이 연속함수에 단조수렴하면 그 수렴은 평등수렴이다.

(Ⅴ) 교대급수 판정법 : D에서 양항단조함수열 $\{f_n\}$이 0에 평등수렴하면 $\sum (-1)^n f_n$은 D에서 평등수렴한다.

8.5 거듭제곱급수. 수열 $\{a_n\}$과 실수 x_0에 대하여

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

라고 하자. 이때 $\{s_n\}$의 극한 $\lim_{n\to\infty} s_n$을 중심이 x_0이고 계수가 $\{a_n\}$인 **거듭제곱급수**라고 부른다.

8.5.1 거듭제곱급수의 수렴반경. 거듭제곱급수 $\sum a_n (x-x_0)^n$에 대하여 집합

$$C = \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ converges} \right\}$$

를 이 거듭제곱급수의 **수렴구간**이라고 부르며, 수렴구간의 내부를 이 거듭제곱급수의 **수렴영역**이라고 부른다. 또한

$$R = \sup\{ |x - x_0| \mid x \in C \}$$

를 이 거듭제곱급수의 **수렴반경**이라고 부른다.

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경과 관련하여 다음 세 가지 경우만 존재한다.

㈀ $R=0$인 경우 주어진 거듭제곱급수는 $x=0$일 때에만 수렴한다.

㈁ $R=\infty$인 경우 주어진 거듭제곱급수는 임의의 실수 x에 대하여 수렴한다.

㈂ $0<R<\infty$인 경우 주어진 거듭제곱급수의 수렴구간은 다음 중 하나이다.

$$(-R,\ R),\ [-R,\ R),\ (-R,\ R],\ [-R,\ R]$$

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴 반경 R를 구하는 공식으로 다음과 같은 것들이 있다.

(Ⅰ) 비 판정법 공식 : $R = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

(Ⅱ) 코시-아다마르 공식 : $R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$

따라서 거듭제곱급수의 수렴구간을 구하려면 먼저 수렴 반경을 구한 뒤 수렴구간의 끝점에서 수렴 여부를 직접 계산해야 한다.

8.5.2 아벨의 정리와 거듭제곱급수의 미적분. 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$이 구간 $[a,\ b]$에서 수렴하고 $a<b$이면 $\sum a_n x^n$은 $[a,\ b]$에서 평등수렴한다. 이 명제를 **아벨의 정리**라고 부른다.

아벨의 정리에 의하여 다음과 같은 유용한 결과를 얻는다.

(Ⅰ) $\sum a_n x^n$이 $[a,\ b]$에서 수렴하면 $f(x) = \sum a_n x^n$으로 정의된 함수 f는 $[a,\ b]$에서 연속이다.

(Ⅱ) 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$이 $[a,\ b]$에서 수렴하면 $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx \right)$.

(Ⅲ) 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경이 $R>0$이고 $|x|<R$이면 $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} a_n x^n \right)$.

8.6 해석적 함수. 거듭제곱급수로 정의된 함수를 미분하거나 적분할 때에는 항별로 미분하거나 적분하면 된다. 이것은 거듭제곱급수로 정의된 함수는 차수가 무한인 거대한 다항함수처럼 다룰 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 함수를 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다면 그러한 함수는 극한이나 미적분과 관련하여 훨씬 더 유용하게 사용될 수 있다.

실함수 f가 열린집합 D에서 정의되어 있고 $x_0 \in D$라고 하자. 이때 f가 **점 x_0에서 실해석적**이라는 것은 양수 δ가 존재하여 $B_\delta(x_0) \cap D$에서 f가 중심이 x_0인 거듭제곱급수로 표현된다는 것을 의미한다.

만약 실함수 f가 D의 모든 점에서 실해석적이면 'f는 **D에서 실해석적이다**'라고 말한다. 실해석적 함수를 간단히 해석적 함수라고 부른다. D에서 실해석적인 함수들의 모임을 $C^\omega(D)$로 나타낸다.

함수 f가 x_0에서 해석적이면 x_0이 중심인 f의 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

의 계수는

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

으로서 유일하게 결정된다. 그러므로 f가 x_0에서 해석적이면

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

으로 나타난다. 이 거듭제곱급수를 중심이 x_0인 **테일러 급수**라고 부른다. 특히 중심이 0인 테일러 급수를 **맥클라린 급수**라고 부른다.

8.6.1 해석적 함수의 조건. C^∞급 함수가 모두 해석적 함수가 되는 것은 아니다. 예를 들어

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

으로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 $\mathbb{R}$에서 C^∞급이지만 0에서 해석적이 아니다. Prove! 즉 $C^\omega \subsetneq C^\infty$이다. 그러므로 어떠한 함수가 해석적 함수가 되는지 알아보는 것이 필요하다.

(Ⅰ) $f \in C^\infty(a,\ b)$이고 양수 M이 존재하여 임의의 $x \in (a,\ b)$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n$을 만족시키면 f는 $(a,\ b)$에서 해석적이다.

(Ⅱ) 거듭제곱급수로 정의된 함수는 수렴영역의 모든 점에서 해석적이다.

(Ⅲ) **베른슈타인의 정리** : $f \in C^\infty(a,\ b)$이고 임의의 $x \in (a,\ b)$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(x) \ge 0$이 성립하면 f는 $(a,\ b)$에서 해석적이다.

8.6.2 해석적 함수의 유일성. 함수 f가 I에서 해석적이고 함수 g가 J에서 해석적이라고 하자. 만약 $a < b$이고 $(a,\ b) \subseteq I \cap J$이며 $(a,\ b)$ 위에서 $f = g$이면 $I \cap J$ 위에서 $f = g$가 성립한다.

즉 공집합이 아닌 열린집합 위에서 정의된 해석적 함수는 그 집합 바깥으로 확장하였을 때 확장함수가 유일하게 결정된다.

8.7 여러 가지 함수의 해석적 정의. 지수함수, 삼각함수를 다음과 같이 해석적으로 정의한다.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

이렇게 정의된 함수들은 미적분학에서 공부했던 지수함수와 삼각함수의 성질을 모두 가지게 된다.

8.8 해석적 함수의 응용. 해석적 함수는 실해석학보다 복소해석학이나 함수해석학에서 더 많이 응용된다. 기초해석학에서 배우는 실해석적 함수는 다른 분야에서 다루는 해석적 함수의 개념을 이해하기 위한 기초라고 할 수 있다. 여기서는 간단한 예를 살펴보자.

(i) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$일 때 f를 닫힌 형태로 구하여라.

(ii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$일 때 $\lim_{x \to 1-} f(x)$를 구하여라.

(iii) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$을 이용하여 등식 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$을 유도하여라.

(iv) 실수 α와 $|x| < 1$인 x에 대하여 등식 $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$을 유도하여라.

8.9 복소함수로의 확장. 해석적 함수의 성질을 이용하면 여러 가지 실함수의 정의역을 복소수 집합으로 확장할 수 있다. 예컨대 지수함수와 삼각함수의 거듭제곱급수를 이용하면 실수 θ에 대하여

$$e^{\theta \boldsymbol{i}} = \cos\theta + \boldsymbol{i} \sin\theta$$

라고 정의할 수 있다. (여기서 $\boldsymbol{i}$는 허수단위이다.) 따라서 실수 a, b에 대하여

$$e^{a+b\boldsymbol{i}} = e^a(\cos b + \boldsymbol{i} \sin b)$$

를 얻는다. 또한

$$\sin z = \frac{e^{z\boldsymbol{i}} - e^{-z\boldsymbol{i}}}{2\boldsymbol{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{z\boldsymbol{i}} + e^{-z\boldsymbol{i}}}{2}$$

도 유도할 수 있다.

제 9 장

거리공간

9.1 거리공간의 개념. x와 y가 유클리드 공간 $\mathbb{R}^p$의 두 점이고

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p),\quad y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p)$$

라고 하자. 이때 x와 y 사이의 거리는

$$\| x-y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i-y_i)^2}$$

이다. x와 y 사이의 거리를 $\rho(x,\ y)$로 $X=\mathbb{R}^p$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\forall x,\ y \in X:\ \rho(x,\ y) \geq 0$

(ii) $\forall x,\ y \in X:\ [\,\rho(x,\ y)=0 \ \longleftrightarrow\ x=y\,]$

(iii) $\forall x,\ y \in X:\ \rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$

(iv) $\forall x,\ y,\ z \in X:\ \rho(x,\ y) \leq \rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$

만약 X가 집합이고 ρ가 $X \times X$로부터 $\mathbb{R}$ 로의 함수이며 위의 네 가지 조건을 모두 만족시키면 ρ를 X의 **거리함수**라고 부른다. 집합 X에 거리함수 ρ가 주어졌을 때 $(X,\ \rho)$를 **거리공간**이라고 부른다. 별다른 언급 없이 'X가 거리공간이다'라고 하면 X에 적절한 거리함수가 주어진 것으로 여긴다.

이제 점 사이의 거리는 유클리드 공간에서뿐만 아니라 거리함수가 주어진 임의의 집합에서 생각할 수 있다. 그러므로 열린집합, 닫힌집합, 수열의 극한, 함수의 극한 등에 관한 개념도 더 다양한 공간에서 할 수 있다.

9.1.1 유클리드 거리공간. 유클리드 벡터공간 $\mathbb{R}^p$의 점 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p)$에 대하여

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i-y_i)^2}$$

로 정의된 거리함수 ρ가 주어진 거리공간 $\mathbb{R}^p$를 **유클리드 거리공간**이라고 부른다. 이 거리공간을 **보통거리공간**이라고 부르기도 한다.

9.1.2 이산거리공간. X가 집합이고 X의 점 $x,\ y$에 대하여

$$\rho(x,\ y)=\begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

로 정의된 거리함수 ρ가 주어진 거리공간 X를 **이산거리공간** 또는 **자명한 거리공간**이라고 부른다.

9.1.3 $C[a,\ b]$. $a<b$일 때 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 실함수들의 모임을 $C[a,\ b]$라고 하자. $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f,\ g$에 대하여

$$\rho(f,\ g)=\| f-g \| = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,\ b]\}$$

로 정의된 거리함수 ρ를 **평등거리**라고 부른다.

9.2 열린집합과 닫힌집합. $(X,\ \rho)$가 거리공간이고 $x \in X,\ r > 0$일 때 다음과 같이 정의한다.

- $B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x,\ y) < r\}$
- $B_r{}'(x) = \{y \in X \mid 0 < \rho(x,\ y) < r\}$
- $\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x,\ y) \le r\}$
- $\overline{B}_r{}' = \{y \in X \mid 0 < \rho(x,\ y) \le r\}$

$(X,\ \rho)$가 거리공간이고 $E,\ F,\ G$가 X의 부분집합이며 $x \in X$일 때 다음과 같이 정의한다.

- x가 E의 **내점**이라는 것은 $\exists\, r > 0 : B_r(x) \subseteq E$를 의미한다. E의 내점들의 모임을 E의 **내부**라고 부르고 E^o로 나타낸다.
- x가 E의 **외점**이라는 것은 $\exists\, r > 0 : B_r(x) \subseteq E^c$를 의미한다. E의 외점들의 모임을 E의 **외부**라고 부르고 $\mathrm{ext}E$로 나타낸다.
- x가 E의 **경계점**이라는 것은 x가 E의 내점도 아니고 외점도 아닌 것을 의미한다.
- $G = G^o$일 때 G를 **열린집합**이라고 부른다.
- $F^c = X \setminus F$가 열린집합일 때 F를 **닫힌집합**이라고 부른다.
- E를 포함하는 닫힌집합 중 가장 작은 것을 E의 **닫개** 또는 **폐포**라고 부르고 $\overline{E}$로 나타낸다.
- $\forall\, r > 0 : B_r{}'(x) \cap E \ne \varnothing$일 때 x를 E의 **집적점**이라고 부른다. E의 집적점들의 모임을 E의 **도집합**이라고 부르고 E'으로 나타낸다.

열린집합과 닫힌집합은 다음과 같이 중요한 성질을 가진다.

(Ⅰ) 임의 개수의 열린집합의 합집합은 열린집합이다.
(Ⅱ) 유한 개수의 열린집합의 교집합은 열린집합이다.
(Ⅲ) 거리공간 전체와 공집합은 그 공간 내에서 열린집합인 동시에 닫힌집합이다.

9.3 거리공간에서의 극한. 거리공간에서의 극한은 실수계에서의 극한과 비슷하게 정의된다.

9.3.1 수열의 극한. $(X,\ \rho)$가 거리공간이고 $\{x_n\}$이 X의 수열이며 $\lambda \in X$라고 하자. 만약

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \left[\, n > N \ \rightarrow\ \rho(x_n,\ \lambda) < \epsilon \,\right]$$

이 성립하면 $\{x_n\}$은 λ에 **수렴**한다고 말하고 $x_n \rightarrow \lambda$ 또는 $\lim_{n \to \infty} x_n = \lambda$로 나타낸다.

9.3.2 함수의 극한. $(X,\ \rho),\ (Y,\ \tau)$가 거리공간이고 $D \subseteq X$이며 f가 D로부터 Y로의 함수이고 $a \in D'$, $\lambda \in Y$라고 하자. 만약

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D : \left[\, 0 < \rho(x,\ a) < \delta \ \rightarrow\ \tau(f(x),\ \lambda) < \epsilon \,\right]$$

이 성립하면 f는 a에서 λ에 **수렴**한다고 말하고 '$x \rightarrow a$일 때 $f(x) \rightarrow \lambda$' 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$로 나타낸다.

9.3.3 연속함수. $(X,\ \rho)$, $(Y,\ \tau)$가 거리공간이고 $D \subseteq X$이며 f가 D로부터 Y로의 함수이고 $a \in D$라고 하자. 만약

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in D : [\,\rho(x,\ a) < \delta\ \rightarrow\ \tau(f(x),\ f(a)) < \epsilon\,]$$

이 성립하면 'f는 a에서 **연속**이다'라고 말한다. $E \subseteq D$이고 f가 E의 모든 점에서 연속이면 'f는 E에서 연속이다'라고 말한다. 정의역의 모든 점에서 연속인 함수를 **연속함수**라고 부른다.

9.4 유클리드 거리공간. 실수계에서 만난 극한의 여러 가지 성질은 유클리드 거리공간에서도 만날 수 있다.

9.4.1 좌표별 극한. $\mathbb{R}^p$가 유클리드 거리공간이고 $\{x_n\}$이 $\mathbb{R}^p$의 수열이며 $\lambda \in \mathbb{R}^p$라고 하자. 각 n에 대하여 $x_n = \left(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(p)}\right)$, $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p)$라고 하자. 이때 $x_n \rightarrow \lambda$일 필요충분조건은 p 이하의 임의의 자연수 i에 대하여 $x_n^{(i)} \rightarrow \lambda_i$인 것이다.

함수의 극한에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다. $D \subseteq \mathbb{R}^p$이고 f가 D로부터 $\mathbb{R}^q$로의 함수이며 $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$라고 하자. 또한 f의 i번째 좌표를 f_i라고 하자. 즉 $f = (f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_q)$, $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_q)$라고 하자. 이때 $x \rightarrow a$일 때 $f(x) \rightarrow \lambda$일 필요충분조건은 $x \rightarrow a$일 때 $1 \le i \le q$인 임의의 자연수 i에 대하여 $f_i(x) \rightarrow \lambda_i$인 것이다.

9.4.2 코시 수열. $(X,\ \rho)$가 거리공간이고 $\{x_n\}$이 X의 수열이라고 하자. 만약

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,N \in \mathbb{N}\ \forall\,m,\ n \in \mathbb{N} : [\,(m > N\ \wedge\ n > N)\ \rightarrow\ \rho(x_m,\ x_n) < \epsilon\,]$$

이 성립하면 $\{x_n\}$을 **코시 수열**이라고 부른다. 유클리드 거리공간에서 수열이 수렴할 필요충분조건은 코시 수열인 것이다. 이러한 관점에서 유클리드 거리공간은 완비인 거리공간이다.

9.5 긴밀집합. K가 거리공간 X의 부분집합이라고 하자. 만약 K를 덮는 임의의 열린덮개가 K를 덮는 유한부분덮개를 가지면 K를 **긴밀집합**이라고 부른다.

거리공간에서 긴밀집합은 모두 유계이고 닫힌집합이다. 그러나 유계이면서 닫힌집합이 항상 긴밀집합인 것은 아니다. 예를 들어 보통거리공간 $X = \mathbb{Q}$의 부분집합 $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \le 3\}$은 유계이고 닫힌집합이지만 긴밀집합이 아니다.

유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^p$에서는 주어진 집합이 긴밀집합일 필요충분조건은 유계이고 닫힌집합인 것이다. 이 정리를 **하이네-보렐 정리**라고 부른다.

9.6 연결집합. X가 거리공간이고 $E \subseteq X$라고 하자. 만약 서로소인 두 열린집합 U, V가 존재하여 U, V가 모두 E와 만나고 $E \subseteq U \cup V$이면 E를 **분할된 집합** 또는 **비연결집합**이라고 부른다. 그리고 분할되지 않은 집합을 **연결집합**이라고 부른다.

X, Y가 거리공간이고 $D \subseteq X$이며 $f : D \rightarrow Y$가 연속함수이라고 하자. 만약 D가 연결집합이면 $f(D)$도 연결집합이다. 즉 거리공간에서 연속함수는 집합의 연결성을 보존한다.

9.7 완비공간. X가 거리공간이라고 하자. 만약 X의 모든 코시 수열이 X의 점에 수렴하면 X를 **완비거리공간** 또는 간단히 **완비공간**이라고 부른다.

실수계에서와 마찬가지로 유클리드 거리공간 $\mathbb{R}^p$에서는 수열이 수렴할 필요충분조건은 코시 수열인 것이다. 그러므로 $\mathbb{R}^p$는 완비거리공간이다.

그러나 이것이 모든 거리공간에서 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 보통거리공간 $X=\mathbb{Q}$를 생각해보자. 자연수 n에 대하여 $e_n=(1+1/n)^n$로 정의된 수열 $\{e_n\}$은 유리수열이므로 X의 수열이다. 또한 $\{e_n\}$은 $\mathbb{R}$에서 코시 수열이므로 $\mathbb{Q}$에서도 코시 수열이다. 그러나 $\{e_n\}$은 오일러 상수 e에 수렴하므로 $\{e_n\}$은 $\mathbb{Q}$의 점에 수렴하지 않는다. 그러므로 $\mathbb{Q}$는 완비거리공간이 아니다.

9.7.1 거리공간의 완비화. 거리공간 $(X,\ \rho)$가 완비거리공간이 아닐 때 $X\subseteq X^*$이고, X^* 내에서 $\overline{X}=X^*$를 만족시키면서 완비인 거리공간 X^*를 만들 수 있다. 즉 X이 모든 코시 수열의 모임을 C라고 하자. 이때 C의 원소 중 $\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ :\ [\,n>N\ \rightarrow\ \rho(x_n,\ y_n)<\epsilon\,]$을 만족시키는 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$을 서로 동등한 것으로 간주한다. 이러한 동등관계를 R라고 하고 동등류 $X^*=C/R$를 생각한다. X^*의 두 원소 $x=\overline{\{x_n\}}$, $y=\overline{\{y_n\}}$에 대하여

$$\rho^*(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$$

라고 정의하면 ρ^*는 X^*에서의 거리함수가 된다. $\overline{\{x_n\}}\in X^*$이고 $\{x_n\}$이 X의 한 점 x에 수렴하는 경우 $\overline{\{x_n\}}$을 x와 같은 것으로 생각한다. 만약 $\overline{\{x_n\}}$이 X의 어떠한 점에도 수렴하지 않으면 $\overline{\{x_n\}}$ 그 자체를 하나의 점으로 생각한다. 이러한 관점에서 X는 X^*의 부분거리공간이다. 더욱이 X^*는 X의 코시수열로 이루어진 집합이므로 $\overline{X}=X^*$가 성립한다.

9.7.2 범주 정리. X가 거리공간이고 A, B가 X의 부분집합이라고 하자. 만약 $\overline{A}=X$이면 A는 ***X*에서 조밀하다**고 말한다. 만약 $(\overline{B})^o=\varnothing$이면 B는 ***X*의 어느곳에서도 조밀하지 않다**고 말한다.

$E\subseteq X$라고 하자. E가 X의 어느곳에서도 조밀하지 않은 집합들의 가산합집합으로 표현될 수 있으면 'E는 X에서 **제 1 범주의 집합**이다'라고 말한다. E가 X에서 제 1 범주의 집합이 아니면 E는 X에서 **제 2 범주의 집합**이라고 말한다.

예를 들어 보통거리공간 $\mathbb{Q}$는 제 1 범주의 집합이다. 왜냐하면 $\mathbb{Q}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$이기 때문이다.

또한 보통거리공간 $\mathbb{R}$에서 $\{0\}$은 제 1 범주의 집합이다 그러나 보통거리공간 $\{0\}$에서 $\{0\}$은 제 2 범주의 집합이다. 왜냐하면 $\{0\}$의 부분집합 중 어느곳에서도 조밀하지 않은 것은 $\varnothing$ 뿐이기 때문이다.

이처럼 거리공간은 제 1 범주의 집합일 수도 있고 제 2 범주의 집합일 수도 있다. 그러나 공집합이 아닌 모든 완비거리공간 X는 X에서 제 2 범주의 집합이다. 이 명제를 **배어**(Baire)**의 범주 정리**라고 부른다.

제 10 장

벡터함수의 미적분

10.1 편미분. $D \subseteq \mathbb{R}^p$이고 f가 D로부터 $\mathbb{R}^q$로의 함수이며 $x \in D$라고 하자. 점 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$가 움직일 때마다 함숫값 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_q(x))$도 움직인다. 이때 각 x_i의 움직임에 따라 $f_j(x)$가 어떻게 움직이는지 관찰할 수 있으므로 대응

$$x_i \mapsto f_j(x), \quad 1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q$$

도 함수이다. 특히 이 대응은 실수를 실수에 대응시키는 함수이므로 이 함수의 미분을 생각할 수 있다. D의 점 a에서 이 함수의 **편미분계수**를

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(a + he_i) - f_j(a)}{h}$$

로 정의한다. 단, e_i는 i번째 성분만 1이고 다른 성분은 0인 벡터이다. 또한

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

로 정의한다. 정의에 의하면 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \cdots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a) \right)$$

10.2 전미분. 실함수 f가 a에서 미분 가능하다는 것은 실수 $f'(a)$가 존재하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

를 만족시키는 것을 의미한다. 위 식은

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

과 동등하다. 여기서 $h \mapsto f'(a)h$는 h를 $f'(a)h$에 대응시키는 선형사상이다. 그러므로 실함수 f가 a에서 미분 가능하다는 것은 $T(x) = mx$ 꼴로 나타낼 수 있는 선형사상 T가 존재하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0$$

을 만족시키는 것과 같다. 이것은 유클리드 공간에서 정의된 함수에도 적용할 수 있다. $V \subseteq \mathbb{R}^p$이고 $a \in V$일 때, 함수 $f : V \to \mathbb{R}^q$가 a에서 **미분 가능하다**는 것은 $\mathbb{R}^p$로부터 $\mathbb{R}^q$로의 선형사상 T가 존재하여 다음 등식을 만족시키는 것을 의미한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} = 0 \tag{1}$$

여기서 (1)의 T는 $\mathbb{R}^p$로부터 $\mathbb{R}^q$로의 선형사상이므로 T의 표현행렬은 $q\times p$ 행렬이다. 이 표현행렬을 a에서 f의 **전미분**이라고 부르고 $Df(a)$로 나타낸다.

$V\subseteq \mathbb{R}^p$이고 $a\in V$일 때, 함수 $f : V \to \mathbb{R}^q$가 a에서 미분 가능하면 a에서 f의 모든 일계편미분계수가 존재한다. 또한 a에서 f의 전미분은 유일하게 존재하며 전미분은 다음과 같이 계산된다.

$$Df(a)=\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]_{q\times p} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$$

10.3 역함수 정리와 음함수 정리. D가 $\mathbb{R}^p$의 열린부분집합이 f가 D로부터 $\mathbb{R}^p$로의 함수이며 $a\in D$라고 하자. 이때 $\Delta_f(a) = \det(Df(a))$를 a에서 f의 **야코비안**이라고 부른다.

D가 $\mathbb{R}^p$의 열린부분집합이 f가 D로부터 $\mathbb{R}^q$로의 함수이며 $a\in D$라고 하자. 점 a에서 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ q\}$의 부분집합 $\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p\}$에 의하여 생성된 f의 **편야코비안**을

$$\frac{\partial\left(f_{k_1},\ \cdots,\ f_{k_n}\right)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)}(a) := \det\left[\frac{\partial f_{k_j}}{\partial x_i}(a)\right]_{p\times p} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{k_1}}{\partial x_1}(\mathrm{a}) & \cdots & \frac{\partial f_{k_1}}{\partial x_p}(\mathrm{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k_p}}{\partial x_1}(\mathrm{a}) & \cdots & \frac{\partial f_{k_p}}{\partial x_p}(\mathrm{a}) \end{bmatrix}$$

로 정의한다. $p=q$인 경우 편야코비안은 야코비안 $\Delta_f(a)$와 동일하다.

편의상 $\mathbb{R}^{p+q}$의 벡터 $(x_1,\ \cdots,\ x_p,\ t_1,\ \cdots,\ t_q)$를 $(x,\ t)$로 나타낸다.

10.3.1 역함수 정리. D가 $\mathbb{R}^p$의 열린부분집합이 f가 D로부터 $\mathbb{R}^p$로의 함수이며 $a\in D$라고 하자. 만약 f가 D에서 C^1급인 함수이고 $\Delta_f(a)\neq 0$이면 a를 원소로 갖는 열린집합 W가 존재하여 세 조건

(i) f는 W에서 일대일대응이다,

(ii) f^{-1}는 $f(W)$에서 C^1급이다,

(iii) 각 $y\in f(W)$에 대하여 $D(f^{-1})(y)=[Df(f^{-1}(y))]^{-1}$

를 모두 만족시킨다. 여기서 $[\ ]^{-1}$은 역행렬을 의미한다.

10.3.2 음함수 정리. D가 $\mathbb{R}^{p+q}$의 열린집합이고 $F=\left(F_1,\ \cdots,\ F_p\right) : D \to \mathbb{R}^p$가 D에서 C^1급인 함수라고 하자 또한 $x_0\in\mathbb{R}^p$가 존재하여 $(x_0,\ t_0)\in D$에서 $F(x_0,\ t_0)=0$을 만족시킨다고 하자. 만약

$$\frac{\partial(F_1,\ \cdots,\ F_p)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_p)}(x_0,\ t_0)\neq 0$$

이면 t_0을 원소로 갖는 열린집합 $W\subseteq\mathbb{R}^q$가 존재하고 연속적으로 미분 가능한 함수 $g : W\to\mathbb{R}^p$가 유일하게 존재하여 $g(t_0)=x_0$을 만족시키며 $t\in W$에 대하여 $F(g(t),\ t)=0$을 만족시킨다.

10.4 리만 중적분. $R = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2]$ 라고 하자. $P_1 = \left\{x_0^{(1)},\ x_1^{(1)},\ \cdots,\ x_{m_1}^{(1)}\right\}$이 $[a_1,\ b_1]$의 분할이고 $P_2 = \left\{x_0^{(2)},\ x_1^{(2)},\ \cdots,\ x_{m_2}^{(2)}\right\}$이 $[a_2,\ b_2]$의 분할일 때

$$G = P_1 \otimes P_2 = \left\{ \left[x_i^{(1)},\ x_{i+1}^{(1)}\right] \times \left[x_j^{(2)},\ x_{j+1}^{(2)}\right] \,\middle|\, 1 \le i \le m_1,\ 1 \le j \le m_2 \right\}$$

를 G의 **그물선**이라고 부른다.

E가 $\mathbb{R}^2$의 유계인 부분집합이고 R가 E를 포함하는 직사각집합이며 $G = \{R_j \mid j \in J\}$가 E의 그물선이라고 하자. 이때 그물선 G에 대한 E의 **외합**을

$$V(E;\ G) = \sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} |R_j|$$

로 정의한다. 이때 G를 변수로 하는 $V(E;\ G)$의 하한을 E의 **외체적**이라고 부른다. 또한 ∂E의 체적이 0인 집합을 **조르단 영역**이라고 부른다. 조르단 영역의 외체적을 **체적**이라고 부른다.

E가 $\mathbb{R}^2$이 조르단 영역이고 $f : E \to \mathbb{R}$ 가 유계인 함수이며 R가 직사각 집합이고 $E \subseteq R$라고 하자. 또한 $G = \{R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_p\}$가 R의 그물선이라고 하자. 그리고 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$에 대하여 $f(x) = 0$이라고 하자. 이때 f의 상합과 하합을 다음과 같이 정의한다.

- E에서 그물선 G에 대한 f의 **상합** : $U(f,\ G) = \displaystyle\sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} M_j |R_j|,\quad M_j = \sup_{x \in R_j} f(x).$
- E에서 그물선 G에 대한 f의 **하합** : $L(f,\ G) = \displaystyle\sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} m_j |R_j|,\quad m_j = \inf_{x \in R_j} f(x).$

또한 상적분과 하적분을 다음과 같이 정의한다.

- E에서 f의 **상적분** : $\displaystyle\overline{\int_E} f\, dA = \inf_G U(f,\ G).$
- E에서 f의 **하적분** : $\displaystyle\underline{\int_E} f\, dA = \sup_G L(f,\ G).$

E에서 f의 상적분과 하적분이 같을 때, 그 값을 E에서 f의 **리만 중적분**이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_E f\, dA \quad \text{또는} \quad \iint_E f\, dA \quad \text{또는} \quad \iint_E f(x,\ y)\, dA$$

$p \ge 3$일 때 $\mathbb{R}^p$에서의 적분도 같은 방법으로 정의한다. 특히 $p = 3$일 때에는 위 적분을 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_E f\, dV \quad \text{또는} \quad \iiint_E f\, dV \quad \text{또는} \quad \iiint_E f(x,\ y)\, dV$$

10.5 반복적분. $R = [a,\ b] \times [c,\ d]$이고 $f : R \to \mathbb{R}$ 가 유계인 함수일 때

$$\int_a^b \int_c^d f(x,\ y)\, dy\, dx,\quad \int_c^d \int_a^b f(x,\ y)\, dx\, dy$$

를 **반복적분**이라고 부른다.

만약 각 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x,\ \cdot\ )$가 $[c,\ d]$에서 리만 적분 가능하고, 각 $y \in [c,\ d]$에 대하여 $f(\ \cdot\ ,\ y)$가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하며 f가 R에서 중적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,\ y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,\ y)\, dx\, dy$$

이 명제를 **푸비니의 정리**라고 부른다.

푸비니의 정리는 더 일반화될 수 있다. 만약 집합 E가 조르단 영역이고 실수 $a,\ b$와 두 실함수 $\phi,\ \psi$가 존재하여 $E = \{(x,\ y) \mid \phi(x) \le y \le \psi(x),\ a \le x \le b\}$로 나타낼 수 있을 때 E를 ***x*-사영 가능 영역**이라고 부른다. ***y*-사영 가능 영역**도 x와 y를 바꾸어 마찬가지로 정의한다. 만약 f가 E에서 정의된 연속인 실함수이면 다음이 성립한다.

$$\int_E f\, dA = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\, dy\, dx$$

10.6 중적분의 변수변환. 실함수 $y = f(x)$에서 x가 $x = u(t)$의 함수로 표현되고 $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$일 때 f의 적분은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt.$$

중적분에서도 이와 비슷한 정리가 있다.

D가 $\mathbb{R}^n$의 열린집합이고 $\phi : D \to \mathbb{R}^n$이 D에서 연속적으로 미분 가능한 일대일함수라고 하자. 만약 D에서 $\Delta_\phi \ne 0$이고 E가 조르단 영역이며 $\overline{E} \subseteq D$이고 $f \circ \phi$가 E에서 적분 가능하며 f가 $\phi(E)$에서 적분 가능하면 다음 등식이 성립한다.

$$\int_{\phi(E)} f(u)\, du = \int_E f(\phi(x))\, |\Delta_\phi(x)|\, dx$$

10.7 곡선과 곡면. $\mathbb{R}$에서의 적분은 닫힌구간에서만 정의했지만 $\mathbb{R}^n$에서의 적분은 더 복잡한 영역에서의 적분을 정의해야 한다. 직관적으로 $\mathbb{R}^n$의 부분집합 중 차원이 1인 것을 곡선, 차원이 2인 것을 곡면이라고 부른다.

10.7.1 곡선. $\mathbb{R}^n$의 부분집합 C가 C^p급 **곡선**이라는 것은 양의 길이를 갖는 구간 I와 I로부터 $\mathbb{R}^n$으로의 C^p급 함수 $\phi : I \to \mathbb{R}^n$이 존재하여 ϕ는 I^o에서 일대일함수이고 $C = \phi(I)$인 것을 의미한다. 이때 $(\phi,\ I)$를 C의 **매개변수화**라고 부르며 C를 $(\phi,\ I)$의 **자취**라고 부른다. 또한 등식 $x_j = \phi_j(t),\ t \in J,\ 1 \le j \le m$을 $(\phi,\ I)$에 의하여 유도된 곡선 C의 **매개변수 방정식**이라고 부른다.

C^p급 곡선 C가 **호**라는 것은 C가 매개변수화 $(\phi,\ I)$를 가지되 I는 길이가 양수인 닫힌구간 $I = [a,\ b]$로 나타나는 것이다. 이때 $\phi(a)$와 $\phi(b)$를 C의 **끝점**이라고 부른다. 또한 두 끝점이 같은 호를 **닫힌호** 또는 **닫힌 곡선**이라고 부른다.

$(\phi,\ I)$가 C^p급 곡선 C의 매개변수화라고 하자. $(\phi,\ I)$가 $t_0 \in I$에서 **매끄럽다**는 것은 $\phi'(t_0) \ne 0$인 것을 의

미한다. $(\phi,\ I)$가 **매끄럽다**는 것은 $(\phi,\ I)$가 I의 모든 점에서 배끄러운 것을 의미한다. 이때 ϕ'을 $(\phi,\ I)$에 의하여 유도된 C의 접벡터라고 부른다. C가 **매끄러운 곡선**이라는 것은 C가 매끄러운 매개변수화를 갖는 것을 의미한다. 단, 만약 C가 닫힌호이면 C의 매개변수화 $(\psi,\ [c,\ d])$에 대하여 $\psi'(c)=\psi'(d)$를 추가로 만족시켜야 한다.

두 C^p급 매개변수화 $(\phi,\ I)$, $(\psi,\ J)$가 **매끄럽게 동등하다**는 것은 두 매개변수화가 동일한 곡선의 매끄러운 매개변수화이고 C^p급 전이함수 $\tau : J \to I$가 존재하여 $\psi = \phi \circ \tau$, $\tau(J) = I$이며 임의의 $u \in J$에 대하여 $\tau'(u) \neq 0$을 만족시키는 것을 의미한다.

두 매개변수화 $(\phi,\ I)$와 $(\psi,\ J)$가 **방향동등**이라는 것은 두 매개변수화가 매끄럽게 동등하고 이들의 추이함수 $\tau : J \to I$가 임의의 $u \in J$에 대하여 $\tau'(u) > 0$을 만족시키는 것을 의미한다. 만약 방향동등이 아니면 '방향이 반대이다'라고 말한다.

10.7.2 곡면. 집합 $E \subseteq \mathbb{R}^n$이 n차원 영역이라는 것은 공집합이 아니고 열린집합이며 연결집합인 n차원 조르단영역 V가 존재하여 $E = \overline{V}$를 만족시키는 것을 의미한다.

$S \subseteq \mathbb{R}^3$이 C^p급 **곡면**이라는 것은 2차원 영역 E와 E에서 C^p급이고 E^o에서 일대일인 함수 $\phi : E \to \mathbb{R}^3$이 존재하여 $S = \phi(E)$를 만족시키는 것이다. 이때 ϕ와 E의 순서쌍 $(\phi,\ E)$를 S의 **매개변수화**라고 부르며 S를 $(\phi,\ E)$의 **자취**라고 부르고 등식

$$x = \phi_1(u,\ v),\ y = \phi_2(u,\ v),\ z = \phi_3(u,\ v),\quad (u,\ v) \in E$$

를 $(\phi,\ E)$에 의해 유도된 S의 **매개변수 방정식**이라고 부른다.

곡면 S가 E 위에서의 **양함수로 정의된 곡면**이라는 것은 E가 2차원 영역이고 E 위에서의 C^p급 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 존재하여 S가 $x = f(y,\ z)$ 또는 $y = f(x,\ z)$ 또는 $z = f(x,\ y)$의 그래프로 표현되는 것을 의미한다.

S가 C^p급 곡면이고 매개변수화 $(\phi,\ E)$를 가진다고 하자. 그리고 $(u_0,\ v_0) \in E^o$라고 하자. 만약 $\phi = (\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$이면 음함수 정리에 의하여 $(u_0,\ v_0)$에서 ϕ의 편야코비안 중 영이 아닌 것이 하나 이상 존재한다. 즉 만약 적당한 $i \neq j$에 대하여

$$\Delta_{\phi_i,\ \phi_j}(u_0,\ v_0) \coloneqq \frac{\partial(\phi_i,\ \phi_j)}{\partial(u,\ v)}(u_0,\ v_0) \neq (0,\ 0,\ 0) \tag{2}$$

이면 양함수로 정의되는 C^p급 곡면 $(\psi,\ B)$가 존재하여 $(x_0,\ y_0,\ z_0) \coloneqq \phi(u_0,\ v_0) \in \psi(B) \subseteq \psi(E)$를 만족시킨다. 양함수로 정의된 미분 가능한 곡면은 접평면을 가지므로, 만약 적당한 $i \neq j$와 $(x_0,\ y_0,\ z_0) = \phi(u_0,\ v_0)$에 대하여 (2)가 성립하면 S는 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 접평면을 가진다.

C^1급 곡면 S가 매개변수화 $(\phi,\ E)$를 가질 때, 곡면 위의 점 $\phi(u,\ v)$에서의 법벡터를

$$N_\phi(u,\ v) \coloneqq \phi_u(u,\ v) \times \phi_v(u,\ v)$$

로 나타낸다. $i \neq j$인 적당한 $i,\ j$에 대하여 (2)가 성립할 때 $N_\phi(u_0,\ v_0)$을 **ϕ에 의해 유도된 법벡터**라고

부른다. $z=f(x,\ y)$가 양함수로 정의된 곡면이고 ϕ가 자명한 매개변수화이면 $N_\phi=(-f_x,\ -f_y,\ 1)$이 성립한다.

곡선과 마찬가지로 곡면도 매끄러운 성질을 정의할 수 있다. $(\phi,\ E)$가 C^p급 곡면의 매개변수화라고 하자. $(\phi,\ E)$가 $(u_0,\ v_0)\in E$에서 **매끄럽다**는 것은 $N_\phi(u_0,\ v_0)\neq 0$인 것을 의미한다. $(\phi,\ E)$가 **매끄럽다**는 것은 E의 모든 점에서 $(\phi,\ E)$가 매끄러운 것을 의미한다. $(\phi,\ E)$가 $E_0\subseteq E$의 **밖에서 매끄럽다**는 것은 $(\phi,\ E)$가 $E\setminus E_0$에서 매끄러운 것을 의미한다.

곡면 S가 **매끄러운 곡면**이라는 것은 각 점 $x_0\in S$에 대하여 S의 매개변수화 $(\phi,\ E)$가 존재하여 이 매개변수화가 $(u_0,\ v_0)$에서 매끄럽고 $x_0=\phi(u_0,\ v_0)$을 만족시키는 것을 의미한다.

C^p급 매개변수화 $(\phi,\ E)$와 $(\psi,\ B)$가 **매끄럽게 동등**하다는 것은 이들이 모두 동일한 곡면의 매끄러운 매개변수화이고 B로부터 E 위에로의 C^p급 함수 τ가 존재하여 $\psi=\phi\circ\tau$이며 임의의 $(u,\ v)\in B$에 대하여 $\Delta_\tau(u,\ v)\neq 0$을 만족시키는 것이다. 이때 τ를 B로부터 E로의 **추이함수**라고 부른다.

매끄러운 곡면 S 위의 점 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 매개변수화 $(\phi,\ E)$에 의하여 유도된 **단위법벡터**를

$$\mathrm{n}(x_0,\ y_0,\ z_0)=\frac{N_\phi(u_0,\ v_0)}{\|N_\phi(u_0,\ v_0)\|}$$

으로 정의한다. 여기서 $(u_0,\ v_0)$은 $\phi(u_0,\ v_0)=(x_0,\ y_0,\ z_0)$인 점이다. 명백히 단위법벡터 n은 $j=0,\ 1$일 때 $\phi(u_j,\ v_j)=(x_0,\ y_0,\ z_0)$을 만족시키는 임의의 점 $(u_j,\ v_j)\in E$에 대하여

$$\frac{N_\phi(u_0,\ v_0)}{\|N_\phi(u_0,\ v_0)\|}=\frac{N_\phi(u_1,\ v_1)}{\|N_\phi(u_1,\ v_1)\|}\neq 0$$

일 때에만 정의된다. 이것은 ϕ가 E에서 매끄러운 일대일함수일 때에만 가능하다. 그러나 만약 ϕ가 E에서 일대일함수가 아니면 $(\phi,\ E)$가 매끄러운 매개변수화일지라도 n이 정의되지 않을 수 있다.

곡면 S가 **방향을 가진다**는 것은 S가 매끄러운 매개변수화 $(\phi,\ E)$를 가지며 $(\phi,\ E)$는 S 위의 각 점에서 단위법벡터 n을 하나로 결정하고 S 위의 점들을 정의역으로 하는 단위법벡터함수 n이 S에서 연속인 것을 의미한다.

S가 방향을 가질 때 n은 길이 1을 유지하면서 곡면 S 위에서 연속적으로 움직이므로 S 위의 모든 단위법벡터는 곡면의 바깥쪽만을 향하거나 또는 모두 곡면의 안쪽만을 향하게 된다. 따라서 n이 향하는 방향을 S의 **양의 방향**으로 정할 수 있다.

두 매개변수화 $(\phi,\ E)$와 $(\psi,\ B)$가 **방향동등**이라는 것은 이들이 방향을 가진 동일한 곡면의 매개변수화이고 추이함수 τ에 의한 매끄럽게 동등하며 임의의 $(u,\ v)\in B$에 대하여 $\Delta_\tau(u,\ v)>0$을 만족시키는 것을 의미한다.

10.8 선적분과 면적분. 적분 영역이 곡선인 적분을 선적분이라고 부르고, 적분 영역이 곡면인 적분을 면적분이라고 부른다. 선적분과 면적분은 각각 피적분함수가 실함수인 경우와 벡터함수인 경우로 나누어 정의된다.

10.8.1 선적분. C가 $\mathbb{R}^m$의 매끄러운 호이고 (ϕ, I)를 매개변수화로 가지며, $g : C \to \mathbb{R}$가 연속인 함수라고 하자. 이때 C 위에서의 g의 **선적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C g\, ds \coloneqq \int_I g(\phi(t))\|\phi'(t)\|\, dt$$

$\mathbb{R}^m$의 부분집합 C가 **조각마다 매끄러운 곡선**이라는 것은 유한 개의 매끄러운 곡선들을 이어서 C를 만들 수 있는 것을 의미한다. 즉 유한 개의 매끄러운 곡선들 C_j가 존재하여 $C = \cup_{j=1}^N C_j$이고 $j \neq k$일 때 C_j와 C_k는 많아야 하나의 끝점에서 만나는 것이다.

$C = \cup_{j=1}^N C_j$가 조각마다 매끄러운 곡선이고 C_j의 매끄러운 매개변수화를 (ϕ_j, I_j)라고 하자. 이때 (ϕ_j, I_j)들의 모임을 C의 **매개변수화**라고 부르며 형식적으로 $\cup_{j=1}^N (\phi_j, I_j)$로 나타낸다. 조각마다 매끄러운 곡선 C의 두 매개변수화 $\cup_{j=1}^N (\phi_j, I_j)$와 $\cup_{j=1}^N (\psi_j, J_j)$가 **매끄럽게 동등**하다는 것은 각 $j \in \{1, \cdots, N\}$에 대하여 (ϕ_j, I_j)와 (ψ_j, J_j)가 매끄럽게 동등한 것을 의미한다. 끝으로 C가 조각마다 매끄러운 호일 때 C의 **길이**를

$$L(C) \coloneqq \sum_{j=1}^N L(C_j)$$

로 정의하며, C 위에서 연속함수 $g : C \to \mathbb{R}$의 **선적분**을

$$\int_C g\, ds \coloneqq \sum_{j=1}^N \int_{C_j} g\, ds$$

로 정의한다.

C가 $\mathbb{R}^m$의 매끄러운 곡선이고 단위접벡터 T를 가진다고 하자. 또한 (ϕ, I)가 C의 매끄러운 매개변수화라고 하자. $F : C \to \mathbb{R}^m$이 연속함수일 때, C를 따르는 F의 **유향선적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C F \cdot \mathrm{T}\, ds \coloneqq \int_C F \cdot d\phi \coloneqq \int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$$

유향선적분을 방향선적분이라고 부르기도 한다.

10.8.2 면적분. S가 매끄러운 C^p급 곡면이고 (ϕ, E)가 S의 매개변수화라고 하자.

(i) S의 **넓이**를 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma(S) \coloneqq \int_E \|N_\phi(u, v)\|\, d(u, v)$$

(ii) $g : S \to \mathbb{R}$가 연속일 때, S 위에서 g의 **면적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\iint_S g\, d\sigma \coloneqq \int_E g(\phi(u, v))\|N_\phi(u, v)\|\, d(u, v)$$

매끄러운 곡선에서의 선적분의 개념을 확장하기 위하여 조각마다 매끄러운 곡선을 정의한 것처럼 매끄러운 곡면에서의 면적분의 개념을 확장하기 위하여 조각마다 매끄러운 곡면을 정의해야 한다. 그 전에 먼저 점이 곡면의 안쪽에 있는 경우와 경계선에 있는 경우를 구분하자.

S가 $\mathbb{R}^3$의 C^p급 곡면이라고 하자. 곡면 위의 점 $(x, y, z) \in S$에 대하여 (x, y, z)에서 곡면 위의 어느 방향으로든 적어도 조금씩은 움직일 수 있을 때 '(x, y, z)는 S의 **내부**에 있다'고 말한다. 그리고 S의 내부에 있는 점들의 모임을 $\mathrm{Int}S$로 나타낸다. 또한 S의 **다양체경계**를 $\partial S \coloneqq S \setminus \mathrm{Int}S$로 정의한다. 다양체경계를 간단히 **경계**라고도 부른다. 한편 집합의 경계를 곡면의 경계와 구분하기 위하여, 집합 E의 경계 $\overline{E} \setminus E^o$를 **위상경계**(topological boundary)라고 부른다. 이 책에서는 곡면에 대해서는 다양체경계만 사용할 것이고 m차원 영역에 대해서는 위상경계만 사용할 것이기 때문에 혼동될 가능성은 없다.

집합 $S \subseteq \mathbb{R}^3$이 **조각마다 매끄러운 곡면**이라는 것은 매끄러운 곡면들 S_j가 존재하여 $S = \cup_{j=1}^N S_j$이면서, $j \neq k$인 임의의 j, k에 대하여 $S_j \cap S_k$는 공집합이거나 S_j의 경계의 일부가 S_k의 경계의 일부와 겹치는 것을 의미한다. 논의의 편의를 위하여 S_j 중 세 개의 교집합은 공집합이거나 유한집합인 경우만 허용하는 것으로 약속한다. 만약 그렇지 않으면 곡면이 모서리를 따라 여러 번 자신과 겹쳐질 수 있기 때문이다.

$S = \cup_{j=1}^N S_j$가 조각마다 매끄러운 곡면이라고 하자. 이때 S_j의 매끄러운 매개변수화 (ϕ_j, E_j)들의 모임을 S의 **매개변수화**라고 부르며 형식적으로는 이것을 $(\phi, E) = \cup_{j=1}^N (\phi_j, E_j)$로 나타낸다. 곡면 S의 두 매개변수화 $\cup_{j=1}^N (\phi_j, E_j)$와 $\cup_{j=1}^N (\psi_j, B_j)$가 **매끄럽게 동등**하다는 것은 임의의 $j = 1, 2, \cdots, N$에 대하여 (ϕ_j, E_j)와 (ψ_j, B_j)가 매끄럽게 동등함을 의미한다. ∂S_j들의 경계점 중에서 서로 겹쳐지지 않는 것들만을 모은 집합을 S의 **경계**라고 부르고 ∂S로 나타낸다. 곡면 S의 **넓이**를

$$\sigma(S) = \sum_{j=1}^N \sigma(S_j)$$

로 정의하며, S에서 연속인 실함수 g의 **면적분**을

$$\iint_S g \, d\sigma = \sum_{j=1}^N \iint_{S_j} g \, d\sigma$$

로 정의한다.

S가 방향을 가진 곡면이고 매개변수화 (ϕ, E)에 의해 유도된 단위법벡터 $\mathbf{n}$을 가진다고 하자. 이때 S 위에서 연속함수 $F : S \to \mathbb{R}^3$의 **유향면적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \coloneqq \int_E (F \circ \phi)(u, v) \cdot N_\phi(u, v) \, d(u, v)$$

10.9 다변수 미적분의 기본정리. 실함수 f가 $[a, b]$를 포함한 열린구간에서 C^1급일 때, 미적분의 기본정리에 의하여

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, dx$$

가 성립한다. 즉 구간 $[a, b]$에서 f'의 적분은 $[a, b]$의 끝점에서 f의 함숫값에 의하여 정해진다. f를 2차원 또는 3차원 벡터장으로 바꾸고 구간 $[a, b]$를 2차원 또는 3차원 영역으로 바꾸어도 이와 비슷한 결론을 얻을 수 있다.

10.9.1 그린의 정리. E가 2차원 영역이고 ∂E가 E의 위상경계이며 양의 방향이 주어진 조각마다 매끄러운 C^1급 곡선이라고 하자. 만약 P, Q가 E로부터 $\mathbb{R}$ 로의 C^1급 함수이고 $F=(P,\ Q)$이면 다음 등식이 성립한다.

$$\int_{\partial E} F \cdot \mathrm{T}\, ds = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

10.9.2 발산 정리. E가 $\mathbb{R}^3$의 부분집합이고 $F=(P,\ Q,\ R) : E \to \mathbb{R}^3$이 E에서 C^1급인 함수라고 하자. 이때 F의 **회전**을 다음과 같이 정의한다.

$$\operatorname{curl} F \coloneqq \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

또한 F의 **발산**을 다음과 같이 정의한다.

$$\operatorname{div} F \coloneqq \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

S가 방향을 가진 곡면이고 ∂S가 조각마다 매끄러운 곡선이라고 하자. S의 방향을 이용하여 ∂S의 방향을 정할 수 있다. 즉 S의 양의 방향을 결정하는 단위법벡터 $\mathbf{n}$의 방향을 기준으로 **오른손 법칙**에 따라 회전 방향을 주면 그와 같은 방향으로 곡선 ∂S의 방향을 정할 수 있다. 그러한 ∂S의 방향을 **양의 방향** 또는 **오른손 방향** 또는 **S의 방향에 의해 유도된 방향**이라고 부른다.

S가 $\mathbb{R}^2$의 부분집합일 때 단위법벡터 $\mathbf{n}=(0,\ 0,\ 1)$의 방향에 의해 유도된 ∂S의 방향을 **양의 방향**이라고 부른다. ∂S가 단순닫힌곡선인 경우 이 도형을 z축의 위쪽에서 내려다본다면 반시계방향이 주어져 있는 셈이다. 하지만 만약 S가 안쪽에 구멍을 가진다면 구멍의 경계선에는 시계방향이 주어지게 된다.

E가 3차원 영역이고 위상경계 ∂E가 조각마다 매끄러운 C^1급 곡면이며 양의 방향이 주어졌다고 하자. 만약 $F : E \to \mathbb{R}^3$이 E에서 C^1급인 함수이면 다음 등식이 성립한다.

$$\iint_{\partial E} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} F\, dV$$

10.9.3 <u>스토크스</u>의 정리. S가 $\mathbb{R}^3$의 방향을 가진 C^2급 곡면이고 조각마다 매끄러우며 단위법벡터 $\mathbf{n}$을 가진다고 하자. 만약 S의 다양체경계 ∂S가 조각마다 매끄러운 C^1급 곡선이고 양의 방향이 주어져 있으며 $F : S \to \mathbb{R}^3$이 C^1급 함수이면 다음 등식이 성립한다.

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{T}\, ds = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$