맛있는 해석학

2019년 2월 개정판 · 일변수해석학

작지만 소중한 꿈을 위해

맛있는 해석학 | The Art of Analysis

제 1 판 발행 2005년 4월
제 4 판 발행 2012년 11월
제 4 판 출판 2018년 1월
개정판 공개 2019년 2월

지 은 이 이슬비 | designeralice@daum.net

펴 낸 곳 수학 나라의 앨리스 | https://aliceinmathland.com
이슬비 | https://iseulbee.com

저작권 등록번호 C-2012-023491

PREFACE 여는 글

해석학은 대수적 구조와 위상적 구조를 모두 가지고 있는 공간의 성질, 그리고 그러한 공간 위에서 정의된 함수의 성질을 밝히는 수학의 분야입니다. 특히 학부 과정의 기초해석학은 이후에 공부할 다양한 분야의 디딤돌이 됩니다.

이 책은 해석학의 기초 내용을 공부하는 사람들을 위한 교재입니다. 학부 수준의 집합론과 미적분학을 각각 한 학기 이상 수강한 후에 볼 수 있는 수준으로 내용이 구성되어 있으며, 해석학을 공부한 경험이 있는 사람들에게도 유용하도록 다양한 예제와 확장된 내용을 실었습니다.

이 책에서는 정리를 소개하기 전에 그러한 정리가 왜 필요한지 설명하였으며, 문제를 풀거나 정리를 증명할 때 사용하면 유용한 발상법을 함께 소개하였습니다. 또한 각 단원의 내용이 서로 어떻게 연결되는지 설명하였으며, 독자가 이러한 내용을 별개의 것으로 느끼지 않고 종합적으로 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

내용을 전개할 때 초반부에 열린집합과 닫힌집합의 개념을 도입하고 이후에 위상적 관점을 일관되게 적용하여 독자의 사고가 유클리드 공간에만 머물지 않고 일반적인 거리공간으로 쉽게 확장될 수 있도록 하였습니다. 위상적 관점을 적용하면 처음에는 어려워 보이지만, 위상적 관점에 익숙해지면 후속 과목으로 복소해석학, 미분기하학, 위상수학, 함수해석학 등을 공부하는 데에 매우 큰 도움이 됩니다.

목차에서 별 표시(*)가 붙어 있는 소단원은 그 내용이 뒤 단원에서 거의 사용되지 않으므로 해석학을 처음 공부하는 사람들은 이러한 소단원을 가볍게 읽고 넘어가도 됩니다. 또한 본문에서 별 표시가 붙어 있는 정리나 증명은 해석학을 처음 공부하는 사람들이 완전히 이해하기에는 너무 어려운 것이므로 처음 공부하는 사람들은 이러한 내용을 가볍게 읽고 넘어가도 됩니다.

연습문제는 수준별로 제시되어 있으므로 독자는 자신의 수준에 맞는 문제를 골라서 풀 수 있습니다. 해석학을 처음 공부하는 사람은 본문의 보기와 예제를 꼼꼼히 공부하고 '개념 이해하기' 문제를 중심으로 공부하면 좋습니다. 개념 이해하기 문제를 쉽게 풀 수 있거나 해석학을 공부한 적이 한 번 이상 있는 사람은 '개념 응용하기' 문제를 중심으로 공부하면 좋습니다. 실력 향상을 원하는 사람은 '실력 다지기' 문제를 풀어 보기 바랍니다. '도약하기'는 후속 과목, 수학사, 수학교육과 관련된 다양한 문제로 구성되어 있으며, 해석학을 진정으로 깊게 이해하고 공부할 수 있도록 방향을 제시해 줍니다.

이 책은 2005년 초판이 발행된 후 여러 차례 개정을 거듭한 것입니다. 2005년 6월에 공개한 2판에서는 거리공간에 관한 내용을 추가하였으며 2008년 1월에 공개한 3판에서는 학습자의 심리를 고려한 구성 방식을 적용하였습니다. 2010년 1월에 공개한 3판 개정판에서는 가독성을 고려하여 편집디자인을 개선하였습니다.

이번 4판에서 달라진 점은 다음과 같습니다.

- ‘수학의 논리와 집합’ 단원을 추가하였습니다.
- 각 단원의 학습목표를 제시하여 학습의 방향을 안내하였습니다.
- 해석학 개론서의 수준에 맞게 내용을 가감하였습니다.

초판을 공개한 후 4판을 발행하기까지 개정을 거듭하며 정확하고 좋은 내용을 담기 위하여 최선의 노력을 하였으나 여전히 미흡한 부분이 남아 있으리라 생각합니다. 수정해야 할 부분을 발견하거나 더 좋은 내용을 위한 의견이 있으면 이메일[1]을 보내주시기 바랍니다. ‘수학 나라의 앨리스’ 커뮤니티[2]에 방문하여 글을 남겨 주셔도 좋습니다.

‘수학 나라의 앨리스’ 커뮤니티에 방문하면 이 책의 최신 정보를 얻을 수 있으며 이 책을 파일로 내려 받을 수 있습니다. 또한 각 단원의 끝에 실린 단원 마무리 문제의 해설을 받을 수 있습니다. 커뮤니티에 방문하여 다른 방문자들과 정보를 나누고 여러 가지 문제를 함께 고민하며 풀어 보기 바랍니다. 또 여러분이 지금 보고 있는 이 책처럼 여러분의 개성이 들어간 자료를 만들어 많은 사람들과 함께 나누어 보기 바랍니다. 열심히 공부하여 다른 사람과 나누면 그것이 더 커져서 자신에게 돌아옵니다.

저는 수학을 공부하는 사람들이 온라인에서 많은 자료를 얻을 수 있기를 바랍니다. 이 책을 포함하여 제가 온라인 커뮤니티에 공개한 여러 자료는 그러한 인터넷 문화를 만들고 싶은 저의 소망이 담긴 것입니다. 이 책이 독자 여러분께 도움이 되기를 바랍니다.

이 책은 ‘앨리스 프로젝트’의 일환으로 제작되었습니다. ‘앨리스 프로젝트’는 우리나라의 수학과 수학교육에 도움이 될 자료를 만들어 배포하는 프로젝트입니다. 앨리스 프로젝트에 관심 있는 독자는 ‘수학 나라의 앨리스’ 커뮤니티에 방문하여 정보를 나누기 바랍니다.

이 책이 나오기까지 관심을 가져준 많은 분들께 감사드립니다.

2018년을 시작하는 겨울
이슬비

1) designeralice@daum.net
2) https://aliceinmathland.com

CONTENTS 차례

01 수학의 논리와 집합

02 실수계의 성질

03 실수열의 극한

04 실함수의 극한

옆에 별 표시(*)가 있는 단원은 그 내용이 뒤에서 사용되지 않는 단원입니다. 해석학을 처음 공부하는 사람들은 이 단원을 뛰어 넘어도 됩니다.

05 실함수의 미분

06 실함수의 리만 적분

07 실수열의 무한급수

08 실해석적 함수

A 부록

01

수학의 논리와 집합

오늘날 수학에서 다루는 대부분의 내용은 집합의 이론을 이용하여 표현된다. 따라서 수학의 한 분야를 학습하기에 앞서 집합의 이론을 살펴보는 것은 앞으로의 학습 전반에 걸쳐 사용될 추론 규칙과 여러 가지 기호를 약속하는 것으로서 의의가 있다. 명제와 집합에 관련된 모든 내용을 다루는 것은 이 책의 목표에서 벗어나므로 이 장에서는 중요한 내용만 간단히 살펴보자.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 명제의 의미를 이해하고, 정리를 증명할 때 명제의 성질을 사용할 수 있다.
- 집합의 연산을 할 수 있으며, 집합의 연산에 관련된 성질을 증명할 수 있다.
- 함수를 관계로서 이해하고 함수의 성질을 증명할 수 있다.
- 순서집합의 개념을 이해하고 그 성질을 증명할 수 있다.
- 선택공리의 개념을 이해하고 그와 동치인 명제를 말할 수 있다.
- 대응을 이용하여 무한집합의 크기를 비교할 수 있다.

1.1 명제와 조건

참 또는 거짓 중 하나의 값만을 갖는 수학적 문장을 **명제**라고 부른다. 고등학교 과정에서 공부했던 방식대로 명제의 성질에 대하여 논할 때는 보통 명제를 p, q, r, $\cdots$와 같은 알파벳으로 나타낸다.

명제 p에 대하여 'p가 아니다'를 p의 **부정**이라고 부르고 $\sim p$로 나타낸다. 즉 p가 참일 때 $\sim p$는 거짓이며, p가 거짓일 때 $\sim p$는 참이다. [$\sim p$는 보통 'not p'라고 읽는다.]

둘 이상의 명제를 결합하여 새로운 명제를 만들 수 있다. 두 명제 p, q에 대하여 'p와 q가 모두 참이다'를 p와 q의 **논리곱**이라고 부르며 $p \wedge q$로 나타내고 'p 그리고 q'라고 읽는다. 그리고 'p 또는 q 중 하나 이상이 참이다'를 p와 q의 **논리합**이라고 부르며 $p \vee q$로 나타내고 'p 또는 q'라고 읽는다.

보기 1.1.1 '15는 홀수이다'를 p로 나타내고 '15는 소수이다'를 q로 나타내면 $p \wedge q$는 '15는 홀수인 소수이다'가 되고 $p \vee q$는 '15는 홀수이거나 소수이다'가 된다. 한편 '15는 홀수이지만 소수가 아니다'를 논리 기호로 나타내면 $p \wedge \sim q$이다. □

문장에 따라서 그 자체로는 참, 거짓이 판별되지 않지만 변수에 값을 대입했을 때 참, 거짓이 판별되는 경우도 있다. 예를 들어 'x는 짝수이다'는 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 한다. 이러한 문장을 **명제함수** 또는 **조건**이라고 부른다. 명제함수의 변수를 강조할 때에는 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\cdots$와 같이 나타내기도 하고, 변수를 강조할 필요가 없을 때에는 명제와 같이 p, q, r, $\cdots$로 나타내기도 한다.

명제 'p가 참일 때마다 q도 참이 된다'를 **조건문** 또는 **함의**라고 부르고 $p \to q$로 나타내며 'p이면 q이다'라고 읽는다. 이것을 'p는 q를 함의한다'라고 읽기도 한다.

보기 1.1.2 '$\triangle$ABC는 이등변삼각형이다'를 p로 나타내고 '$\triangle$ABC의 두 각의 크기가 같다'를 q로 나타내면 $p \to q$는 '$\triangle$ABC가 이등변삼각형이면 $\triangle$ABC의 두 각의 크기가 같다'가 된다. 물론 이것을 '이등변삼각형은 두 각의 크기가 같다'로 더 간단하게 표현할 수도 있다. □

논리곱, 논리합, 조건문은 다음과 같이 **진리표**(truth table)로 나타낼 수 있다.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

진리표에서 T는 참(true)을 나타내고 F는 거짓(false)을 나타낸다.

명제함수 $p(x)$가 주어졌을 때 x에 대입할 수 있는 값들의 모임을 $p(x)$의 **대상영역**이라고 부른다. 명제함수 $p(x)$의 대상영역 U에서 $p(x)$가 참이 되도록 하는 x로 이루어진 집합을 p의 **진리집합**이라고 부르고

$$\{x \in U \mid p(x)\}$$

로 나타낸다. 집합을 이와 같은 꼴로 나타내는 방법을 **조건제시법**이라고 부른다. 집합을 조건제시법으로 나타낼 때 대상영역이 명확하여 혼동할 염려가 없으면 $\{x \mid p(x)\}$와 같이 나타내기도 한다. 한편

$$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 64\}$$

와 같이 원소를 일렬로 나열하는 방법으로 집합을 나타낼 수도 있는데 이러한 방법을 **원소나열법**이라고 부른다. 원소나열법은 원소의 규칙이 명확하여 혼동될 염려가 없을 때에만 사용한다.

'대상영역 U의 모든 원소 x에 대하여 $p(x)$이다'라는 명제를

$$\forall x \in U : p(x) \tag{1}$$

로 나타낸다. 이 명제를 **전칭명제**라고 부르고 $\forall$를 **전칭기호**라고 부른다. 'U의 원소 x 중에서 $q(x)$인 것이 하나 이상 존재한다'라는 명제를

$$\exists x \in U : q(x) \tag{2}$$

로 나타낸다. 이 명제를 **존재명제**라고 부르고 $\exists$를 **존재기호**라고 부른다. 전칭명제와 존재명제를 통틀어 **한정명제**라고 부르고 전칭기호와 존재기호를 통틀어 **한정기호**라고 부른다.

참고로 전칭명제와 존재명제는 진리집합을 이용하여 정의할 수도 있다. 대상영역이 U인 명제 p의 진리집합을 P라고 하자. 이때 (1)이 성립할 필요충분조건은 P가 U를 포함하는 것이다. 또한 (2)가 성립할 필요충분조건은 $P \cap U \neq \varnothing$인 것이다.

보기 1.1.3 소수인 자연수들의 집합 U를 대상영역으로 하는 두 명제함수 p와 q가

$$p(x) \equiv \text{'}x\text{는 홀수이다'}, \quad q(x) \equiv \text{'}x\text{는 1보다 크다'}$$

라고 정의되었다고 하자. 이때 p와 q에 대한 한정명제는 각각 다음과 같다.

한정명제	의미	
$\forall x \in U : p(x)$	모든 소수는 홀수이다.	(거짓)
$\exists x \in U : p(x)$	홀수인 소수가 존재한다.	(참)
$\forall x \in U : q(x)$	모든 소수는 1보다 크다.	(참)
$\exists x \in U : q(x)$	1보다 큰 소수가 존재한다.	(참)

□

대상 영역이 동일한 두 명제함수 p, q에 대하여 $p(x) \to q(x)$도 명제함수가 된다. 대상 영역 U의 모든 원소 x에 대하여 이 명제함수가 참인 것, 즉 $\forall x \in U : (p(x) \to q(x))$가 참인 것을 $p(x) \Rightarrow q(x)$로 나타낸다. 이때 p를 q이기 위한 **충분조건**이라고 부르며 q를 p이기 위한 **필요조건**이라고 부른다. $p \Rightarrow q$이면서 동시에 $q \Rightarrow p$인 것을 $p \Leftrightarrow q$로 나타내며, 'p와 q는 서로 **필요충분조건**이다'라고 말한다.

기호 $p \equiv q$는 p와 q가 완전히 동일한 명제 또는 명제함수라는 것을 의미한다. 또한 $p \Leftrightarrow q$는 p와 q의 진리 여부가 서로 같다는 것을 의미한다. $\Leftrightarrow$는 주로 두 명제 또는 명제함수의 관계를 나타낼 때 사용되고 $\equiv$는 주로 정의할 때에 사용된다. 책에 따라서는 $\Leftrightarrow$를 길게 $\Longleftrightarrow$로 나타내기도 한다.

한편 대수학이나 해석학에서 $\equiv$는 두 식이 항등적으로 동일한 값을 가진다는 의미로 사용되기도 한다. 예를 들어 f와 g가 함수일 때

$$f(x) \equiv g(x)$$

는

'대상 영역의 모든 x에 대하여 $f(x) = g(x)$가 성립한다'

를 의미한다.

보기 1.1.4 자연수 전체 집합 $\mathbb{N}$을 대상영역으로 하는 두 명제함수 p와 q가 각각

$$p(n) \equiv \text{'}n^2\text{은 홀수이다'}, \quad q(n) \equiv \text{'}n\text{은 홀수이다'}$$

라고 정의되었다고 하자. 이때

'임의의 자연수 n에 대하여, n^2이 홀수일 때마다 n도 홀수가 된다'

는 참이다. 즉

$$\forall n \in \mathbb{N} : (p(n) \to q(n))$$

이 참이므로 $p(n) \Rightarrow q(n)$이라고 쓸 수 있다. 같은 방법으로 $q(n) \Rightarrow p(n)$이라고도 쓸 수 있다. 따라서 p와 q는 서로 필요충분조건이다. □

정의할 때 $=$나 $\equiv$를 사용하면 어느 쪽이 정의하는 문장이고 어느 쪽이 정의되는 용어인지 혼동되는 경우가 있다. 이때에는 $:=$를 사용한다. 즉 $p := q$는 'p를 q로서 정의한다'는 의미이다. 이때 q는 이미 정의되어 알고 있는 용어로 구성된 문장이며 p는 새롭게 도입되는 기호이다. 기호 $:=$는 정의하는 문장과 정의되는 기호의 관계를 명확히 구분할 수 있게 해준다.

명제 또는 명제함수 p, q에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- $p \to q$의 **역** : $q \to p$
- $p \to q$의 **이** : $\sim p \to \sim q$
- $p \to q$의 **대우** : $\sim q \to \sim p$

참고로 명제 $p \to q$에서 p를 **가정**, q를 **결론**이라고 부른다.

보기 1.1.5 대상영역이 삼각형의 집합인 두 명제함수 p와 q가 각각

$$p(x) \equiv \text{‘}x\text{는 이등변삼각형이다’}, \quad q(x) \equiv \text{‘}x\text{는 정삼각형이다’}$$

라고 정의되었다고 하자. 이때 조건문 $p \to q$와 그 역, 이, 대우는 각각 다음과 같다.

- $p \to q$: 이등변삼각형은 정삼각형이다. (거짓)
- $q \to p$: 정삼각형은 이등변삼각형이다. ($p \to q$의 역, 참)
- $\sim p \to \sim q$: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. ($p \to q$의 이, 참)
- $\sim q \to \sim p$: 정삼각형이 아니면 이등변삼각형이 아니다. ($p \to q$의 대우, 거짓) □

명제와 그 대우의 참 거짓 여부는 항상 동일하다. 이와 같이 참, 거짓 여부가 서로 동일할 때 ‘두 명제는 **동치**이다’ 또는 ‘두 명제는 **동등**하다’라고 말한다. 두 명제 p, q가 동치인 것을 $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$로 나타내기도 하고 $\boldsymbol{p \equiv q}$로 나타내기도 한다.

명제 p, q, r에 대하여 다음과 같은 **추이법칙**(transitive rule)이 성립한다.

$$((p \to q) \land (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$$

추이법칙은 이미 정당성이 인정된 사실을 이용하여 새로운 사실을 증명할 때 사용한다. 즉 추이법칙을 이용하면 두 명제 $p \to q$와 $q \to r$를 이용하여 $p \to r$가 성립함을 증명할 수 있다.

다음으로 여러 가지 명제의 부정법칙을 살펴보자. 먼저 명제 p, q에 대하여 다음과 같은 **드모르간**(De Morgan)**의 법칙**이 성립한다.

$$(\sim (p \land q)) \Leftrightarrow (\sim p \lor \sim q),$$
$$(\sim (p \lor q)) \Leftrightarrow (\sim p \land \sim q).$$

드모르간의 법칙을 여러 개의 명제에 적용하면 다음과 같다.

$$(\sim (p_1 \land p_2 \land p_3 \land \cdots \land p_n)) \Leftrightarrow (\sim p_1 \lor \sim p_2 \lor \sim p_3 \lor \cdots \lor \sim p_n),$$
$$(\sim (p_1 \lor p_2 \lor p_3 \lor \cdots \lor p_n)) \Leftrightarrow (\sim p_1 \land \sim p_2 \land \sim p_3 \land \cdots \land \sim p_n).$$

이것은 차례대로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sim (p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n\text{이 모두 참이다}) \Leftrightarrow (p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n \text{ 중 거짓인 것이 존재한다}),$$
$$\sim (p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n \text{ 중 참인 것이 존재한다}) \Leftrightarrow (p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n\text{이 모두 거짓이다}).$$

따라서 드모르간의 법칙을 일반화하여 다음과 같은 **한정명제의 부정법칙**을 얻을 수 있다.

$$(\sim \forall x \in U : p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in U : \sim p(x)),$$
$$(\sim \exists x \in U : p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in U : \sim p(x)).$$

즉 한정명제의 부정법칙은 드모르간의 법칙을 일반화한 것이다.

보기 1.1.6 모든 각(angle)의 집합 A를 대상영역으로 하는 명제 p가

$$p(x) \equiv \text{'}x\text{는 작도 가능하다'}$$

라고 정의되었다고 하자. 이때 전칭명제 $\forall x \in A : p(x)$는 '임의의 각은 작도 가능하다'가 되며, 그 부정은 $\exists x \in A : \sim p(x)$로서 '작도 불가능한 각이 존재한다'가 된다. □

보기 1.1.7 앞의 보기 1.1.4에서 대상영역이 $\mathbb{N}$이 아니면 p와 q는 서로 필요충분조건이 아닐 수도 있다. 예를 들어 대상영역이 실수 집합 $\mathbb{R}$이면 $n=\sqrt{3}$인 경우 n^2은 홀수이지만 n은 홀수가 아니다. 즉

$$\exists n \in \mathbb{R} : (p(n) \wedge \sim q(n))$$

이 참이다. 그런데 이 명제는 $\forall n \in \mathbb{R} : (p(n) \to q(n))$의 부정과 동일하므로 p는 q의 충분조건이 아니다. 즉 대상영역이 $\mathbb{R}$일 때 p와 q는 서로 필요충분조건이 아니다. □

한정명제가 두 개 이상 겹쳐있는 경우를 살펴보자.

보기 1.1.8 명제함수 p가 $p(x,\ y) \equiv$ 'y는 x의 배수이다'라고 정의되어 있고, x와 y의 범위가 자연수 집합 $\mathbb{N}$이라고 하자. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : p(x,\ y)$는 '각 자연수 x에 대하여 x의 배수 y가 하나 이상씩 존재한다'가 된다. 이 명제는 참이다. 반면에 $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : p(x,\ y)$는 '어떤 자연수 y가 모든 자연수 x의 배수이다'가 된다. 하나의 자연수가 모든 자연수의 배수가 될 수는 없으므로 이 명제는 거짓이다. □

위 보기에서 보다시피 한정기호의 순서가 바뀌면 명제의 의미가 달라진다.

보기 1.1.9 명제 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{C} : x=y^2$은 직관적으로 '각 실수 x에 대하여 $x=y^2$을 만족시키는 복소수 y가 존재한다'라는 의미를 가지고 있다. 이 명제는 참이다. 이 명제의 부정을 구하면

$$\begin{aligned}
(\sim(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{C} : x=y^2)) &\Leftrightarrow (\sim \forall x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{C} : x=y^2)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : \sim(\exists y \in \mathbb{C} : x=y^2)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : (\forall y \in \mathbb{C} : \sim(x=y^2))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : (\forall y \in \mathbb{C} : x \neq y^2)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{C} : x \neq y^2)
\end{aligned}$$

이다. 이 명제의 의미는 '실수 x 중에는 복소수 y를 제곱해서 만들 수 없는 것도 있다'이다. 이 명제는 거짓이다. □

대상영역이 같은 두 전칭기호나 두 존재기호가 연달아 나타난 경우 이것을 하나로 줄여 간단히 나타내기도 한다. 예를 들어

$\forall x \in U\ \forall y \in U : p(x,\ y)$를 줄여서 간단히 $\forall x, y \in U : p(x,\ y)$로,
$\exists x \in U\ \exists y \in U : p(x,\ y)$를 줄여서 간단히 $\exists x, y \in U : p(x,\ y)$로

나타낼 수 있다. 그러나 $\forall x \in A\ \forall y \in B : p(x,\ y)$와 같이 대상영역이 다른 경우는 줄여서 쓰지 않는다.

만약 대상영역 U의 원소 중 $p(x)$가 참이 되도록 하는 x가 단 하나만 존재하면, 이것을 기호로

$$\exists ! x \in U : p(x)$$

로 나타내고, 'U의 원소 중 $p(x)$를 만족시키는 것은 **유일하다**'라고 말한다. ['유일하게 존재한다'라고 말하기도 한다.]
명제 $\exists ! x \in U : p(x)$를 증명하려면 두 명제

(i) $p(x)$를 만족시키는 x가 U에 존재한다,
(ii) 'x와 y가 U의 원소이고 $p(x)$와 $p(y)$가 모두 참'이면 $x = y$이다

를 모두 증명하면 된다.

보기 1.1.10 일차방정식 $2x+4=0$의 해가 실수 범위에서 유일하게 존재함을 증명해보자. 명제함수 p를 $p(x) \equiv$ '$2x+4=0$'이라고 정의하자. 이제 $\exists ! x \in \mathbb{R} : p(x)$를 증명해야 한다.

(i) $x=-2$는 실수이며 $p(x)$가 참이 되도록 하는 원소이다.
(ii) x와 y가 실수이고 $p(x)$와 $p(y)$가 참이라고 가정하자. 즉 $2x+4=0$과 $2y+4=0$이 성립한다고 가정하자. 그러면 $2x+4=2y+4$이다. 양변에서 4를 빼면 등식의 성질에 의하여 $2x=2y$이고, 다시 양변을 2로 나누면 등식의 성질에 의하여 $x=y$를 얻는다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 $\exists ! x \in \mathbb{R} : p(x)$가 증명되었다. □

1.2 집합의 연산

수학에서 다루는 대상은 대부분 **모임**(class)의 형태이다. 실수의 모임, 함수의 모임, 정의역, 공역 등은 모두 수학에서 다루는 모임이다. 수학적 개체 a가 모임 A의 **원소**인 것을 $a \in A$로 나타내고 'a가 A에 속한다' 또는 'A가 a를 원소로 가진다'라고 읽는다. 반면에 만약 개체 a가 A에 속하지 않으면 $a \notin A$로 나타낸다.

모임 중에서 다른 모임의 원소가 될 수 있는 것을 **집합**(set)이라고 부른다. 우리가 일반적으로 다루는 수의 집합이나 벡터 공간은 모두 집합이다. 또한 유한 개의 집합을 이용하여 만든 모임도 집합이다. [집합이 아닌 모임의 예를 보고 싶은 사람은 러셀의 역리(Russell's paradox)를 찾아보기 바란다.]

두 집합 A와 B에 대하여 $x \in A \Rightarrow x \in B$일 때 A를 B의 **부분집합**이라고 부르고 $A \subseteq B$로 나타낸다. $A \subseteq B$이면서 $B \subseteq A$이면 A와 B를 **서로 같은 집합** 또는 **동치인 집합**이라고 부르고 $A = B$로 나타낸다. $A \subseteq B$이면서 $A \neq B$이면 A를 B의 **진부분집합**이라고 부른다. 집합 A의 부분집합들을 모두 모은 집합을 A의 **멱집합**(power set)이라고 부르며 $\wp(A)$로 나타낸다.

집합 U의 부분집합 A, B에 대하여 다음과 같이 정의한다. [이들 세 연산은 이항연산이다.]

- **합집합** : $A \cup B \coloneqq \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **교집합** : $A \cap B \coloneqq \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **차집합** : $A \setminus B \coloneqq \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

위와 같이 기준이 되는 대상영역 U 안에서 집합의 연산을 생각할 때 집합 U를 **전체집합**이라고 부른다. 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 A의 **여집합**을 $A^c \coloneqq \{x \in U \mid x \notin A\}$로 정의한다. [여집합은 일항연산이다.]

두 집합 A, B에 대하여 다음과 같은 **드모르간의 법칙**이 성립한다.

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A\cap B)^c = A^c \cup B^c$$

이번에는 집합을 모은 집합을 생각해보자. 세 집합 A_1, A_2, A_3과 집합 $I=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여, 집합

$$\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$$

은

$$\{A_i \mid i\in I\}$$

로 나타낼 수 있다. 이렇게 집합들을 원소로 갖는 집합을 **집합족**이라고 부른다. 특히 위 예에서처럼 첨수가 붙은 집합들을 원소로 갖는 집합을 **첨수족**이라고 부른다. 이때 i를 **첨수**, I를 **첨수집합**이라고 부른다.

유한 개의 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- **합집합** : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \coloneqq A_1\cup A_2\cup A_3\cup \cdots \cup A_n$
- **교집합** : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \coloneqq A_1\cap A_2\cap A_3\cap \cdots \cap A_n$

더욱 일반적으로, 집합족 $F=\{A_i \mid i\in I\}$에 대하여 다음과 같이 정의한다. [I가 무한집합일 때에도 정의된다.]

- **합집합** : $\displaystyle \cup F \coloneqq \bigcup_{S\in F} S \coloneqq \bigcup_{i\in I} A_i \coloneqq \{x \mid \exists i\in I : x\in A_i\}$
- **교집합** : $\displaystyle \cap F \coloneqq \bigcap_{S\in F} S \coloneqq \bigcap_{i\in I} A_i \coloneqq \{x \mid \forall i\in I : x\in A_i\}$

보기 1.2.1 $\mathbb{R}$가 전체집합이라고 하자. 그리고 자연수 i에 대하여 $A_i=[-i,\ +i)$라고 하자. 그러면

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R},\quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = [-1,\ 1)$$

이다. 이것을 증명해보자. 먼저 $x\in\mathbb{R}$라고 하자. 그러면 $|x|<i$인 자연수 i가 존재한다. 따라서 $x\in A_i$이다. 즉 $\exists i\in\mathbb{N} : x\in A_i$이므로 $x\in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$이다. 따라서

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

이다. 한편 대상영역이 $\mathbb{R}$이므로

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{R}$$

이다. 그러므로 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}$이다.

다음으로 $x\in[-1,\ 1)$이라고 하자. $1\le i$일 때 $x\in[-1,\ 1)\subseteq[-i,\ +i)$이므로 $\forall i\in\mathbb{N} : x\in A_i$이다. 즉

$$[-1,\ 1)\subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

이다. 한편 $x\in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$이면 $\forall i\in\mathbb{N} : x\in A_i$이므로 $x\in A_1=[-1,\ 1)$이다. 즉

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq [-1,\ 1)$$

이다. 그러므로 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = [-1,\ 1)$이다. □

유한 개의 집합의 합집합과 교집합에 대하여 다음과 같은 드모르간의 법칙이 성립한다.

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup \cdots \cup A_n^c.$$

임의 개수의 집합에 대한 드모르간의 법칙은 다음과 같다.

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \tag{3}$$

참고 1.2.2 등식 (3)을 증명해보자. 한정명제의 부정법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \sim\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow (\sim \exists\, i \in I : x \in A_i) \Leftrightarrow \forall\, i \in I : \sim (x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in I : x \in A_i^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c \end{aligned}$$

따라서 $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$이다. 또한 이 식에서 A_i를 A_i^c로 바꾸면

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \left[\bigcap_{i \in I} (A_i^c)^c\right]^c = \left[\left(\bigcup_{i \in I} A_i^c\right)^c\right]^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

이므로 $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$이다. □

집합 A와 임의 개수 집합 B_i들에 대하여 다음과 같은 분배법칙이 성립한다.

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i), \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

한편 첨수집합이 공집합일 때, 즉 $I = \varnothing$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = U \tag{4}$$

더 많은 개수의 집합을 합집합할수록 집합은 더 커지며 더 적은 개수의 집합을 합집합할수록 집합은 더 작아진다. 따라서 공집합의 원소의 개수만큼 합집합하면 그 결과가 공집합이 되는 것은 당연한 일이다. 반대로 더 많은 개수의 집합을 교집합할수록 집합은 더 작아지며 더 적은 개수의 집합을 교집합할수록 집합은 더 커진다. 따라서 공집합의 원소의 개수만큼 교집합하면 그 결과가 전체집합이 되는 것도 당연한 일이다. [책에 따라서는 첨수집합이 공집합이 아닐 때에만 교집합을 정의하기도 한다.]

참고 1.2.3 등식 (4)를 증명해보자. $I = \varnothing$ 이라고 하자. 그리고 $x \in U$라고 가정하자. 이제

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \tag{5}$$

임을 증명해야 한다. 이것을 한정명제로 나타내면 $\forall\, i \in I : x \in A_i$이다. 또한 이것은

$$\forall\, i : (i \in I \to x \in A_i) \tag{6}$$

를 의미한다. 그런데 I는 공집합이므로 $i \in I$는 항상 거짓이다. 조건문 $p \to q$에서 가정 p가 거짓인 경우 명제 $p \to q$는 항상 참이 된다. 따라서 $i \in I \to x \in A_i$는 항상 참이다. 즉 (6)은 참이다. 이로써 (5)도 참이다. 즉 $U \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$이므로 $\bigcap_{i \in I} A_i = U$이다.

다음으로 드모르간의 법칙에 의하여

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c\right)^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i^c\right)^c = U^c = \varnothing$$

을 얻는다. □

두 집합 A와 B의 **데카르트 곱**을 다음과 같이 정의한다. [$A\times B$는 'A 곱 B'라고 읽는다.]

$$A\times B \coloneqq \{(x,\ y)\mid x\in A \ \wedge\ y\in B\}$$

같은 방법으로 집합 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$의 데카르트 곱을

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n \coloneqq \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid \forall i : x_i\in A_i\}$$

로 정의한다. 이것을 간단하게

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

으로 나타낸다. 특히 A^n을 다음과 같이 정의한다.

$$A^n \coloneqq \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\ \text{times}}$$

보기 1.2.4 $n=2$일 때 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2$는 $(x,\ y)$ 꼴의 순서쌍의 모임이다. 즉 $\mathbb{R}^2$는 중학교에서 배운 좌표평면이다. 또한 $\mathbb{R}^3$는 좌표공간이다. □

1.3 관계와 분할

집합 A가 모든 자연수의 모임이고, B가 모든 실수의 모임이라고 하자. 그리고

$$R=\{(x,\ y)\in A\times B\mid x=y^2\}$$

이라고 하자. 그러면 x가 y의 제곱이 될 때에만 $(x,\ y)\in R$가 성립한다. 즉 $(x,\ y)\in R$라는 것은 두 원소 x와 y 사이에 'x는 y의 제곱이다'라는 관계가 있다는 것을 의미한다. 이렇듯 두 원소의 관계를 순서쌍들의 집합으로 정의할 수 있다.

두 집합 $A,\ B$에 대하여 $A\times B$의 부분집합 R를 A로부터 B로의 **관계**(relation)라고 부른다. 보통 $(a,\ b)\in R$를 ${}_aR_b$ 또는 aRb로 나타내며 'a와 b는 R의 관계가 있다'라고 읽는다. [간단히 'a R b'라고 읽기도 한다.]

보기 1.3.1 $R=\{(x,\ y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid x\le y\}$라고 하자. 그러면 R는 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{N}$으로의 관계이다. □

A로부터 B로의 관계가 항상 특정한 규칙을 가지는 것은 아니다. $A\times B$의 임의의 부분집합은 A로부터 B로의 관계가 된다. [사실 '규칙'의 뜻을 명확하게 정의하는 일은 쉽지 않다.]

보기 1.3.2 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$라고 하자. 그리고

$$R=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5)\}$$

라고 하자. 그러면 R는 A로부터 B로의 관계이다. 이때 R는

$$R=\{(x,\ y)\in A\times B \mid x<y\}$$

와 같이 나타낼 수도 있다. □

R가 A로부터 B로의 관계인 것을 $R: A\to B$로 나타내기도 한다. 이때 B를 R의 **공역**(codomain)이라고 부른다. 또한 A로부터 B로의 관계 R에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- R의 **정의역**(domain) : $\operatorname{dom}R \coloneqq \{x\in A \mid \exists y\in B : (x,\ y)\in R\}$
- R의 **치역**(range) : $\operatorname{ran}R \coloneqq \operatorname{im}R \coloneqq \{y\in B \mid \exists x\in A : (x,\ y)\in R\}$

R가 A로부터 B로의 관계일 때, R의 **역관계**(inverse relation)를

$$R^{-1} \coloneqq \{(y,\ x)\in B\times A \mid (x,\ y)\in R\}$$

로 정의한다. 이때 R^{-1}는 B로부터 A로의 관계가 된다. 또한 R의 정의역은 R^{-1}의 치역이 되며, R의 치역은 R^{-1}의 정의역이 된다. [R^{-1}는 'R inverse'라고 읽는다.]

세 집합 $A,\ B,\ C$와 두 관계 $R: A\to B$, $S: B\to C$에 대하여 R와 S의 **합성관계**(composition)를

$$S\circ R \coloneqq \{(x,\ z) \mid \exists y\in B : (x,\ y)\in R \land (y,\ z)\in S\}$$

로 정의한다. 이때 $S\circ R$는 A로부터 C로의 관계가 된다. [$S\circ R$는 'S 합성 R'라고 읽는다.]

보기 1.3.3 $R=\{(x,\ y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x\le y\}$의 역관계는 $R^{-1}=\{(y,\ x)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x\le y\}$이다. □

보기 1.3.4 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$라고 하자. 그리고

$$R=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5)\}$$

라고 하자. 이때 R의 역관계는

$$R^{-1}=\{(3,\ 1),\ (5,\ 1),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)\}$$

이다. □

보기 1.3.5 세 집합 $A,\ B,\ C$를 각각

$$A=\mathbb{R},\ B=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 0\},\ C=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 1\}$$

이라고 정의하자. 그리고 두 관계 $R,\ S$를 각각

$$R=\{(x,\ y)\in A\times B \mid y=x^2\},\ S=\{(x,\ y)\in B\times C \mid y=x+1\}$$

이라고 정의하자. 이때 합성관계 $S\circ R$를 구해보자. 위 식에서 문자를 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

$$R=\{(x,\ y)\in A\times B \mid y=x^2\},\ S=\{(y,\ z)\in B\times C \mid z=y+1\}$$

합성관계의 정의에 의하면

$$\begin{aligned}(x, z)\in S\circ R &\Leftrightarrow (\exists y\in B : ((x, y)\in R \wedge (y, z)\in S))\\ &\Leftrightarrow (\exists y\in B : (y=x^2 \wedge z=y+1))\\ &\Leftrightarrow (\exists y\in B : z=x^2+1)\end{aligned}$$

이다. 그런데 마지막 식은 y와 관계 없으므로 존재기호를 없애도 된다. 즉

$$(x, z)\in S\circ R \Leftrightarrow z=x^2+1$$

이다. 따라서

$$S\circ R=\{(x, z)\in A\times C \mid z=x^2+1\}$$

이 된다. 문자를 바꾸어 쓰면

$$S\circ R=\{(x, y)\in A\times C \mid y=x^2+1\}$$

이라고 쓸 수 있다. 이를 통해 합성관계는 고등학교에서 배웠던 합성함수와 비슷한 개념임을 알 수 있다. □

R가 A로부터 A로의 관계일 때, 이것을 간단히 'R는 A에서의 관계이다'라고 말한다.

A가 집합이고 R가 A에서의 관계일 때, 다음과 같이 정의한다.

- R가 **반사적**(reflexive)이라는 것은 $\forall x\in A : xRx$를 만족시키는 것이다.
- R가 **대칭적**(symmetric)이라는 것은 $xRy \Leftrightarrow yRx$를 만족시키는 것이다.
- R가 **추이적**(transitive)이라는 것은 $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$를 만족시키는 것이다.
- 반사적이고 대칭적이며 추이적인 관계를 **동치관계**(equivalent relation)라고 부른다.

보기 1.3.6 $\mathbb{R}$에서의 관계 $R=\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x=y\}$는 동치관계이다. 왜냐하면

- 임의의 실수 x에 대하여 $x=x$이다,
- $x=y$일 필요충분조건은 $y=x$인 것이다,
- $x=y$이고 $y=z$이면 $x=z$이다

가 모두 성립하기 때문이다. 즉 '두 원소가 서로 같다'라는 관계는 동치관계이다. □

보기 1.3.7 공집합이 아닌 집합 A에 대하여 $\Delta_A=\{(x, y)\in A\times A \mid x=y\}$는 A에서의 가장 작은 동치관계이다. 이 관계를 A에서의 **대각관계**(diagonal relation)라고 부른다. 한편 $A\times A$는 그 자체로 A에서의 동치관계이며, A에서 가장 큰 동치관계이다. □

보기 1.3.8 복소수 집합 $\mathbb{C}$에서의 관계 $R=\{(x, y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid |x|=|y|\}$는 동치관계이다. □

보기 1.3.9 정수 집합 $\mathbb{Z}$에서의 관계 R를

$$(x, y)\in R \Leftrightarrow (x\text{를 3으로 나누었을 때의 나머지})=(y\text{를 3으로 나누었을 때의 나머지})$$

로 정의하자. 이때 R는 $\mathbb{Z}$에서의 동치관계가 된다. 여기서 3을 0이 아닌 다른 정수로 바꾸어도 R는 동치관계가 된다. □

집합 A에서의 관계 R에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- R가 **반대칭적**(antisymmetric)이라는 것은 $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$를 만족시키는 것이다.
- 반사적이고 추이적이며 반대칭적인 관계를 **순서관계**(order relation)라고 부른다.

보기 1.3.10 우리가 부등호로 나타내는 대소 관계 $\le$는 $\mathbb{R}$에서의 순서관계이다. 왜냐하면

- 임의의 실수 x에 대하여 $x \le x$이다,
- $x \le y$이고 $y \le z$이면 $x \le z$이다,
- $x \le y$이고 $y \le x$이면 $x=y$이다

가 모두 성립하기 때문이다. □

R가 A에서의 동치관계일 때 $x \in A$의 **동치류**(equivalence class)를

$$[x]_R \coloneqq \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$$

로 정의한다. 즉 x의 동치류란 R에 의해 x와 관계가 있는 원소들을 모두 모은 것이다. 경우에 따라서는 x의 동치류를 $\overline{x}$ 또는 R_x로 나타내기도 한다. A에서의 동치관계 R에 의한 동치류들을 모두 모은 집합을 R에 의한 A의 **상집합**(quotient set)이라고 부르며 A/R로 나타낸다.

보기 1.3.11 정수 집합 $\mathbb{Z}$에서의 관계 R를

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (x\text{를 } 3\text{으로 나누었을 때의 나머지}) = (y\text{를 } 3\text{으로 나누었을 때의 나머지})$$

로 정의하자. 이때 1의 동치류는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 정수들의 모임이므로

$$[1]_R = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$$

이다. 마찬가지로

$$[0]_R = [3]_R = [6]_R = \cdots = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\},$$
$$[2]_R = [5]_R = [8]_R = \cdots = \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\},$$

이다. 이때 R에 의한 $\mathbb{Z}$의 상집합은

$$\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$$

이다. □

위 보기에서 $\mathbb{Z}/R$의 세 원소 $[0]_R$, $[1]_R$, $[2]_R$는 모두 공집합이 아니고 서로소이다. 또한 이 세 집합을 합집합하면 $\mathbb{Z}$가 된다. 이러한 집합을 분할이라고 부른다.

즉 집합 A의 부분집합들의 모임 P가 두 조건

- P의 원소들은 공집합이 아니고 쌍마다 서로소이다,
- P의 모든 원소의 합집합은 A가 된다

를 모두 만족시키면 P를 A의 **분할**(partition)이라고 부른다.

정의에 의하면 A에서의 동치관계 R에 대하여 상집합 A/R는 A의 분할이 된다. 즉 집합 A에 하나의 동치관계가 주어질 때마다 그에 따른 분할이 존재한다.

역으로 집합 A의 분할 P가 주어질 때마다 그에 따른 동치관계를 생각할 수 있다. 즉 A에서의 관계 R를

$$xRy \Leftrightarrow \exists p \in P : x \in p \wedge y \in p$$

로 정의하면 R는 A에서의 동치관계가 된다.

1.4 함수

집합 A의 각 원소를 B에 하나씩 대응시키는 관계를 A로부터 B로의 함수라고 부른다. 즉 A로부터 B로의 관계 f가 두 조건

- $\forall x \in A\ \exists y \in B : (x,\ y) \in f,$
- $((x,\ y) \in f\ \wedge\ (x,\ z) \in f) \Rightarrow y = z$

를 모두 만족시키면 f를 A로부터 B로의 **함수**(function)라고 부른다. 그리고 $(x,\ y) \in f$인 것을 $y = f(x)$로 나타낸다. 함수 f에 의해 x가 y에 대응되는 것을 $f : x \mapsto y$로 나타낸다.

즉 f가 A로부터 B로의 함수라는 것은 f에 의하여 A의 모든 원소가 각각 B의 원소에 하나씩 대응되는 것을 의미한다.

보기 1.4.1 두 집합 A, B에 대하여 $A \subseteq B$라고 하자. 이때

$$f = \{(x,\ y) \in A \times B \mid x = y\}$$

로 정의된 관계 f는 A로부터 B로의 함수가 된다. 이처럼 $\forall x \in A : f(x) = x$를 만족시키는 함수 f를 A에서의 **항등함수**(identity function)라고 부르며 보통 I_A로 나타낸다. □

보기 1.4.2 A, B가 집합이고 $c \in B$라고 하자. 이때

$$f = A \times \{c\} = \{(x,\ y) \in A \times B \mid y = c\}$$

로 정의된 관계 f는 A로부터 B로의 함수가 된다. 이처럼 $\exists c \in B\ \forall x \in A : f(x) = c$를 만족시키는 함수 f를 **상수함수**(constant function)라고 부르며 보통 K_c로 나타낸다. (상수는 독일어로 'Konstante'이다.) □

보기 1.4.3 f가 A로부터 B로의 함수라고 하자. $S \subseteq A$일 때

$$f|_S = \{(x,\ y) \mid x \in S \wedge y = f(x)\}$$

로 정의된 $f|_S$는 S로부터 B로의 함수가 된다. 이러한 함수를 f의 정의역을 S로 제한한 함수라고 부른다. 이것을 줄여서 간단히 **제한함수**(restricted function)라고 부른다. 반대로 f를 $f|_S$의 **확장함수**(extended function)라고 부른다. □

두 함수 $f : A \to B,\ g : C \to D$에 대하여

$$\forall x \in A \cap C : f(x) = g(x)$$

가 성립할 때, $h = f \cup g$는 $A \cup C$로부터 $B \cup D$로의 함수가 된다. 이때 함수 $h : A \cup C \to B \cup D$를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A \\ g(x) & \text{if } x \in C \end{cases}$$

의 형태로 나타낼 수 있다. 만약 $A = \{x \mid p(x)\},\ C = \{x \mid q(x)\}$이면 위 식은

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } p(x) \\ g(x) & \text{if } q(x) \end{cases}$$

로 나타낼 수도 있다.

보기 1.4.4 $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이고, $x \leq 0$일 때 $|x| = -x$이므로 절댓값은

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. □

함수 $f : A \to B$에 대하여

$$\forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A : (f(x_1) = f(x_2) \ \to\ x_1 = x_2)$$

이면 f를 **일대일함수**(one to one function) 또는 **단사함수**(injective function)라고 부른다. 한편 공역과 치역이 같은 함수를 **위로의 함수**(onto) 또는 **전사함수**(surjective function)라고 부른다. 그리고 일대일이면서 위로인 함수를 **일대일대응**(one to one correspondence) 또는 **전단사함수**(bijective function)라고 부른다.

관계의 역관계와 합성관계를 정의한 것처럼 역함수와 합성함수를 생각할 수 있다.

함수 $f : A \to B$가 일대일대응이면 역관계 f^{-1}는 B로부터 A로의 함수가 된다. 이 함수 f^{-1}를 f의 **역함수**(inverse function)라고 부른다. 즉

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)$$

이다. 참고로 f의 역함수의 역함수는 f 자신이 된다.

두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$에 대하여

$$g \circ f \coloneqq \{(x, z) \mid \exists y \in B : (y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

를 f와 g의 **합성함수**(compositive function)라고 부른다.

보기 1.4.5 고등학교에서 배운 함수의 성질을 다시 생각해보자. $A,\ B,\ C,\ D$가 공집합이 아닌 집합이라고 하자. 그리고 세 함수 $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$가 주어졌다고 하자.

(1) 함수의 합성은 다음과 같은 성질을 가진다.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{(합성함수의 결합법칙)}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \qquad \text{(합성함수의 역함수법칙)}$$

여기서 물론 두 번째 등식은 f와 g의 역함수가 존재할 때에만 의미를 가진다.

(2) 일대일함수, 위로의 함수와 관련하여 다음이 성립한다.

- f와 g가 일대일함수이면 $g \circ f$도 일대일함수이다.
- f와 g가 위로의 함수이면 $g \circ f$도 위로의 함수이다.
- $g \circ f$가 일대일함수이면 f도 일대일함수이다.
- $g \circ f$가 위로의 함수이면 g도 위로의 함수이다.

(3) 항등함수와 관련하여 다음이 성립한다.

- $A = B$이고 f가 일대일대응일 때, $f \circ f^{-1}$는 항등함수이다.
- I_A와 I_B가 항등함수일 때 $f \circ I_A = f$, $I_B \circ f = f$이다.
- $A = C$이고 $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$이면 f와 g는 일대일대응이고 $g = f^{-1}$이다.

그러나 일반적으로 $g \circ f \neq f \circ g$이다. 즉 함수 합성의 교환법칙은 성립하지 않는다. □

함수 $f : A \to B$가 주어져 있고, $S \subseteq A$, $T \subseteq B$라고 하자. 이때

$$f(S) \coloneqq \{y \in B \mid \exists x \in S : y = f(x)\},$$
$$f^{-1}(T) \coloneqq \{x \in A \mid \exists y \in T : y = f(x)\}$$

로 정의한다. $f(S)$를 f에 의한 S의 **상**(image), $f^{-1}(T)$를 f에 의한 T의 **역상**(inverse image)이라고 부른다.

보기 1.4.6 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고 함수 $f : A \to B$가 $f(x) = x^2$으로 정의되었다고 하자.

(1) f의 치역은 $f(A) = \{1, 4, 9\}$이다.

(2) $S = \{2, 3\}$이면 $f(S) = \{4, 9\}$이다.

(3) $T = \{4, 5\}$이면 $f^{-1}(T) = \{2\}$이다. □

함수 $f : A \to B$와 네 집합 A_1, A_2, B_1, B_2가 주어졌다고 하자. 그리고 A_1, A_2는 A의 부분집합이며 B_1, B_2는 B의 부분집합이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

- $A_1 \subseteq A_2$이면 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$이다.
- $B_1 \subseteq B_2$이면 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$이다.
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

보기 1.4.7 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고 함수 $f : A \to B$가 $f(x) = x^2$으로 주어졌다고 하자. 그리고

$$A_1 = \{-1, 0\},\ A_2 = \{1\},\ B_1 = \{0, 1, 2\},\ B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

라고 하자.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = \{0, 1\} = f(A_1) \cup f(A_2)$이다.

(2) $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$ 이지만 $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 1\} \cap \{1\} = \{1\}$이다.

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{-1, 0, 1, 2\} = \{-1, 0, 1\} \cup \{-1, 1, 2\} = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$이다.

(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = \{-1, 1\} = \{-1, 0, 1\} \cap \{-1, 1, 2\} = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$이다. □

순서쌍 (a, b, c)는 $0, 1, 2$를 순서대로 각각 a, b, c에 대응시키는 함수로 생각할 수 있다. 이러한 관점에서 임의 개수의 집합의 데카르트 곱을 정의해보자.

두 집합 A, B에 대하여, 정의역이 A이고 공역이 B인 모든 함수들의 모임을 B^A로 나타낸다. 그리고 집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$와 $A = \bigcup_{i \in I} A_i$에 대하여 A_i의 **데카르트 곱**을

$$\prod_{i \in I} A_i \coloneqq \{f \in A^I \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i\}$$

로 정의한다. [$\prod$는 'product'라고 읽는다.]

즉 데카르트 곱 $\prod_{i \in I} A_i$는 정의역이 I이고 공역이 $\bigcup_{i \in I} A_i$인 함수들 중에서 각 $i \in I$를 A_i의 원소에 대응시키는 함수들의 모임이다.

참고 1.4.8 집합론에서 0 이상의 정수는 다음과 같이 정의된다.

$$0 \coloneqq \varnothing,\ 1 \coloneqq \{0\},\ 2 \coloneqq \{0, 1\},\ 3 \coloneqq \{0, 1, 2\},\ 4 \coloneqq \{0, 1, 2, 3\},\ \cdots$$

따라서 $\mathbb{R}^3$는 정의역이 $\{0, 1, 2\}$이고 공역이 $\mathbb{R}$인 함수들을 모두 모은 집합이라고 생각할 수 있다. 이것은 앞서 언급한 것처럼 순서쌍 (a, b, c)를 $0 \mapsto a,\ 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c$인 함수로 생각하는 것과 일치한다. □

1.5 순서집합

반사적이고 반대칭적이며 추이적인 관계를 순서관계라고 부른다. 예를 들어 $\leq$는 $\mathbb{R}$에서의 순서관계이다. 순서관계 $\leq$가 주어진 집합 A를 **순서집합**(ordered set)이라고 부르고 $\langle A, \leq \rangle$로 나타낸다. 혼동할 염려가 없을 때에는 $\langle A, \leq \rangle$를 그냥 A로 나타낸다.

순서집합 A의 원소 x, y에 대하여 $x \leq y$ 또는 $y \leq x$가 성립할 때 'x와 y는 **비교 가능하다**(comparable)'라고 말한다. 순서집합 A의 임의의 두 원소가 비교 가능할 때 A를 **전순서집합**(totally ordered set) 또는 **선형순서집합**(linearly ordered set)이라고 부른다.

보기 1.5.1 실수의 크기를 비교할 때 사용하는 부등호 $\leq$는 $\mathbb{R}$에서의 순서관계이다. 이 순서관계를 **자연순서**(natural order, canonical order)라고 부른다. $A \subseteq \mathbb{R}$이고 $\leq_A \coloneqq \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$이면 $\leq_A$는 A에서의 순서관계가 된다. 이러한 관점에서 순서집합의 부분집합은 순서집합이다. □

보기 1.5.2 정수론에서는 두 정수 m, n에 대하여 m이 n의 약수일 때 $m \mid n$으로 나타낸다. [$m|n$은 'm이 n을 나눈다'라고 읽는다.] 이때 $|$는 자연수 집합에서의 순서관계가 된다. 왜냐하면

- 임의의 자연수 n에 대하여 $n|n$이다,
- 자연수 m, n, k에 대하여 $m|n$이고 $n|k$이면 $m|k$이다,
- 자연수 m, n에 대하여 $m|n$이고 $n|m$이면 $m = n$이다

가 모두 성립하기 때문이다. 그러나 $|$는 자연수 집합에서 전순서관계가 아니다. 왜냐하면 3과 4는 서로 약수이거나 배수인 관계가 아니므로 비교 가능하지 않기 때문이다. □

보기 1.5.3 A가 집합족이라고 하자. 이때 부분집합관계 $\subseteq$는 A에서의 순서관계가 된다. 왜냐하면

- 임의의 집합 S에 대하여 $S \subseteq S$이다,
- 집합 S_1, S_2, S_3에 대하여, $S_1 \subseteq S_2$이고 $S_2 \subseteq S_3$이면 $S_1 \subseteq S_3$이다,
- 집합 S_1, S_2에 대하여, $S_1 \subseteq S_2$이고 $S_2 \subseteq S_1$이면 $S_1 = S_2$이다

가 모두 성립하기 때문이다. A가 어떤 집합인지에 따라서 $\subseteq$는 전순서관계가 될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 예를 들어

$$A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{1,\ 2\}\}$$

이면 $\subseteq$는 A에서의 전순서관계이다. 그러나 만약

$$A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$$

이면 $\subseteq$는 A에서의 전순서관계가 아니다. □

위 보기에서 보다시피 특정한 집단에서는 모든 대상을 한 줄로 세울 수 있는 기준일지라도 집단이 달라지면 동일한 기준으로 대상을 한 줄로 세울 수 없는 경우가 있다. 따라서 우리는 세상을 살면서 얻은 자신의 기준으로 모든 것을 비교하려고 하지 말아야 한다.

보기 1.5.4 사전에는 단어가 순서대로 정렬되어 있다. 두 단어의 첫 글자가 다르면 첫 글자에 따라 단어의 순서가 정해지지만, 첫 글자가 같으면 두 번째 글자에 따라 단어의 순서가 정해진다. 두 순서쌍의 순서를 비교할 때에도 비슷한 방법을 사용할 수 있다.

순서집합 $\langle A,\ \leq \rangle$, $\langle B,\ \leqq \rangle$가 주어졌다고 하자. 이제 집합 $A \times B$에 다음과 같은 관계를 주자.

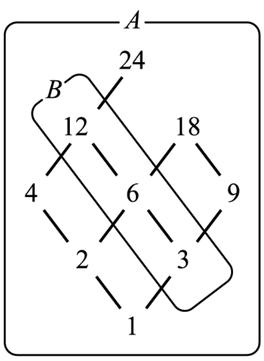
$$(x_1,\ y_1) \leqslant (x_2,\ y_2) \Leftrightarrow ((x_1 \leq x_2\ \wedge\ x_1 \neq x_2)\ \vee\ (x_1 = x_2\ \wedge\ y_1 \leqq y_2))$$

이러한 순서관계 $\leqslant$를 **사전식 순서**(lexicological order)라고 부른다. □

순서집합의 구조를 그림으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 집합

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24\},\ B = \{3,\ 6,\ 12\},$$

에 보기 1.5.2에서와 같은 순서관계 $|$가 주어졌다고 하자. 이때 순서집합 A, B의 구조를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



위 그림에서 관계가 있는 모든 원소가 직접 연결되어 있는 것은 아니다. 예를 들어 6은 24의 약수이지만 12를 통해 연결되어 있으므로 6과 24는 직접 연결하지 않는다.

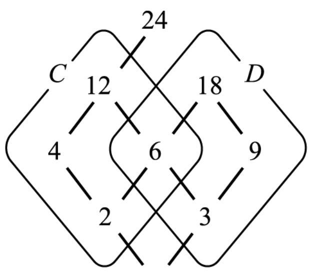
앞의 그림에서 A는 전순서집합이 아니지만 부분집합 B는 전순서집합이다. 이렇게 순서집합의 전순서부분집합을 **사슬**(chain) 또는 **쇄**라고 부른다. 즉 B는 A의 사슬이다.

순서집합 $\langle A, \leq \rangle$, $\langle B, \leqq \rangle$에 대하여

$$\forall x, y \in A : (x \leq y \rightarrow f(x) \leqq f(y))$$

를 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow B$를 **순서보존함수** 또는 **증가함수**라고 부른다. 만약 $f : A \rightarrow B$가 일대일대응이고 f와 f^{-1}가 모두 순서를 보존하면 f를 **순서동형사상**(order-isomorphism)이라고 부르고 이때 'A와 B는 **순서동형**(isomorphic)이다'라고 말한다. 두 집합 A, B가 순서동형인 것을 $A \cong B$로 나타낸다. 순서집합들을 모은 집합족에서 순서동형관계는 동치관계이다.

보기 1.5.5 집합 $C = \{2, 4, 6, 12\}$, $D = \{3, 6, 9, 18\}$에 순서관계가 다음과 같이 정의되었다고 하자.



이때 C와 D는 서로 다른 원소를 가진 집합이지만, 서로 동일한 순서구조를 가지고 있다. 즉 C로부터 D로의 함수 $f : C \rightarrow D$를

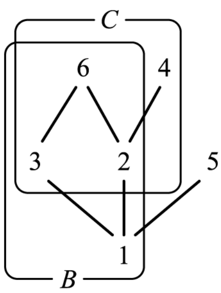
$$f(2) = 3, \quad f(4) = 9, \quad f(6) = 6, \quad f(12) = 18$$

이라고 정의하면 f는 C로부터 D로의 순서동형사상이 된다. 따라서 C와 D는 순서동형이다. □

직관적으로 동형이란 두 집합의 구조가 동일한 것을 의미한다. 위 보기에서 집합 C, D는 다른 원소를 가지고 있지만 순서집합이라는 관점에서는 서로 같다고 할 수 있다. 특히 C의 원소 12는 D의 원소 18과 동일한 역할을 한다고 볼 수 있다. 문학에서 사용하는 비유도 동형인 두 집단에서의 동일한 역할을 하는 두 원소를 대응시키는 함수라고 생각할 수 있다.

다음으로 순서집합의 원소와 관련된 용어를 살펴보자.

전체집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 두 집합 $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{2, 3, 4, 6\}$에 다음 그림과 같은 순서관계가 주어졌다고 하자.



이때 6은 B의 원소 중에서 가장 큰 원소이고 1은 B의 원소 중에서 가장 작은 원소이다. 이러한 원소를 각각 최대원소, 최소원소라고 부른다.

즉 M이 순서집합 B의 원소이고 $\forall x \in B : x \leq M$이 성립하면 M을 B의 **최대원소** 또는 **끝 원소**라고 부른다. 또한 m이 순서집합 B의 원소이고 $\forall x \in B : m \leq x$가 성립하면 m을 B의 **최소원소** 또는 **첫 원소**라고 부른다.

한편 집합 C는 최대원소나 최소원소를 갖지 않는다. 6은 C의 최대원소처럼 보이지만 4와 6은 비교 가능하지 않기 때문에 어느 쪽이 더 크다고 할 수 없다. 그러나 C의 원소 중에는 4보다 큰 원소도 없고 6보다 큰 원소도 없다. 이러한 원소를 극대원소라고 부른다. 즉 b가 순서집합 C의 원소이고

$$\forall x \in C : (b \leq x \rightarrow b = x)$$

가 성립하면 b를 C의 **극대원소**라고 부른다. 위 명제는 'C의 원소 중에서 b 이상인 원소는 b 자신밖에 없다'라는 의미이다. 마찬가지로 a가 순서집합 C의 원소이고

$$\forall x \in C : (x \leq a \rightarrow x = a)$$

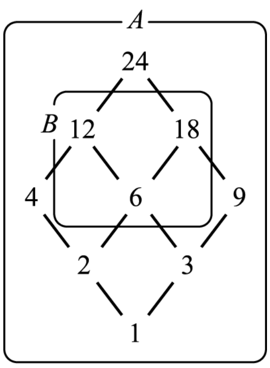
가 성립하면 a를 C의 **극소원소**라고 부른다.

정의에 의하여 최대원소와 최소원소는 각각 극대원소와 극소원소가 된다. 즉 집합 B에서 6은 최대원소인 동시에 극대원소이며 1은 최소원소인 동시에 극소원소이다.

보기 1.5.6 실수 집합 $\mathbb{R}$에 자연순서가 주어져 있고 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$에 사전식 순서가 주어져있다고 하자. 그리고 집합 $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$이 주어졌다고 하자. 즉 B는 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원의 내부와 경계를 포함하는 집합이다. 이때 $(1, 0)$은 B의 최대원소이며 $(-1, 0)$은 B의 최소원소이다. □

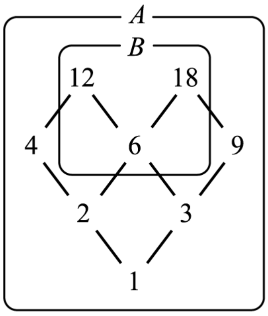
A가 순서집합이고 $B \subseteq A$라고 하자. 만약 u가 A의 원소이고 $\forall x \in B : x \leq u$가 성립하면 u를 B의 **상계**라고 부른다. 또한 v가 A의 원소이고 $\forall x \in B : v \leq x$가 성립하면 v를 B의 **하계**라고 부른다. 상계를 갖는 집합을 **위로 유계인 집합**이라고 부르며 하계를 갖는 집합을 **아래로 유계인 집합**이라고 부른다. 상계 중 가장 작은 것을 **최소상계** 또는 **상한**이라고 부르며 하계 중 가장 큰 것을 **최대하계** 또는 **하한**이라고 부른다.

보기 1.5.7 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24\}$, $B = \{6, 12, 18\}$에 다음 그림과 같은 순서관계가 주어졌다고 하자.



이때 B의 상계는 24이고 하계는 1, 2, 3, 6이다. 6은 B에 속하는 하계이지만 1, 2, 3은 B에 속하지 않는 하계이다. B의 상한은 24이고 하한은 6이다. □

보기 1.5.8 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\}$, $B=\{6,\ 12,\ 18\}$에 다음 그림과 같은 순서관계가 주어졌다고 하자.



이때 B의 상계와 상한은 존재하지 않는다. 즉 B는 위로 유계가 아니다. □

위 두 개의 보기를 통해 다음 사실을 알 수 있다.

- 상계와 하계가 항상 존재하는 것은 아니다.
- 상계와 하계는 각각 하나씩 존재할 수도 있고 여러 개가 존재할 수도 있다.
- 상계와 하계는 그 집합에 속할 수도 있고 속하지 않을 수도 있다.
- 동일한 집합일 지라도 그것을 포함하는 전체집합이 달라지면 상계와 하계가 달라질 수 있다.

보기 1.5.9 자연순서가 주어진 실수 집합 $\mathbb{R}$의 반열린구간 $[0,\ 1)$은 유계이다. 이 집합의 하한은 0이고 상한은 1이다. 이 집합의 최솟값은 0이지만 최댓값은 존재하지 않는다. □

순서집합 A에 대하여, A의 공집합 아닌 모든 부분집합이 단 하나의 극소원소를 가지면 A를 **정렬집합**(well-ordered set)이라고 부른다.

보기 1.5.10 자연순서가 주어진 자연수 집합 $\mathbb{N}$은 정렬집합이다. 왜냐하면 자연수만으로 이루어지고 공집합 아닌 집합은 항상 최소원소를 갖기 때문이다. 반면 정수 집합 $\mathbb{Z}$는 정렬집합이 아니다. 왜냐하면 모든 음의 정수의 집합은 $\mathbb{Z}$의 부분집합이고 공집합이 아니지만 극소원소를 갖지 않기 때문이다. □

보기 1.5.11 모든 양의 실수의 집합 $\mathbb{P}$에 자연순서가 주어져 있을 때 $\mathbb{P}$는 정렬집합이 아니다. 왜냐하면 반열린구간 $(1,\ 2]=\{x\,|\,1<x\le 2\}$는 $\mathbb{P}$의 부분집합이고 공집합이 아니지만 극소원소를 갖지 않기 때문이다.
□

참고로 **모든 정렬집합은 전순서집합이다.** 즉 $\langle A,\ \le\rangle$가 정렬집합이라고 하자. 그리고 x, y가 A의 임의의 원소라고 하자. 그러면 $\{x,\ y\}$는 A의 공집합 아닌 부분집합이다. 만약 x와 y가 비교 가능하지 않다면 x와 y는 모두 $\{x,\ y\}$의 극소원소가 된다. 그런데 A는 정렬집합이므로 $\{x,\ y\}$의 극소원소는 유일하다. 이것은 모순이므로 x와 y는 비교 가능하다.

그러나 모든 전순서집합이 정렬집합인 것은 아니다. 예를 들어 자연순서가 주어진 집합 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$는 전순서집합이지만 정렬집합이 아니다.

1.6 선택 공리

네 집합

$$A_1 = \{1,\ 2\},\ A_2 = \{2,\ 3,\ 4\},\ A_3 = \{2,\ 4\},\ A_4 = \{1,\ 3,\ 5\}$$

를 원소로 갖는 집합족 $F = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$가 주어졌다고 하자. 이때 우리는 F의 각 원소에서 원소를 하나씩만 택하여 만든 집합을 생각할 수 있다. 예를 들어

$$1 \in A_1,\ 3 \in A_2,\ 4 \in A_3,\ 1 \in A_4$$

를 택하여 $\{1,\ 3,\ 4\}$를 구성할 수 있다. 집합족 F가 무한집합인 경우에도 이와 같은 방법으로

'F의 각 원소에서 원소를 하나씩만 택하여 만든 집합이 존재한다'

라는 것을 보장할 수 있을까? 이 명제는 처음에는 집합론의 다른 공리를 이용하여 증명 가능한 것이라고 생각되었다. 그러나 1963년 코헨(Paul Cohen)에 의하여 이 명제는 집합론의 다른 공리를 이용하여 증명되지 않는다는 것이 밝혀졌다. 따라서 우리는 이 명제를 선택 공리라고 부르고 참인 명제로 받아들이기로 약속한다.

선택 공리의 논리적 진술은 다음과 같다. 집합 A에 대하여 $\wp^*(A) := \wp(A) \setminus \{\varnothing\}$이라고 하자. 조건

$$\forall B \in \wp^*(A) : \mathrm{r}(B) \in B$$

를 만족시키는 함수 $\mathrm{r} : \wp^*(A) \to A$를 A의 **선택함수**(choice function)라고 부른다. 이때 명제

'임의의 집합에 대한 선택함수가 존재한다'

를 **선택 공리**(axiom of choice)라고 부른다.

보기 1.6.1 서로 다른 세 원소를 가진 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$의 공집합이 아닌 부분집합은

$$B_1 = \{a\},\ B_2 = \{b\},\ B_3 = \{c\},\ B_4 = \{a,\ b\},\ B_5 = \{a,\ c\},\ B_6 = \{b,\ c\},\ B_7 = \{a,\ b,\ c\}$$

이다. 즉 $\wp^*(A) = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ B_7\}$이다. 이때 함수 $\mathrm{r} : \wp^*(A) \to A$를

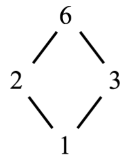
$$\mathrm{r}(B_1) = a,\ \mathrm{r}(B_2) = b,\ \mathrm{r}(B_3) = c,\ \mathrm{r}(B_4) = a,\ \mathrm{r}(B_5) = c,\ \mathrm{r}(B_6) = c,\ \mathrm{r}(B_7) = a$$

라고 정의하면, 임의의 $B_i \in \wp^*(A)$에 대하여 $\mathrm{r}(B_i) \in B_i$가 성립하므로 r는 A의 선택함수이다. 참고로 A의 원소가 3개일 때 A의 선택함수는 24개가 존재한다. □

다음은 선택공리와 동치인 명제들이다.

- 순서집합 A의 모든 선형부분집합들의 모임 P에 관계 $\subseteq$이 부여된 순서집합 $\langle P,\ \subseteq \rangle$은 극대원소를 가진다. 이 명제를 **하우스도르프**(Hausdorff)**의 극대 원리**라고 부른다.
- 순서집합 A의 임의의 선형부분집합이 상계를 가지면 A는 극대원소를 가진다. 이 명제를 **조른**(Zorn)**의 보조정리** 또는 조른의 원리라고 부른다.
- 임의의 집합 A에 대하여 $\langle A,\ \leq \rangle$가 정렬집합이 되도록 하는 순서관계 $\leq$가 존재한다. 이 명제를 **제르멜로**(Zermelo)**의 정렬 정리**라고 부른다.

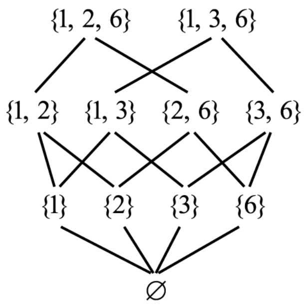
보기 1.6.2 유한집합에서 극대 원리를 확인해보자. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$에 다음과 같은 순서관계가 주어졌다고 하자.



A의 선형부분순서집합들을 모두 나열하면 다음과 같다.

$$\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{6\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 6\}$$

이 집합들을 모두 원소로 갖는 집합을 P라고 하자. 그리고 P에 순서관계 $\subseteq$이 주어졌다고 하자. P의 원소들의 순서관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 P는 $\{1,\ 2,\ 6\}$과 $\{1,\ 3,\ 6\}$을 극대원소로 가진다. □

보기 1.6.3 앞의 보기 1.6.2에서 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$은 정렬집합이 아니다. 왜냐하면 $\{2,\ 3\}$은 A의 공집합이 아닌 부분집합이지만 극소원소가 2와 3으로서 유일하지 않기 때문이다. 그러나 A에 자연순서를 부여하면 A는 정렬집합이 된다. □

집합 A에 적절한 순서관계를 정의하여 A가 정렬집합이 되도록 할 수 있으면 'A는 **정렬 가능하다**'라고 말한다. 정렬 정리에 의하면 임의의 집합은 정렬 가능하다. 그러나 정렬 정리는 집합의 정렬 가능성을 보장할 뿐, 실제로 그 집합에 어떠한 순서관계를 부여해야 정렬집합이 되는지에 대한 정보를 주지는 않는다. 예를 들어 정렬 정리에 의하여 실수 집합 $\mathbb{R}$는 정렬 가능하지만 어떠한 순서관계가 $\mathbb{R}$를 정렬집합이 되도록 하는지는 알려져 있지 않다.

1.7 집합의 크기

두 집합 A, B가 유한집합일 때에는 각각의 원소의 개수를 세어 어느 것이 더 많은 원소를 가지고 있는지 비교할 수 있다. 그러나 무한집합의 경우에는 원소의 개수를 직접 세는 방법으로 비교할 수 없다. 대신 두 집합 사이에 원소를 하나씩 대응시켜 어느 쪽이 더 많은지 비교할 수 있다.

두 집합 A, B에 대하여 일대일대응 $f: A \to B$가 존재할 때 'A와 B는 **대등하다**(equinumerous)'라고 말하고 이것을 기호로 $A \approx B$로 나타낸다. 대등하다는 것을 '크기가 같다' 또는 '농도가 같다'라고 표현하기도 한다.

일대일대응의 성질에 의하여 대등관계는 다음을 만족시킨다.

- 임의의 집합 A에 대하여 $A \approx A$이다.
- 집합 A, B에 대하여 $A \approx B$이면 $B \approx A$이다.
- 집합 A, B, C에 대하여 $A \approx B$이고 $B \approx C$이면 $A \approx C$이다.

이러한 관점에서 대등관계는 임의의 집합족의 동치관계이다.

집합 E에 대하여 0 이상인 정수 n이 존재하여 $E \approx \{0, 1, 2, \cdots, n\}$을 만족시키거나 $E = \varnothing$이면 E를 **유한집합**이라고 부른다. $\omega \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 0\}$, $\omega_n \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k < n\}$이라고 하자. 그러면 E가 유한집합이라는 것은

$$\exists n \in \omega : E \approx \omega_n$$

인 것과 동치이다. 유한집합이 아닌 집합을 **무한집합**이라고 부른다.

$\mathbb{N}$이 자연수 집합이고 E가 무한집합이라고 하자. E는 공집합이 아니므로 $x_1 \in E$가 존재한다. $E \setminus \{x_1\}$은 공집합이 아니므로 $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$이 존재한다. $E \setminus \{x_1, x_2\}$는 공집합이 아니므로 $x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$가 존재한다. 일반적으로 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 E의 서로 다른 원소일 때 $x_{n+1} \in E \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$이 존재한다. 이와 같은 방법으로 구성된 집합 $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$은 명백히 $\mathbb{N}$과 대등한 집합이다. 즉 임의의 무한집합은 자연수 집합과 대등한 부분집합을 가진다.

자연수 집합과 대등한 집합을 **가부번집합**(enumerable set)이라고 부른다. 가부번집합은 무한집합 중에서 가장 작은 집합이다. 즉 E가 무한집합이면 E는 자연수 집합과 대등한 부분집합을 가진다. 유한집합과 가부번집합을 통틀어 **가산집합**(countable set)이라고 부른다.

다음은 유한집합과 무한집합에 관련된 몇 가지 성질이다.

- E가 무한집합일 필요충분조건은 가부번인 부분집합을 갖는 것이다.
- E가 무한집합이고 F가 유한집합이면 $E \approx E \setminus F$이다.
- E가 무한집합이고 $E \subseteq D$이면 D도 무한집합이다.
- A와 B가 유한집합이면 $A \times B$도 유한집합이다.
- A와 B가 가산집합이면 $A \times B$도 가산집합이다.
- A가 유한집합이면 $\wp(A)$도 유한집합이다.
- 정의역이 A이고 공역이 $\{0, 1\}$인 함수들의 모임을 2^A로 나타내자. 이때 $2^A \approx \wp(A)$이다.
- 집합족 $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$의 모든 원소 A_i가 가산집합이면 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$도 가산집합이다.

정수 집합 $\mathbb{Z}$는 가산집합이다. 왜냐하면 $\mathbb{Z}$의 모든 원소를

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \cdots$$

와 같이 빠짐없이 한 줄로 나열할 수 있기 때문이다. 한 줄로 나열할 수 있다는 것은 순서대로 자연수를 하나씩 대응시킬 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{N}$과 대등하다. 마찬가지로 유리수 집합 $\mathbb{Q}$도 가산집합이다. 유리수를 기약분수로 나타내었을 때 분모와 분자의 절댓값의 합이 작은 것부터 차례대로 쓰면

$$0, -\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, \frac{3}{1}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \cdots$$

와 같이 모든 유리수가 빠짐없이 나열된다.

그러나 실수 집합 $\mathbb{R}$ 는 가산집합이 아니다. 만약 $\mathbb{R}$ 가 가산집합이라면 부분집합인 열린구간 $I=(0,\ 1)$도 가산집합이다. 그러면 I의 모든 원소를

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots$$

와 같이 빠짐없이 나열할 수 있다. 각 x_n은 0보다 크고 1보다 작은 실수이므로 정수부분이 0인 소수로 나타낼 수 있다. 특히 x_n이 유한소수인 경우에는 마지막 자리에서 1을 빼고 그 뒤에 9를 무한히 이어 써서 동일한 수를 나타낼 수 있다. 이제 x_n의 소수점 아래 m번째 자리 수를 $x_{(n,m)}$이라고 하면, I의 원소를

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.x_{(1,1)}\,x_{(1,2)}\,x_{(1,3)}\,x_{(1,4)}\cdots\\
x_2 &= 0.x_{(2,1)}\,x_{(2,2)}\,x_{(2,3)}\,x_{(2,4)}\cdots\\
x_3 &= 0.x_{(3,1)}\,x_{(3,2)}\,x_{(3,3)}\,x_{(3,4)}\cdots\\
x_4 &= 0.x_{(4,1)}\,x_{(4,2)}\,x_{(4,3)}\,x_{(4,4)}\cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

와 같이 나열할 수 있다. 이때 자연수 i에 대하여 y_i를

$$y_i := \begin{cases} 1 & \text{if } x_{(i,i)} \neq 1 \\ 3 & \text{if } x_{(i,i)} = 1 \end{cases}$$

이라고 정의하고 소수 y를

$$y := 0.y_1\,y_2\,y_3\,y_4\cdots$$

라고 정의하자. 명백히 y는 0보다 크고 1보다 작은 수이므로 I의 원소이다. 그러나 임의의 자연수 i에 대하여 $y_i \neq x_{(i,\,i)}$이므로 $y \neq x_i$이다. 즉 y는 어떠한 x_i와도 같지 않다. 이것은 I의 모든 원소를 x_i 꼴로 나열했다는 것에 모순이다. 따라서 I는 가산집합이 아니다. I는 $\mathbb{R}$ 의 부분집합이므로 $\mathbb{R}$ 도 가산집합이 아니다. 이와 같이 가산집합이 아닌 집합을 **비가산집합**(uncountable set)이라고 부른다.

열린구간 $I=(0,\ 1)$은 $\mathbb{R}$ 와 대등하다. 왜냐하면 함수 $f : I \to \mathbb{R}$ 를

$$f(x) = \tan\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{또는} \quad f(x) = \frac{1-2x}{x(x-1)}$$

로 정의하면 f는 I로부터 $\mathbb{R}$ 로의 일대일대응이 되기 때문이다.

두 집합 A, B에 대하여 일대일함수 $f : A \to B$가 존재할 때 'B가 A보다 크거나 또는 둘의 크기가 같다'라고 말하고 $A \preccurlyeq B$로 나타낸다. 그리고 $A \preccurlyeq B$이면서 $A \not\approx B$인 것을 $A \prec B$로 나타낸다. **칸토어-베른슈타인**(Cantor-Bernstein) **정리**에 의하면 두 집합 A, B에 대하여 $A \preccurlyeq B$이면서 동시에 $B \preccurlyeq A$이면 $A \approx B$가 성립한다. [문제 27 참조] 이러한 의미에서 $\preccurlyeq$ 는 임의의 집합족의 순서관계이다.

이제 $I=(0,\ 1)$과 I^2이 대등함을 보이자. I^2의 원소 w가 임의로 주어졌다고 하자. w의 x좌표와 y좌표를 각각 무한소수로 표현한 순서쌍을

$$w = (0.x_1\,x_2\,x_3\cdots,\ 0.y_1\,y_2\,y_3\cdots)$$

으로 나타내자. 그리고

$$z = 0.x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\cdots$$

으로 정의하자. 이때 w를 z에 대응시키는 함수 $f : w \mapsto z$는 I^2으로부터 I로의 일대일함수이다. 따라서 $I^2 \preccurlyeq I$이다. 한편 명백히 $I \preccurlyeq I^2$이다. 그러므로 칸토어-베른슈타인 정리에 의하여 $I \approx I^2$이 성립한다.
[참고로 임의의 무한집합 E와 자연수 n에 대하여 $E \approx E^n$이 성립한다.]

복소수 집합 $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R}^2$와 대등하다. 즉, 임의의 복소수 z에 대하여 $z=a+b\boldsymbol{i}$를 만족시키는 실수 a, b가 각각 유일하게 존재한다. 이때 $a+b\boldsymbol{i}$를 순서쌍 $(a,\ b)$에 대응시키면 $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R}^2$와 대등하다는 것을 알 수 있다. 한편 $\mathbb{R}$ 는 $I=(0,\ 1)$과 대등하고 $\mathbb{R}^2$은 I^2과 대등하므로 $\mathbb{R} \approx I \approx I^2 \approx \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ 를 얻는다.

지금까지 살펴본 바에 의하면

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} < \mathbb{R} \approx \mathbb{C}$$

이다. 그렇다면 $\mathbb{R}$ 보다 더 큰 집합이 존재할까?

칸토어의 정리(Cantor's theorem)에 의하면 임의의 집합 E에 대하여 멱집합 $\wp(E)$는 E보다 크다. 이것을 증명해 보자. 만약 $E \approx \wp(E)$라면 일대일대응 $\phi : E \rightarrow \wp(E)$가 존재한다. $B=\{x \in E \mid x \not\in \phi(x)\}$라고 하면 $B \subseteq E$이다. 따라서 $B=\phi(y)$인 $y \in E$가 존재한다. $y \in \phi(y)$라고 가정하면 $y \not\in B$이므로 $y \not\in \phi(y)$가 되어 모순이다. $y \not\in \phi(y)$라고 가정하면 $y \in B$이므로 $y \in \phi(y)$가 되어 모순이다. 어느 경우에나 모순이므로 일대일대응 $\phi : E \rightarrow \wp(E)$는 존재할 수 없다. 따라서 $E < \wp(E)$이다.

이로써 칸토어의 정리에 의하여 다음을 얻는다.

$$\mathbb{R} < \wp(\mathbb{R}) < \wp(\wp(\mathbb{R})) < \wp(\wp(\wp(\mathbb{R}))) < \cdots$$

즉 무한집합의 종류는 무한히 많다.

한편 $\mathbb{R} \approx \wp(\mathbb{Q})$가 성립한다. 이것은 연속함수의 성질을 이용하여 증명되는데, 여기서는 그 증명을 간단히 살펴보자. 함수 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \wp(\mathbb{Q})$를 $\phi(x)=\{t \in \mathbb{Q} \mid t<x\}$라고 정의하자. 명백히 ϕ는 일대일함수이다. 즉 $\mathbb{R} \preccurlyeq \wp(\mathbb{Q})$이다. 다음으로 함수 $\psi : \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 임의의 $f \in \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$ 에 대하여

$$\psi(f)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{10^n}$$

으로 정의하자. 즉 정수부분이 0이고 소수점 아래 n번째 자리의 숫자가 $f(n)$인 소수를 $\psi(f)$의 값으로 정의한다. 그러면 ψ는 일대일함수이다. 즉 $\mathbb{R} \succcurlyeq \wp(\mathbb{Q})$이다. 따라서 칸토어-베른슈타인 정리에 의하여 $\mathbb{R}$ 는 $\wp(\mathbb{Q})$와 대등하다.

이제 또 하나의 의문이 생긴다. $\mathbb{Q} < S < \mathbb{R}$ 인 집합 S가 존재하는가? 일반화시켜 생각해보면

임의의 무한집합 E에 대하여 $E < S < \wp(E)$인 집합 S가 존재하는가?

라는 의문이 생긴다. 20세기 초까지 많은 수학자들이 그러한 집합 S는 존재하지 않을 것이라고 추측하였는데, 이러한 추측을 **연속체 가설**(continuum hypothesis)이라고 부른다. 1938년 괴델(Kurt Gödel)은 연속체 가설이 집합론의 공리에 모순이 되지 않는다는 것을 증명하였으며, 1963년 코헨(Paul Cohen)은 연속체 가설이 기존의 집합론의 공리와 독립적임을 증명하였다. 즉 연속체 가설은 선택 공리와 마찬가지로 그것을 참으로 받아들이든 그것을 부정하든 전혀 모순이 발생하지 않는다.

참고로 괴델(Kurt Gödel)은 자연수를 다룰 수 있는 모든 수학 공리계[즉 페아노 산술을 포함하는 일차논리 공리계]에는 참 또는 거짓 여부를 증명할 수 없는 명제가 존재함을 증명하였는데 이것을 **불완전성 정리**(incompleteness theorem)라고 부른다.

이처럼 연역적 사고와 논리적 추론을 통한 진리를 추구하는 수학에서도 참 또는 거짓 여부를 증명할 수 없는 명제가 항상 존재하는데, 세상에는 모든 것의 옳고 그름을 지나치게 따지는 사람들이 있다는 사실이 참 안타깝다. 심지어는 자신과 생각이 다르면 둘 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 믿는 사람들도 있다. 우리는 살아가면서 옳고 그름만을 따지기보다는 서로를 이해하고 더 나은 방향으로 나아가기 위하여 노력해야 할 것이다.

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 다음 논리식의 진리표를 작성하여라.

(1) $(p \wedge q) \wedge r$

(2) $p \wedge (q \wedge r)$

(3) $(p \vee \sim q) \wedge r$

(4) $\sim(p \wedge q) \vee r$

(5) $p \leftrightarrow q$

(6) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

2. p가 '나는 고양이다', q가 '나는 가볍다'일 때, 다음 식을 자연스러운 문장으로 만들어라.

(1) $p \vee q$

(2) $p \wedge q$

(3) $p \rightarrow q$

(4) $\sim p \rightarrow \sim q$

(5) $\sim q \rightarrow \sim p$

(6) $\sim p \wedge q$

3. p가 '나는 동물이다', q가 '나는 개미이다'일 때, 다음 문장을 기호를 사용하여 나타내어라.

(1) 나는 동물이지만 개미는 아니다.

(2) 나는 개미이므로 동물이다.

(3) 내가 개미이려면 나는 동물이어야 한다.

(4) 동물은 개미가 아니다.

4. 다음 문장의 부정을 말하여라.

(1) 토끼는 하얗지도 않고 귀엽지도 않다.

(2) 비가 내리면 우산이 잘 팔린다.

(3) 애인이 생기면 학업 성적이 좋아진다.

(4) 부업을 하면 돈은 벌지만 여유는 줄어든다.

5. 다음 문장의 부정을 말하여라.

(1) 모든 개미핥기는 파충류이다.

(2) 말 중에는 온순한 것도 있다.

(3) 수학자 중에는 사교적인 사람이 있다.

(4) 모든 강아지는 귀엽거나 똑똑하다.

(5) 헤엄치지 못하는 돌고래는 없다.

6. 집합 $\{1, \{2, 3\}\}$의 멱집합을 원소나열법으로 나타내어라.

7. 네 집합 $A_1=\{a, b\}$, $A_2=\{a, b, c\}$, $A_3=\{b, c, d\}$, $A_4=\{a, b, c, d\}$에 대하여 다음을 원소나열법으로 나타내어라. (단, a, b, c, d는 모두 다른 원소이다.)

(1) $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$

(2) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$

(3) $\bigcup_{k=1}^{4} \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

(4) $\bigcap_{k=1}^{4} \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

(5) $\bigcup_{k=1}^{4} \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

(6) $\bigcap_{k=1}^{4} \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

8. 두 조건 $n(A \times A)=9$, $\{(-1, 0), (0, 1)\} \subseteq A^2$을 모두 만족시키는 집합 A를 구하여 원소나열법으로 나타내어라.

9. 자연순서가 주어진 두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$에 대하여 $A \times B$에 사전식 순서가 주어졌다고 하자. 이때 $A \times B$의 원소를 작은 것부터 큰 것 순서로 나열하여라.

개념 응용하기

10. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A \;\Leftrightarrow\; B^c \subseteq A^c$

(2) $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subseteq C$

(3) $A \subseteq B \;\wedge\; A \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq (B \cap C)$

(4) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \wp(A) \subseteq \wp(B)$

(5) $A \cup B = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A = B$

(6) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(7) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (B \setminus A) \cup A = B$

11. A, B, C, D가 공집합이 아닌 집합이고 두 함수 $f : A \to B$, $g : B \to C$가 주어졌다고 하자. 이때 다음을 증명하여라.

(1) f와 g가 일대일함수이면 $g \circ f$도 일대일함수이다.

(2) f와 g가 위로의 함수이면 $g \circ f$도 위로의 함수이다.

(3) $g \circ f$가 일대일함수이면 f도 일대일함수이다.

(4) $g \circ f$가 위로의 함수이면 g도 위로의 함수이다.

(5) $A = B$이고 f가 일대일대응이면 $f \circ f^{-1}$는 항등함수이다.

12. 함수 $f : A \to B$와 네 집합 A_1, A_2, B_1, B_2가 주어졌다고 하자. 또한 A_1, A_2가 A의 부분집합이고 B_1, B_2는 B의 부분집합이라고 하자. 이때 다음을 증명하여라.

(1) $A_1 \subseteq A_2$이면 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$이다.

(2) $B_1 \subseteq B_2$이면 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$이다.

(3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(4) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

13. $\mathbb{Z}$가 정수 전체의 집합이고 $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$이라고 하자. X에서의 관계 R가

$$(a,\ b)R(c,\ d) \;\Leftrightarrow\; ad = bc$$

로 주어졌다고 하자. 이때 R가 동치관계임을 증명하고, $(1,\ 2)$의 동치류를 구하여라.

14. A, B가 집합이고 $f : A \to B$가 함수일 때 집합

$$R = \{(x,\ y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$$

가 A에서의 동치관계임을 증명하여라.

15. 집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$가 A의 분할이고 $f : A \to B$가 일대일함수이면 $\{f(A_i) \mid i \in I\}$는 $f(A)$의 분할임을 증명하여라.

16. A, B가 순서집합이고 $f : A \to B$가 순서보존함수일 때 다음을 증명하여라.

(1) a가 A의 최대원소이면 $f(a)$는 $f(A)$의 최대원소이다.

(2) $C \subseteq A$이고 c가 C의 상계이면 $f(c)$는 $f(C)$의 상계이다.

17. A, B가 순서집합이고 $f : A \to B$가 순서동형사상일 때 다음을 증명하여라.
   (1) a가 A의 극대원소일 필요충분조건은 $f(a)$가 B의 극대원소인 것이다.
   (2) a가 A의 최대원소일 필요충분조건은 $f(a)$가 B의 최대원소인 것이다.
   (3) $C \subseteq A$일 때 b가 C의 상계일 필요충분조건은 $f(b)$가 $f(C)$의 상계인 것이다.
   (4) $C \subseteq A$일 때 b가 C의 상한일 필요충분조건은 $f(b)$가 $f(C)$의 상한인 것이다.

18. A가 전순서집합이고 B가 순서집합이며 $f : A \to B$가 순서보존함수라고 하자. 만약 f가 일대일대응이면 f는 순서동형사상임을 증명하여라.

19. 집합 A, B에 대하여 $f : A \to B$가 위로의 함수이면 A의 부분집합 중에서 B와 대등한 것이 존재함을 증명하여라.

20. 집합 A, B에 대하여 다음을 증명하여라.
   (1) A가 무한집합일 필요충분조건은 A의 부분집합 중 가부번집합인 것이 존재하는 것이다.
   (2) A가 무한집합이고 B가 유한집합이면 $A \setminus B$는 무한집합이다.
   (3) A가 무한집합이고 $A \subseteq B$이면 B도 무한집합이다.
   (4) A와 B가 유한집합이면 $A \times B$도 유한집합이다.
   (5) A와 B가 가산집합이면 $A \times B$도 가산집합이다.

21. 집합 A에 대하여 $2^A \approx \wp(A)$임을 증명하여라.

22. 집합족 $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$의 모든 원소 A_i가 가산집합이면 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$도 가산집합임을 증명하여라.

실력 다지기

23. 두 첨수족 $\{A_i \mid i \in I\}$, $\{B_i \mid i \in I\}$에 대하여 다음이 성립하는지 판별하여라.
   (1) $\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i)$
   (2) $\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\prod_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i)$

24. A, B, C, D가 집합이고 $A \approx B$, $C \approx D$이며 $A \cap C = B \cap D = \varnothing$일 때 다음을 증명하여라.
   (1) $A \cup C \approx B \cup D$ (2) $A \times C \approx B \times D$ (3) $A^C \approx B^D$

25. A, B, C가 집합이고 B와 C가 서로소일 때 다음을 증명하여라.
   (1) $A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C$ (2) $(A \times B)^C \approx A^C \times B^C$ (3) $(A^B)^C \approx A^{B \times C}$

26. $\mathbb{Q}$가 유리수 집합이고 $\mathbb{R}$가 실수 집합이라고 하자. 이때 유리수의 조밀성을 이용하여 $\mathbb{R} \approx \wp(\mathbb{Q})$임을 증명하여라.

27. X, Y가 집합이고 $X \preccurlyeq Y$이며 $Y \preccurlyeq X$라고 하자.
   (1) 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$가 주어졌을 때, 여섯 개의 조건
   $$A \cup B = X,\ C \cup D = Y,\ A \cap B = \varnothing,\ C \cap D = \varnothing,\ f(A) = C,\ g(D) = B$$
   를 모두 만족시키는 집합 A, B, C, D가 존재함을 증명하여라.
   (2) X로부터 Y로의 일대일대응이 존재함을 증명하여라.

02 실수계의 성질

집합에 구조가 주어졌을 때 그 집합을 **계**(system)라고 부른다. 예를 들어 유리수 집합 $\mathbb{Q}$와 실수 집합 $\mathbb{R}$에 덧셈 연산, 곱셈 연산, 순서 관계가 주어졌을 때 $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{R}$를 각각 유리수계, 실수계라고 부른다.

실수계는 사칙계산을 자유롭게 할 수 있는 성질을 가지고 있으며, 극한을 자유롭게 다룰 수 있는 완비의 성질도 가지고 있다. 해석학의 주된 내용은 극한을 이용하여 다양한 함수의 성질을 밝히는 것이므로 실수계의 성질은 해석학의 여러 이론을 전개하는 데에 기초가 된다.

이 장에서는 실수계의 정의와 해석학에서 자주 사용되는 실수의 성질을 살펴본다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 공리를 이용한 실수계의 정의를 말할 수 있다.
- 완비성의 의미를 설명하고 완비인 집합과 완비가 아닌 집합을 구분할 수 있다.
- 수학적 귀납법을 이용하여 정의역이 자연수 집합인 명제가 참임을 증명할 수 있다.
- 열린집합과 닫힌집합의 개념을 설명하고 그와 관련된 성질을 증명할 수 있다.

2.1 실수계의 체 공리

실수계는 덧셈과 곱셈을 자유롭게 할 수 있는 성질을 가지고 있다. 또한 실수계에서는 임의의 두 실수의 크기를 비교할 수 있으며 극한도 자유롭게 사용할 수 있다. 적절한 공리를 이용하여 이러한 성질을 갖는 실수계를 정의할 수 있다. 이들 공리는 성질에 따라서 체 공리, 순서 공리, 상한 공리로 나뉜다. 이 절에서는 체 공리를 살펴보자.

체 공리를 살펴보기에 앞서 중요한 용어를 정의하자. E가 집합이고 ϕ가 E^2으로부터 E로의 함수일 때 ϕ를 E 위에서의 **이항연산**(binary operation)이라고 부른다. 예를 들면 우리가 일상적으로 사용하는 덧셈, 뺄셈, 곱셈은 모두 실수 집합 $\mathbb{R}$에서의 이항연산이다. ϕ가 E 위에서의 이항연산이고 a와 b가 E의 원소일 때, 보통 $\phi(a,\ b) = c$를 $a\,\phi\,b = c$로 나타낸다. 예를 들면 '2와 3의 합은 5이다'를 함수의 표기법대로 나타내면 $+(2,\ 3) = 5$이지만, 보통은 $2+3=5$로 나타낸다.

E가 수의 집합일 때 E에서 0을 제외한 집합을 E^*로 나타낸다. 이를테면 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$이다.

이제 실수계의 체 공리를 살펴보자. 다음 공리에서 실수 집합, 덧셈, 0, 곱셈, 1은 무정의 용어이다.

공리 2.1.1 실수계의 체 공리 (Field Axioms)

실수 집합 $\mathbb{R}$에 덧셈이라고 불리는 이항연산 $+$와 곱셈이라고 불리는 이항연산 $\cdot$가 주어져 있으며 이들은 다음과 같은 아홉 개의 법칙을 만족시킨다.

(A1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x+y)+z = x+(y+z)$ (덧셈의 결합법칙)

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x+y = y+x$ (덧셈의 교환법칙)

(A3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R} : x+0 = x$ (덧셈에 대한 항등원)

(A4) $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists x' \in \mathbb{R} : x+x' = 0$ (덧셈에 대한 역원)

(M1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (곱셈의 결합법칙)

(M2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (곱셈의 교환법칙)

(M3) $\exists 1 \in \mathbb{R}^* \; \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ (곱셈에 대한 항등원)

(M4) $\forall x \in \mathbb{R}^* \; \exists x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = 1$ (곱셈에 대한 역원)

(D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (분배법칙)

일반적으로 두 실수 x와 y의 곱 $x \cdot y$는 곱셈 기호를 생략하여 xy로 나타낸다. 덧셈과 곱셈이 혼합되어 있는 경우 곱셈을 먼저 계산하는 것으로 약속한다. 또한 실수의 연산과 관련된 용어는 다음과 같이 정의한다.

- 0을 **덧셈에 대한 항등원**이라고 부르며 1을 **곱셈에 대한 항등원**이라고 부른다.
- $x+x'=0$일 때 x'을 x**의 덧셈에 대한 역원**이라고 부르며 $-x$로 나타낸다.
- $xx'=1$일 때 x'을 x**의 곱셈에 대한 역원**이라고 부르며 x^{-1} 또는 $\dfrac{1}{x}$ 또는 $1/x$로 나타낸다. 곱셈에 대한 역원을 간단히 **역수**라고 부르기도 한다.
- $x+(-y)$를 $x-y$로 나타낸다. 또한 $x \cdot \dfrac{1}{y}$을 x/y 또는 $\dfrac{x}{y}$로 나타낸다.

등호는 항상 동치관계의 조건을 만족시키는 것으로 약속한다. 즉 등호는 반사적이고 대칭적이며 추이적인 관계이다. 또한 $a=b$는 a와 b가 집합의 원소로서 동일함을 의미한다. 즉 $a=b$와 $\{a\}=\{b\}$는 동치이다.

참고 2.1.2 덧셈에 대한 항등원과 곱셈에 대한 항등원은 각각 유일하다.

증명 0과 $0'$이 덧셈에 대한 항등원이라고 하자. 그러면 덧셈의 공리에 의하여 $0=0+0'=0'+0=0'$이 성립한다. 따라서 $0=0'$을 얻는다. 즉 덧셈에 대한 항등원은 유일하다.

다음으로 1과 $1'$이 곱셈에 대한 항등원이라고 하자. 그러면 곱셈의 공리에 의하여 $1=1 \cdot 1'=1' \cdot 1=1'$이 성립한다. 따라서 $1=1'$을 얻는다. 즉 곱셈에 대한 항등원은 유일하다. ■

참고 2.1.3 실수의 덧셈에 대한 역원은 유일하다. 또한 0이 아닌 실수의 곱셈에 대한 역원은 유일하다.

증명 실수 x가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 y와 y'이 x의 덧셈에 대한 역원이라고 하자. 그러면 $y=y+0=y+(x+y')=(y+x)+y'=0+y'=y'$이므로 $y=y'$이다.

이제 $x \neq 0$이고 z와 z'이 x의 곱셈에 대한 역원이라고 하자. 그러면 $z=z1=z(xz')=(zx)z'=1z'=z'$이므로 $z=z'$이다. ■

체 공리를 이용하여 우리가 일반적으로 사용하는 사칙계산의 여러 가지 성질을 유도할 수 있다.

예제 2.1.4 실수 x, y에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(i) $x \cdot 0 = 0$

(ii) $(-1)x = -x$

(iii) $(-x)(-y) = xy$

(iv) $-(-x) = x$

풀이 (i) 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + \{(x \cdot 0) + (-x \cdot 0)\} \\ &= (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot (0+0) + (-x \cdot 0) \\ &= x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x \cdot 0 = 0$이다.

(ii) 위 (i)을 이용하면 실수 x에 대하여

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1-1)x = 0x = 0$$

이므로 $(-1)x = -x$이다.

(iii) 위 (i), (ii)를 이용하면

$$\begin{aligned} (-1)(-1) &= (-1)(-1) + 0 = (-1)(-1) + \{(-1) + 1\} \\ &= \{(-1)(-1) + (-1)\} + 1 = \{(-1)(-1) + (-1) \cdot 1\} + 1 \\ &= (-1)\{(-1) + 1\} + 1 = (-1) \cdot 0 + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

이므로 $(-1)(-1) = 1$을 얻는다. 따라서 실수 x, y에 대하여

$$(-x)(-y) = \{(-1)x\} \cdot \{(-1)y\} = \{(-1)(-1)\} \cdot xy = 1 \cdot (xy) = xy$$

이므로 $(-x)(-y) = xy$이다.

(iv) 위 (ii), (iii)을 이용하면 $-(-x) = (-1)\{(-1)x\} = \{(-1)(-1)\}x = 1x = x$이다. □

예제 2.1.5 0이 아닌 실수 x, y에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(i) $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy}$

(ii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

풀이 (i) 곱셈의 교환법칙과 결합법칙에 의하여

$$\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot (xy) = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

이 성립한다. 즉 $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$는 xy의 곱셈에 대한 역원이다. 그런데 xy의 곱셈에 대한 역원은 $\dfrac{1}{xy}$로서 유일하므로 $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy}$이다.

(ii) 위 (i)과 곱셈의 성질, 그리고 결합법칙을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{x} = y \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\right) + x \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= y \cdot \frac{1}{xy} + x \cdot \frac{1}{xy} = (y+x) \cdot \frac{1}{xy} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy} \end{aligned}$$

□

2.2 실수계의 순서 공리

임의의 실수 x, y에 대하여 $x<y$, $x=y$, $x>y$ 중 하나가 반드시 성립한다. 즉 실수 집합은 전순서집합이다. 또한 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으며, 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. 이와 같은 내용을 바탕으로 실수계에서의 순서 관계를 정의한 것이 순서 공리이다.

공리 2.2.1 실수계의 순서 공리 (Order Axioms)

실수 집합 $\mathbb{R}$에 관계 $<$가 주어져 있으며, 이 관계는 다음 네 개의 법칙을 모두 만족시킨다.

(O1) 임의의 실수 x, y에 대하여 $x<y$, $x=y$, $y<x$ 중 하나가 성립한다. 그러나 셋 중 둘 이상이 동시에 성립하지는 않는다. (삼자택일법칙)

(O2) 실수 x, y, z에 대하여 $x<y$이고 $y<z$이면 $x<z$이다. (추이법칙)

(O3) 실수 x, y, z에 대하여 $x<y$이면 $x+z<y+z$이다. (평행이동법칙)

(O4) 실수 x, y, z에 대하여 $x<y$이고 $0<z$이면 $xz<yz$이다.

실수 x, y에 대하여 '$x<y$ 또는 $x=y$'를 간단하게 $x \le y$로 나타낸다. $x<y$와 $y>x$는 동일한 의미이며, $x \le y$와 $y \ge x$도 동일한 의미이다. $<$와 $\le$를 통틀어 **부등호**라고 부르며, 부등호가 가장 늦은 우선순위로서 들어간 식을 **부등식**이라고 부른다.

부등식 $x<y$가 성립할 때 'x보다 y가 크다' 또는 'x가 y보다 작다'라고 말한다. 0보다 큰 실수를 **양의 실수** 또는 간단히 **양수**라고 부르며, 0보다 작은 실수를 **음의 실수** 또는 간단히 **음수**라고 부른다. 양의 실수들의 모임을 $\mathbb{R}^+$로 나타내고 음의 실수들의 모임을 $\mathbb{R}^-$로 나타낸다. 정수 집합과 유리수 집합에 대해서도 마찬가지 방법으로 $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$를 정의한다.

보기 2.2.2 순서 공리를 이용하여 부등식 $0<1$을 증명해 보자. 먼저 체 공리의 (M3)에 의하여 $0 \ne 1$이다. 결론에 반하여 $1<0$이 성립한다고 가정하자. 양변에 -1을 더하면 (O3)에 의하여 $0<-1$을 얻는다. 그런데 예제 2.1.4에 의하여 $(-1)(-1)=1$이므로 $0<-1$의 양변에 -1을 곱하면 (O4)에 의하여 $0<1$을 얻는다. 그런데 (O1)에 의하여 $1<0$과 $0<1$은 동시에 성립할 수 없으므로 모순이다. □

순서 공리를 이용하여 우리가 일반적으로 사용하는 부등호의 여러 가지 성질을 유도할 수 있다.

예제 2.2.3 실수 x가 양수일 필요충분조건은 $-x$가 음수인 것임을 보여라.

풀이 $x>0$이라고 가정하자. 양변에 $-x$를 더하면 (O3)에 의하여 $0>-x$를 얻는다. 따라서 $-x$는 음수이다. 역으로 $-x<0$이라고 가정하자. 양변에 x를 더하면 (O3)에 의하여 $0<x$를 얻는다. 따라서 x는 양수이다. □

예제 2.2.4 실수 x, y에 대하여 $x<y$일 필요충분조건은 $y-x$가 양수인 것임을 보여라.

풀이 $x<y$라고 가정하자. 양변에 $-x$를 더하면 (O3)에 의하여 $0<y-x$를 얻는다. 따라서 $y-x$는 양수이다. 역으로 $0<y-x$라고 가정하자. 양변에 x를 더하면 (O3)에 의하여 $x<y$를 얻는다. □

보기 **2.2.5** 순서 공리의 (O4)에서 $x=0$을 대입하면 두 양수의 곱이 양수임을 알 수 있다. 또한 예제 2.1.4에 의하여 $(-x)(-y)=xy$이므로 두 음수의 곱은 양수임을 알 수 있다. 더욱이 $x \neq 0$일 때 x는 양수이거나 음수이거나 둘 중 하나이므로 x^2은 양수임을 알 수 있다. □

예제 **2.2.6** 실수 x, y에 대하여 $x<y$이고 z가 음수이면 $xz>yz$임을 보여라.

풀이 $x<y$이므로 $y-x$는 양수이다. 또한 z가 음수이므로 $-z$는 양수이다. 따라서 $(y-x)(-z)$는 양수이다. 그러므로 $xz-yz=(y-x)(-z)>0$을 얻는다. □

예제 **2.2.7** 실수 x에 대하여 $x \neq 0$일 때, x가 양수일 필요충분조건은 $1/x$가 양수인 것임을 보여라.

풀이 $x>0$이라고 가정하자. 만약 $1/x \leq 0$이라면 $1=x \cdot (1/x) \leq 0$이 되어 (O1)에 의하여 모순이다. 따라서 $1/x>0$이다. 역으로 $1/x>0$이라고 가정하자. 만약 $x \leq 0$이라면 $1=(1/x) \cdot x \leq 0$이 되어 (O1)에 의하여 모순이다. 따라서 $x>0$이다. □

예제 **2.2.8** 실수 x, y가 모두 양수이고 $x<y$이면 $1/y<1/x$임을 보여라.

풀이 x, y가 모두 양수이므로 xy도 양수이고 $1/(xy)$도 양수이다. 따라서

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}=\frac{1}{xy}(y-x)>0$$

이므로 $1/y<1/x$를 얻는다. □

예제 **2.2.9** 실수 x, y가 모두 양수일 때, $x<y$일 필요충분조건은 $x^2<y^2$임을 보여라.

풀이 $x<y$라고 가정하자. 그러면 $y+x$와 $y-x$가 모두 양수이므로 $(y+x)(y-x)$도 양수이다. 따라서 $y^2-x^2=(y+x)(y-x)>0$이므로 $x^2<y^2$이다.

역으로 $x^2<y^2$이라고 가정하자. 그러면 $y^2-x^2>0$이므로 양변에 $1/(y+x)$를 곱하면

$$\frac{y^2-x^2}{y+x}>0$$

이다. 위 부등식의 좌변은 $y-x$와 같으므로 $y>x$를 얻는다. □

지금까지 살펴본 부등호의 성질을 종합하면 다음과 같은 결론을 얻는다.

부등호 $\leq$는 $\mathbb{R}$에서의 전순서관계이다.

수직선에서 실수 x가 원점으로부터 떨어진 거리를 x의 **절댓값**(absolute value)이라고 부르며 $|x|$로 나타낸다. 즉 실수 x에 대하여

$$|x|=\begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x<0 \end{cases}$$

이다. x를 1차원 벡터로 생각할 때에는 x의 절댓값을 $\|x\|$로 나타내기도 한다.

예제 **2.2.10** x, y, z가 실수이고 $z \neq 0$일 때 다음이 성립함을 보여라.

(i) $|x| = |-x|$ (ii) $|x||y| = |xy|$

(iii) $|1/z| = 1/|z|$ (iv) $|x/z| = |x|/|z|$

풀이 보통 절댓값에 관련된 성질은 절댓값 안의 식이 0 이상인 경우와 0 미만인 경우로 나누어 증명한다.

(i) $x \geq 0$인 경우 $|x| = x = |-x|$이고 $x < 0$인 경우 $|x| = -x = |-x|$이다.

(ii) $xy \geq 0$인 경우 $|x||y| = xy = |xy|$이고 $xy < 0$인 경우 $|x||y| = -xy = |xy|$이다.

(iii) $z > 0$인 경우 $|1/z| = 1/z = 1/|z|$이고 $z < 0$인 경우 $|1/z| = -(1/z) = 1/(-z) = 1/|z|$이다.

(iv) $|x/z| = |x \cdot (1/z)| = |x||1/z| = |x| \cdot (1/|z|) = |x|/|z|$. □

다음 부등식은 극한의 성질을 증명할 때에 자주 사용된다.

정리 2.2.11 삼각부등식(triangle inequality)

실수 x, y, z에 대하여 $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$가 성립한다.

증명 먼저 $|x+y| \leq |x|+|y|$임을 보이자. 양변이 모두 0 이상이므로 예제 2.2.9에 의하여 양변을 제곱하여 비교하면 된다. 그런데 실수의 제곱은 그 수의 절댓값의 제곱과 같고 $xy \leq |xy|$이므로

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$$

이 성립한다. 따라서 $|x+y| \leq |x|+|y|$를 얻는다. 같은 방법으로

$$||x|-|y||^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = |x+y|^2$$

이 성립하므로 $||x|-|y|| \leq |x+y|$를 얻는다. ■

정의 2.2.12 구간

실수 a, b에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (ii) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (iv) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

(v) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (vi) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

(vii) $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (viii) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

(ix) $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

위 정의에서 (ii)를 **닫힌구간**(closed interval)이라고 부르며 (i), (v), (vi), (ix)를 **열린구간**(open interval)이라고 부른다. 그 외의 구간들을 **반열린구간**(half-open interval) 또는 **반닫힌구간**(half-closed interval)이라고 부른다.

정의에 의하면 $a \geq b$일 때 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$는 공집합이고, $a > b$일 때 $[a, b]$는 공집합이다. 그러나 별다른 언급이 없으면 '구간의 원소 x에 대하여 …이다'라고 할 때 구간은 길이가 양수인 것으로 약속한다.

참고 **2.2.13** $[-\infty, \infty] \neq \mathbb{R}$이다. 왜냐하면 ∞와 $-\infty$는 $\mathbb{R}$의 원소가 아니기 때문이다. ∞와 $-\infty$가 속해 있는 실수계를 **확장실수계**(extended real number system)라고 부르며 $\widetilde{\mathbb{R}}$로 나타낸다. 즉 $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$이다. $\widetilde{\mathbb{R}}$의 원소를 **확장실수**라고 부르고 $\mathbb{R}$의 원소는 실수라고 부른다. 이때 임의의 실수 x에 대하여 $-\infty < x < \infty$인 것으로 약속한다. □

2.3 수학적 귀납법

자연수 집합, 정수 집합, 유리수 집합은 모두 실수 집합의 부분집합이다. 자연수 중에서 가장 작은 수는 1이며 다른 모든 자연수는 다음과 같이 1을 거듭 더하여 얻을 수 있다.

$$1=1,\ 2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1,\ \cdots$$

즉 자연수 집합은 다음 두 성질을 가지고 있다.

(i) 1을 원소로 가진다, (ii) n이 원소이면 $n+1$도 원소이다. (1)

위 두 조건을 모두 만족시키는 집합을 귀납적 집합이라고 부른다. 귀납적 집합의 정의에 따라 자연수 집합은 귀납적 집합이다. 그러나 귀납적인 집합이 자연수 집합만 있는 것은 아니다. 즉 위의 두 조건만으로는 자연수 집합을 정의하기에 충분하지 않다. 예를 들어 집합

$$A=\{\cdots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\},$$
$$B=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{2},\ \cdots\right\}$$

은 (1)의 두 조건을 모두 만족시키지만 자연수 집합이 아니다. 그러나 (1)의 두 조건을 모두 만족시키는 집합은 항상 자연수 집합을 포함하므로, 귀납적 집합 중 가장 작은 집합을 자연수 집합이라고 정의하면 된다. 따라서 자연수 집합을 다음과 같이 정의한다.

정의 2.3.1 | 자연수

실수 집합의 부분집합 E가 두 조건

(i) $1\in E$ (ii) $n\in E\ \Rightarrow\ n+1\in E$

를 모두 만족시킬 때 E를 **귀납적 집합**(inductive set)이라고 부른다. 실수 집합의 부분집합 중에서 귀납적인 집합들을 모두 교집합한 집합을 **자연수 집합**이라고 부르며 $\mathbb{N}$으로 나타낸다. $\mathbb{N}$의 원소를 **자연수**(natural number)라고 부른다.

참고 2.3.2 귀납적 집합들의 교집합은 귀납적 집합이다. 따라서 자연수 집합도 귀납적 집합이다.

증명 집합족 $\{E_i\,|\,i\in I\}$의 모든 원소가 귀납적 집합이라고 하자. 그리고 $E=\cap_i E_i$라고 하자. 명백히 모든 i에 대하여 $1\in E_i$이므로 $1\in E$이다. 또한 $x\in E$라고 가정하면 모든 i에 대하여 $x\in E_i$이다. 그런데 E_i는 귀납적 집합이므로 $x+1\in E_i$이다. 따라서 $x+1\in E$이다. 즉 E는 귀납적 집합이다. ■

일반적으로 실수 α와 실수 집합의 부분집합 A, B에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- $A+B := \{x+y\,|\,x\in A,\ y\in B\}$
- $AB := \{xy\,|\,x\in A,\ y\in B\}$
- $\alpha A := \{\alpha x\,|\,x\in A\}$
- $\alpha+A := \{\alpha+x\,|\,x\in A\}$
- $-A := \{-x\,|\,x\in A\}$

이러한 표기법을 바탕으로 정수 집합과 유리수 집합을 다음과 같이 정의한다.

정의 2.3.3 | 정수, 유리수, 무리수

집합 $\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$을 **정수 집합**이라고 부르며, $\mathbb{Z}$의 원소를 **정수**(integer)라고 부른다.
집합 $\mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\}$를 **유리수 집합**이라고 부르며, $\mathbb{Q}$의 원소를 **유리수**(rational number)라고 부른다. 유리수가 아닌 실수를 **무리수**(irrational number)라고 부른다.

자연수 집합의 표기는 영어 단어 natural의 첫 글자를 딴 것이고, 정수 집합의 표기는 독일어 단어 Zahl의 첫 글자를 딴 것이며 유리수 집합의 표기는 영어 단어 quotient의 첫 글자를 딴 것이다.

유리수 집합은 공리 2.1.1의 모든 조건을 만족시킨다. 즉 유리수 집합은 체(field)이다. 한편 대수학의 이론에 의하면 표수(characteristic)가 0인 임의의 무한체는 $\mathbb{Q}$를 부분체로서 포함한다. 이러한 성질 때문에 $\mathbb{Q}$를 소체(prime field)라고 부르기도 한다.

참 또는 거짓을 값으로 갖는 함수를 명제함수라고 부른다. 명제함수 p와 유한집합 S가 주어졌을 때 S의 모든 원소 x에 대하여 $p(x)$가 참임을 증명하는 것은 어렵지 않다. [물론 S의 원소의 개수가 매우 많은 경우에는 다소 시간이 걸릴 수도 있다.] 예를 들어 집합 $\{2, -3\}$의 모든 원소가 방정식 $x^2 + x - 6 = 0$의 근이 된다는 것을 증명하기 위해서는 직접 대입해보면 된다. 그러나 명제함수 p와 무한집합 S가 주어졌을 때 S의 모든 원소 x에 대하여 $p(x)$가 참임을 증명하는 것은 쉽지 않다. 이러한 경우 정의역의 특성과 명제함수의 종류에 따라서 여러 가지 방법으로 증명을 시도하게 된다.

특히 어떠한 명제가 임의의 자연수에 대하여 참임을 보일 때에는 수학적 귀납법이라는 유용한 증명 방법을 사용할 수 있다.

정리 2.3.4 | 수학적 귀납법 (mathematical induction, finite induction)

정의역이 자연수 집합인 명제 p가 두 조건
  (i) $p(1)$이 참이다,
  (ii) $p(k)$가 참이라고 가정하면 $p(k+1)$도 참이다
를 모두 만족시키면, 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

증명 p의 진리집합을 P라고 하자. 즉 $P = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$이라고 하자. 먼저 p의 정의역이 자연수 집합이므로 $P \subseteq \mathbb{N}$이다.

다음으로 $\mathbb{N} \subseteq P$임을 보이자. 먼저 정리의 조건 (i)에 의하여 $1 \in P$이다. 또한 정리의 조건 (ii)에 의하여 $x \in P$일 때마다 $x+1 \in P$가 성립한다. 따라서 P는 귀납적 집합이다. 자연수 집합은 귀납적 집합들의 교집합이므로 $\mathbb{N} \subseteq P$이다.

이로써 $P \subseteq \mathbb{N}$이고 $\mathbb{N} \subseteq P$이므로 $P = \mathbb{N}$이다. P의 진리집합이 자연수 집합이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. ■

위 정리의 (ii)에서 $p(k)$를 **귀납적 가정**(inductive assumption)이라고 부른다.

흔히 우리가 명제의 참, 거짓을 말할 때 '~가 참이다'라는 말은 생략한다. 예를 들어 '$2+3=5$가 참이다'라고 하는 대신 '$2+3=5$이다'라고 말한다. 이러한 관점에서 정리 2.3.4의 두 조건은 간략하게 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(i) $p(1)$ (ii) $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

예제 2.3.5 $x \geq -1$일 때, 임의의 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{2}$$

이 부등식을 **베르누이**(Bernoulli)**의 부등식**이라고 부른다. [해석학의 증명에서 아주 많이 사용된다.]

풀이 부등식 (2)를 $p(n)$으로 나타내자. 그러면 p는 정의역이 자연수 집합인 명제함수가 된다. 이제 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참임을 보이자.

먼저 $n=1$일 때 $(1+x)^1 \geq 1+1x$이므로 $p(1)$은 참이다.

다음으로 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 그러면

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

이다. $1+x \geq 0$이므로 위 부등식의 양변에 $1+x$를 곱하여도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다. 즉

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

이다. 그런데 $(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$이므로 이 부등식을 위 부등식과 결합하면

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

를 얻는다. 따라서 $p(k+1)$도 참이다.

이로써 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. □

예제 2.3.6 자연수 집합이 덧셈에 대하여 닫혀있음을 증명하여라.

풀이 임의의 자연수 m, n에 대하여 $m+n$이 자연수가 됨을 증명해야 한다. 그런데 이 명제는 변수가 m과 n으로서 2개이므로, 수학적 귀납법을 두 변수에 동시에 적용할 수 없다. 이러한 경우 하나의 변수가 임의로 주어졌다고 가정하고 다른 변수에 수학적 귀납법을 적용한다.

자연수 m이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 명제 $m+n \in \mathbb{N}$을 $p(n)$으로 나타내자.

먼저 $\mathbb{N}$은 귀납적 집합이고 $m \in \mathbb{N}$이므로 $m+1 \in \mathbb{N}$이다. 따라서 $p(1)$은 참이다.

다음으로 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 즉 $m+k \in \mathbb{N}$이라고 가정하자. $\mathbb{N}$은 귀납적 집합이므로 $m+(k+1)=(m+k)+1 \in \mathbb{N}$이다. 즉 $p(k+1)$도 참이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. m이 임의로 주어진 자연수이므로, 임의의 자연수 m, n에 대하여 $m+n \in \mathbb{N}$은 참이다. □

수학적 귀납법은 정의역이 자연수 집합인 함수를 정의할 때에도 사용된다. 즉 $\mathbb{N}$ 위에서 함수 f를 정의할 때

(i) $f(1)$의 값을 정의하고,

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(k)$의 값이 정의되어 있다고 가정하고 이를 이용하여 $f(k+1)$의 값을 정의

하면 임의의 자연수 n에 대하여 함숫값 $f(n)$이 정해진다. 함수를 이러한 방법으로 정의하는 것을 **귀납적 정의**라고 부른다. 중학교에서 배운 자연수 지수 x^n, 고등학교에서 배운 차례곱 $n!$, 이항계수 ${}_nC_r$, 합 기호 $\sum$ 등은 모두 귀납적으로 정의된 함수이다.

귀납적으로 정의된 함수의 성질을 증명할 때에는 수학적 귀납법을 이용하는 경우가 많다.

예제 2.3.7 실수 x와 자연수 n에 대하여 **자연수 지수**를 가진 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

(i) $x^1 := x$　　　　(ii) $x^{n+1} := x^n \cdot x$

이때 실수 x와 자연수 m, n에 대하여 $x^{m+n} = x^m x^n$이 성립함을 증명하여라.

풀이 자연수 m이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 n에 대한 명제 $x^{m+n} = x^m x^n$을 $p(n)$으로 나타내자. 먼저 자연수 지수의 정의에 의하여 $x^{m+1} = x^m \cdot x^1$이므로 $p(1)$은 참이다.

다음으로 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 즉 $x^{m+k} = x^m x^k$이라고 가정하자. 이 등식의 양변에 x를 곱하면 좌변은 $x^{m+k}x = x^{(m+k)+1} = x^{m+(k+1)}$이고 우변은 $x^m x^k x = x^m x^{k+1}$이므로 $x^{m+(k+1)} = x^m x^{k+1}$을 얻는다. 즉 $p(k+1)$도 참이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $x^{m+n} = x^m x^n$은 참이다. ■

끝으로 자연수 집합에서 부등호의 중요한 성질을 살펴보자.

보조정리 2.3.8 자연수는 다음과 같은 성질을 가진다.

(i) 임의의 자연수 n에 대하여 $n-1=0$이거나 $n-1 \in \mathbb{N}$이다.

(ii) 자연수 m, n에 대하여 $m<n$이면 $n-m$은 자연수이다.

(iii) 자연수 n에 대하여 $n<m<n+1$인 자연수 m은 존재하지 않는다.

증명 (i) 수학적 귀납법으로 증명하자. $n=1$일 때에는 $n-1=0$이다. 이제 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 (i)이 참이라고 가정하자. 만약 $k-1=0$이면 $(k+1)-1=k=1 \in \mathbb{N}$이다. 만약 $k-1 \in \mathbb{N}$이면 $(k+1)-1=k \in \mathbb{N}$이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 정리의 명제는 참이다.

(ii) m에 수학적 귀납법을 적용하자. $m=1$인 경우 $m<n$인 자연수 n에 대하여 $n-m=n-1$은 자연수이다. 이제 k가 자연수이고 $k<n$인 자연수 n에 대하여 $n-k$가 자연수라고 하자. 그러면 $k+1$은 자연수이고, n이 $k+1<n$인 자연수일 때 $n-(k+1)=(n-k)-1$도 자연수이다. 따라서 $m=k+1$일 때에도 $m<n$인 자연수 n에 대하여 정리의 명제는 참이다.

(iii) $n<m<n+1$인 자연수 m이 존재한다고 가정하자. 그러면 $m-n \in \mathbb{N}$이다. 또한 $m<n+1$이므로 $m-n<1$이다. 모든 자연수는 1 이상이므로 이것은 모순이다. ■

정리 2.3.9 자연수 집합의 정렬성

자연수 집합 $\mathbb{N}$은 순서관계 $\leq$를 가진 정렬집합이다.

증명 S가 $\mathbb{N}$의 부분집합이고 공집합이 아니라고 하자. 이제 S가 최소원소를 가짐을 보여야 한다.

명제 '$n \in S$이면 S는 최소원소를 가진다'를 $p(n)$으로 나타내자. 먼저 $1 \in S$이면 1이 S의 최소원소가 된다. 따라서 $p(1)$은 참이다.

이제 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 그리고 $k+1 \in S$라고 하자. 그러면 귀납적 가정에 의하여 $S \cup \{k\}$는 최소원소를 가진다. 그 최소원소를 m이라고 하자. 만약 $m \in S$이면 m은 S의 최소원소가 된다. 만약 $m \notin S$이면 $m=k$이므로 $k+1$이 S의 최소원소가 된다. 즉 $k+1 \in S$일 때에도 S는 최소원소를 가지므로 $p(k+1)$도 참이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. ■

2.4 실수계의 상한 공리

관계 $\leq$가 주어진 실수 집합 $\mathbb{R}$는 순서집합이므로 $\mathbb{R}$의 부분집합의 상계와 하계를 생각할 수 있다.

정의 2.4.1 | 상계와 하계

E가 실수 집합의 부분집합이라고 하자.

(i) 만약 실수 a가 존재하여 임의의 $x \in E$에 대하여 $a \leq x$를 만족시키면 'E는 **아래로 유계**(bounded below)이다'라고 말한다. 이때 이러한 조건을 만족시키는 실수 a를 E의 **하계**(lower bound)라고 부른다.

(ii) 만약 실수 b가 존재하여 임의의 $x \in E$에 대하여 $x \leq b$를 만족시키면 'E는 **위로 유계**(bounded above)이다'라고 말한다. 이때 이러한 조건을 만족시키는 실수 b를 E의 **상계**(upper bound)라고 부른다.

(iii) E가 위로 유계이면서 동시에 아래로 유계일 때 'E는 **유계**(bounded)이다'라고 말한다. 즉 E가 유계라는 것은 실수 c가 존재하여 임의의 $x \in E$에 대하여 $|x| \leq c$를 만족시키는 것이다.

실수 a가 집합 E의 하계일 때 'E는 a에 의하여 아래로 유계이다'라고 말한다. 마찬가지로 실수 b가 집합 E의 상계일 때 'E는 b에 의하여 위로 유계이다'라고 말한다. 또한 c가 실수이고 임의의 $x \in E$에 대하여 $|x| \leq c$가 성립할 때 'E는 c에 의하여 유계이다'라고 말한다.

참고 2.4.2 E가 공집합이 아니고 유계라고 하자. 그리고 a가 E의 하계이며 b가 E의 상계라고 하자. 그러면 $x \in E$에 대하여 $a \leq x \leq b$이므로 $a \leq b$이다. 즉 공집합이 아닌 집합의 임의의 상계는 그 어떤 하계보다도 작지 않다. □

참고 2.4.3 $\varnothing$을 공집합이라고 하자. 그리고 a가 실수라고 하자. 그러면 명제 $x \in \varnothing \rightarrow |x| \leq a$는 가정이 거짓이므로 결론에 상관없이 항상 참이다. 따라서 공집합은 유계이다. 또한 임의의 실수는 공집합의 상계인 동시에 하계가 된다. 즉 공집합은 하계가 상계보다 커질 수 있는 유일한 집합이다. □

정의 2.4.4 | 상한, 하한

E가 실수 집합의 부분집합이라고 하자.

(i) E의 하계 중 가장 큰 것을 E의 **하한**(infimum) 또는 **최대하계**(greatest lower bound)라고 부른다.

(ii) E의 상계 중 가장 작은 것을 E의 **상한**(supremum) 또는 **최소상계**(least upper bound)라고 부른다.

위 정의에 따르면 실수 α가 집합 E의 하한이라는 것은 두 조건

- α는 E의 하계이다,
- α'이 E의 하계이면 $\alpha' \leq \alpha$이다

를 모두 만족시키는 것이다. 마찬가지로 실수 β가 집합 E의 상한이라는 것은 두 조건

- β는 E의 상계이다,
- β'이 E의 상계이면 $\beta \leq \beta'$이다

를 모두 만족시키는 것이다.

보기 2.4.5 다음은 하계와 상계의 예이다.

(i) 구간 $[0,\ 1]$은 유계이다. 0 이하의 모든 실수가 이 구간의 하계이며, 1 이상의 모든 실수가 이 구간의 상계이다. 하한은 0이며 상한은 1이다.

(ii) 구간 $(-\infty,\ 3]$은 위로 유계이지만 아래로 유계가 아니다. 3 이상의 모든 실수가 이 구간의 상계이며 하계는 존재하지 않는다. 상한은 3이다.

(iii) 구간 $(4,\ \infty)$는 아래로 유계이지만 위로 유계가 아니다. 4 이하의 모든 실수가 이 구간의 하계이며 상계는 존재하지 않는다. 하한은 4이다.

(iv) 집합 $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 유계이다. 0 이하의 모든 실수가 이 집합의 하계이며 1 이상의 모든 실수가 이 집합의 상계이다. 하한은 0이며 상한은 1이다.

(v) $\mathbb{R}$는 위로 유계가 아니며 아래로도 유계가 아니다. □

참고 2.4.6 임의의 실수는 공집합의 하계이고, 모든 실수보다 큰 실수는 존재하지 않으므로 공집합의 하한은 ∞로 정의한다. 마찬가지로 공집합의 상한은 $-\infty$로 정의한다. 즉 공집합은 상한이 하한보다 작은 유일한 집합이다. 한편 위로 유계가 아닌 집합의 상한은 ∞로 정의하고 아래로 유계가 아닌 집합의 하한은 $-\infty$로 정의한다. [확장실수계에서 이 내용은 '정의'가 아니라 '정리'이다.] □

참고 2.4.7 집합 E의 상한이 실수로서 존재하면 그것은 유일하다. 즉 β와 β'이 E의 상한이라고 하자. 그러면 β는 E의 상한이고 β'은 E의 상계이므로 상한의 정의에 의하여 $\beta \le \beta'$이다. 입장을 바꾸어 생각하면 β'은 E의 상한이고 β는 E의 상계이므로 상한의 정의에 의하여 $\beta' \le \beta$이다. 따라서 $\beta = \beta'$이다. 마찬가지로 집합 E의 하한이 실수로서 존재하면 그것은 유일하다. □

집합 E가 아래로 유계이고 α가 E의 하한일 때 기호로

$$\alpha = \inf E \quad \text{또는} \quad \alpha = \operatorname{glb} E$$

로 나타낸다. 또한 집합 E가 위로 유계이고 β가 E의 상한일 때 기호로

$$\beta = \sup E \quad \text{또는} \quad \beta = \operatorname{lub} E$$

로 나타낸다. 한편 집합 D와 함수 $f : D \to \mathbb{R}$에 대하여 $E = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$일 때

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup E, \quad \inf_{x \in D} f(x) := \inf E$$

로 정의한다. [sup는 'supremum', inf는 'infimum'이라고 읽는다.]

정리 2.4.8 상한과 하한의 쌍대성 (duality)

실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이며 α가 실수라고 하자. 이때 $\sup E = \alpha$일 필요충분조건은 $\inf(-E) = -\alpha$인 것이다.

증명 α가 E의 상한이라고 하자. 그리고 $x \in (-E)$라고 하자. 그러면 $-x \in E$이므로 $-x \le \alpha$이다. 따라서 $-\alpha \le x$이므로 $-\alpha$는 $-E$의 하계이다. 이제 $-\alpha'$이 $-E$의 하계라고 하자. 그러면 임의의 $y \in E$에 대하여 $-y \in (-E)$이므로 $-\alpha' \le -y$이다. 즉 $y \le \alpha'$이다. 이것은 α'이 E의 상계임을 의미한다. 그런데 α는 E의 최소상계이므로 $\alpha \le \alpha'$이다. 즉 $-\alpha' \le -\alpha$이다. 따라서 $-\alpha$는 $-E$의 하계 중 가장 큰 값이다. 즉 $-\alpha$는 $-E$의 하한이다.

역도 비슷한 방법으로 증명된다. $-\alpha$가 $-E$의 하한이라고 하면 α는 E의 상계가 된다. 또 α'이 E의 상계라고 가정하면 $\alpha \le \alpha'$이 된다. 즉 α는 E의 상계 중 가장 작은 값이 된다. ■

실수계의 체 공리와 순서 공리만으로는 유리수계와 실수계를 구분할 수 없다. 즉 실수계와 유리수계는 모두 체 공리와 순서 공리를 만족시킨다. 하지만 명백히 실수이지만 유리수가 아닌 무리수가 존재하므로 실수계는 유리수계와 다르다.

만약 무리수가 존재하지 않는다면 수직선에는 수로 나타낼 수 없는 수많은 점이 존재하게 된다. 따라서 수직선의 모든 점을 빠짐없이 수로 나타낼 수 있도록 하기 위한 실수계의 공리가 필요하다.

공리 2.4.9 상한 공리 : 실수계의 완비성

실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이면 E의 상한이 실수로서 존재한다.

예를 들어 $E=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2<2\}$라고 하자. 만약 $\mathbb{R}$에 유리수만 존재한다면 E의 상한은 존재하지 않게 된다. 그러나 상한 공리에 의하여 E의 상한이 존재한다. 즉 상한 공리는 수직선의 점에 대응되는 모든 실수가 빠짐없이 존재함을 보장하는 공리이다. [별다른 언급 없이 '상한이 존재한다'라고 표현하면 그것은 상한이 무한대가 아닌 실수로서 존재하는 것을 뜻한다.]

참고로 일반적인 거리공간의 완비성은 임의의 코시 수열이 수렴하는 것으로 정의된다. 그런데 실수계의 상한 공리는 임의의 코시 수열이 수렴한다는 것과 동치인 명제이다. (정리 3.6.2 참조) 이와 같은 이유로 실수계의 상한 공리를 **완비성 공리**(completeness axiom)라고 부르기도 한다.

정리 2.4.10 ϵ을 이용한 상한의 정의

실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이며 α가 E의 상계라고 하자. 이때 α가 E의 상한이 될 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x\in E$가 존재하여 $\alpha-\epsilon<x\le\alpha$를 만족시키는 것이다.

증명 α가 E의 상한이라고 하자. 만약 결론에 반하여 ϵ이 양수이지만 $\alpha-\epsilon<x\le\alpha$를 만족시키는 $x\in E$가 존재하지 않는다고 가정하면 $\alpha-\epsilon$이 E의 상계가 되므로 α가 E의 최소상계라는 데에 모순이다. 따라서 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\alpha-\epsilon<x\le\alpha$를 만족시키는 $x\in E$가 존재한다.

역으로 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x\in E$가 존재하여 $\alpha-\epsilon<x\le\alpha$를 만족시킨다고 하자. α가 E의 상계이므로, 최소상계임을 보이면 된다. 만약 $\alpha'<\alpha$이면 $\epsilon\coloneqq\alpha-\alpha'$은 양수이므로 $\alpha'=\alpha-\epsilon<x\le\alpha$인 $x\in E$가 존재한다. 이것은 α'이 E의 상계가 아님을 의미한다. 즉 α보다 작은 수는 E의 상계가 될 수 없으므로 α는 E의 최소상계이다. ■

따름정리 2.4.11 E가 실수 집합의 부분집합이고 공집합이 아니라고 하자.

(i) E가 아래로 유계이면 E는 하한을 가진다.

(ii) 실수 α가 E의 하계일 때, α가 E의 하한이 될 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x\in E$가 존재하여 $\alpha\le x<\alpha+\epsilon$을 만족시키는 것이다.

증명 (i) E가 아래로 유계이므로 $-E$는 위로 유계이다. 따라서 $-E$는 상한을 가진다. 그 상한을 β라고 하자. 그러면 $-\beta$는 E의 하한이 된다.

(ii) $-\alpha$는 $-E$의 상계이다. 이때 $-\alpha$가 $-E$의 상한이 될 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x\in(-E)$가 존재하여 $-\alpha-\epsilon<x\le-\alpha$를 만족시키는 것이다. 따라서 정리 2.4.8에 의하여 α가 E의 하한이 될 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x\in E$가 존재하여 $\alpha\le x<\alpha+\epsilon$을 만족시키는 것이 된다. ■

참고 2.4.12 집합 E가 유계이고 α와 β가 각각 E의 하한과 상한일 때, 반드시 α와 β가 E의 원소인 것은 아니다. 예를 들어 열린구간 $(0,\ 1)$은 유계이고 하한은 0, 상한은 1이지만 0과 1은 $(0,\ 1)$의 원소가 아니다. 한편 E의 하한 α가 E의 원소일 때 α를 E의 **최솟값**이라고 부르며 $\alpha = \min E$로 나타낸다. 또한 E의 상한 β가 E의 원소일 때 β를 E의 **최댓값**이라고 부르며 $\beta = \max E$로 나타낸다. □

참고 2.4.13 실수 집합의 부분집합이 공집합이 아니고 유한집합이면 최솟값과 최댓값을 가진다.

증명 실수 집합의 유한부분집합 E가 주어졌다고 하자. 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자. 'E가 n개의 원소를 가진 집합이면 E는 최솟값과 최댓값을 가진다'를 $p(n)$으로 나타내자.

하나의 원소만 가진 집합은 그 원소가 그 집합의 최솟값인 동시에 최댓값이므로 $p(1)$은 참이다.

다음으로 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고 가정하자. 그리고 E가 $k+1$개의 원소를 가진 집합이라고 하자. $E \neq \varnothing$이므로 E의 원소 a가 존재한다. 이때 $E \setminus \{a\}$는 k개의 원소를 가진 집합이므로 귀납적 가정에 의하여 최솟값과 최댓값을 가진다. $E \setminus \{a\}$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 하자. 그러면 m과 a 중 더 작은 값이 E의 최솟값이 되며, M과 a 중 더 큰 값이 E의 최댓값이 된다. 따라서 E는 최솟값과 최댓값을 가진다. 즉 $p(k+1)$도 참이다. ■

참고 2.4.14 정수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이면 E는 최댓값을 가진다.

증명 E의 상한을 M이라고 하자. 그러면 상한의 성질에 의하여 $M-1 < m \le M$인 정수 $m \in E$가 존재한다. 만약 $m \neq M$이라면 다시 상한의 성질에 의하여 $m < m_1 \le M$인 정수 $m_1 \in E$가 존재한다. 그러면 $M-1 < m < m_1 \le M$이므로 $0 < m_1 - m < 1$이 되어 모순이다. 따라서 $M = m \in E$이다. ■

이제 완비성과 관련된 여러 가지 개념과 정리들을 살펴보자. 다음 정리는 수열의 성질을 증명할 때에 많이 사용된다.

정리 2.4.15 | 아르키메데스

임의의 실수 a와 양수 b에 대하여 $a < nb$인 자연수 n이 존재한다.

증명 $a \le 0$인 경우는 자명하게 성립한다. 따라서 $a > 0$이라고 하자. 결론에 반하여 $a < nb$를 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $a \ge nb$이다. 따라서 a/b는 자연수 집합 $\mathbb{N}$의 상계가 된다. 그러면 실수계의 상한 공리에 의하여 $\mathbb{N}$의 상한 c가 존재한다. 그런데 1은 양수이므로 상한의 성질에 의하여 $c-1 < k \le c$인 자연수 k가 존재한다. 자연수 집합은 귀납적이므로 $k+1$도 자연수이다. 그런데 $c = (c-1)+1 < k+1$이 되므로 c가 $\mathbb{N}$의 상한이라는 데에 모순이다. ■

위 정리는 기하학적인 의미를 가지고 있다. 즉 길이가 a인 선분과 길이가 b인 선분이 있을 때, 길이 a가 아무리 길어도 길이가 b인 선분을 충분히 여러 개 붙여서 길이가 a보다 길어지게 할 수 있다는 것이다. [설마 아르키메데스가 대수 문자와 부등식을 이용하여 위 정리를 진술하지는 않았을 것이다.]

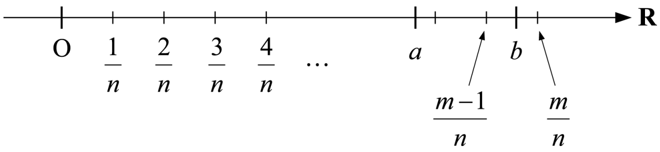
따름정리 2.4.16 자연수 집합 $\mathbb{N}$은 위로 유계가 아니다.

증명 $\mathbb{N}$이 위로 유계라고 가정하면 $\mathbb{N}$의 상한 a가 존재한다. 이때 아르키메데스의 정리에 의하여 $a < n$인 자연수 n이 존재하므로 모순이다. ■

정리 2.4.17 | 유리수와 무리수의 조밀성

유리수 집합과 무리수 집합은 각각 실수 집합 위에서 조밀하다.

유리수 집합이 실수 집합 위에서 **조밀하다**(dense)는 것은 서로 다른 임의의 실수 사이에 반드시 유리수가 존재한다는 것을 의미한다. 유리수의 조밀성을 수직선에서 생각해보자. $0 < a < b$인 두 실수 a, b가 주어졌다고 하자.



이때 원점에서 출발하여 오른쪽으로 $b-a$보다 더 좁은 균일한 간격으로 점을 표시해간다면 그러한 점들 중 하나 이상은 반드시 a와 b 사이에 놓이게 된다. [말은 쉬운데 증명을 하려면 어렵다. 그래서 쓰는 연습을 해야 한다.]

정리 2.4.17의 증명 a와 b가 실수이고 $a < b$라고 하자.

유리수의 조밀성을 증명하자. 먼저 $b > 0$인 경우를 증명하자. $b-a$가 양수이므로 아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < n(b-a)$인 자연수 n이 존재한다. 즉 n은 다음 부등식을 만족시킨다.

$$\frac{1}{n} < b-a \quad \text{그리고} \quad a-b < -\frac{1}{n}$$

다시 아르키메데스의 정리에 의하여 $bn \leq m$인 자연수 m이 존재한다. 자연수 집합은 정렬집합이므로 그러한 자연수 m 중에서 가장 작은 것을 택할 수 있다. 그러면

$$b \leq \frac{m}{n} \quad \text{그리고} \quad \frac{m-1}{n} < b$$

가 성립한다. 그런데

$$a = b + (a-b) < \frac{m}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{n} < b$$

이므로 $r \coloneqq (m-1)/n$이라고 하면 r는 $a < r < b$를 만족시키는 유리수가 된다.

다음으로 $b \leq 0$인 경우에는 $0 < b+p$인 자연수 p를 택하자. 그러면 $a+p < b+p$이므로 앞의 논의에 의하여 $a+p < q < b+p$인 유리수 q가 존재한다. 이때 $r \coloneqq q-p$라고 하면 r는 $a < r < b$를 만족시키는 유리수가 된다.

이제 무리수의 조밀성을 증명하자. 유리수의 조밀성에 의하여 $(\sqrt{2}-1)a < q < (\sqrt{2}-1)b$를 만족시키고 0이 아닌 유리수 q가 존재한다. 이때 $r \coloneqq (\sqrt{2}+1)q$라고 하면 r는 $a < r < b$를 만족시키는 무리수가 된다. ■

유리수의 조밀성과 무리수의 조밀성을 통틀어 **실수의 조밀성**이라고 부른다. 유리수와 무리수의 조밀성은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

공집합이 아닌 모든 열린구간은 유리수와 무리수를 원소로 가진다.

2.5 지수의 확장

앞서 예제 2.3.7에서 실수 x와 자연수 n에 대하여 자연수 지수를 가진 거듭제곱을 다음과 같이 정의하였다.

$$x^1 := x \quad \text{그리고} \quad x^{n+1} := x^n \cdot x$$

이 절에서는 지수가 정수, 유리수, 실수인 거듭제곱을 정의하고 그 성질을 살펴보자.

정의 2.5.1 정수 지수

0이 아닌 실수 x와 자연수 n에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) $x^0 := 1$ (ii) $x^{-n} := \dfrac{1}{x^n}$

참고 2.5.2 지수가 자연수인 경우의 지수 법칙은 밑의 조건 없이 사용할 수 있다. 즉 실수 x, y와 자연수 m, n에 대하여 다음과 같은 **지수 법칙**이 성립한다.

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

그러나 지수가 정수인 경우에는 밑이 0이 아닐 때에만 지수 법칙을 사용할 수 있다. 왜냐하면 0^0이 정의되지 않기 때문이다. □

실수 y가 x의 n제곱근이라는 것은 $y^n = x$가 성립하는 것을 의미한다. 이를테면 8의 세제곱근은 2이고, 81의 네제곱근은 ± 3이다. 지수 법칙이 유리수 범위에서 성립한다고 가정하면 등식 $y^n = x$의 양변을 $1/n$제곱하여 $x^{1/n} = y$를 얻는다. 또한 이 등식의 양변에 m제곱을 하여 $x^{m/n} = y^m$을 얻는다. 이러한 아이디어를 바탕으로 지수가 유리수인 경우의 거듭제곱을 정의한다.

정의 2.5.3 유리수 지수

지수가 유리수인 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

(i) 음이 아닌 실수 x와 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y를 x의 ***n*제곱근**이라고 부른다. x의 n제곱근 중에서 음이 아닌 것을 $x^{\frac{1}{n}}$ 또는 $\sqrt[n]{x}$로 나타낸다.

(ii) 음이 아닌 실수 x와 자연수 m, n에 대하여 $x^{\frac{m}{n}} := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$으로 정의한다.

(iii) 음수 x와 홀수인 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y를 x의 ***n*제곱근**이라고 부른다. 이때 x의 n제곱근을 $x^{\frac{1}{n}}$ 또는 $\sqrt[n]{x}$로 나타낸다.

(iv) 음수 x와 홀수인 자연수 n, 자연수 m에 대하여 $x^{\frac{m}{n}} := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$으로 정의한다.

(v) 0이 아닌 실수 x와 양의 유리수 r에 대하여 $x^{-r} := (x^r)^{-1}$으로 정의한다. (단, x^r이 정의될 때.)

참고 2.5.4 지수가 유리수인 경우의 지수 법칙은 밑이 양수일 때에만 사용할 수 있다.

예를 들어 $\{(-2)^2\}^{\frac{3}{2}} = (-2)^{2\times\frac{3}{2}} = (-2)^3 = -8$은 잘못된 계산이다. □

참고 2.5.5 임의의 양수 x와 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 양수 y가 유일하게 존재한다.

증명* 먼저 $n=2$, $x=3$인 경우를 생각해보자. 그러면 우리는 3의 양의 제곱근이 유일하게 존재함을 보여야 한다. 집합 $\{t \mid t>0,\ t^2<3\}$을 생각하자. 이 집합은 공집합이 아니고 위로 유계이므로 상한을 가진다. 그 상한을 y라고 하고 $y^2<3$이거나 $y^2>3$이면 모순이 발생한다는 것을 보이면 $y^2=3$이 증명된다. 이제 일반적인 경우를 증명하자.

$n=1$인 경우는 $y^n=x$를 만족시키는 y가 자명하게 존재하므로 $n \ge 2$인 경우를 증명하자.

주어진 x, n에 대하여 $E \coloneqq \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t^n < x\}$라고 하자. 명백히 E는 $x+2$에 의하여 위로 유계이고 $x/(1+x)$를 원소로 가지므로 E의 상한 y가 존재한다.

이제 $y^n = x$임을 증명하자. 결론에 반하여 $y^n \ne x$라고 가정하자.

(i) $y^n < x$인 경우 실수의 조밀성에 의하여

$$0 < h < \min\left\{1,\ \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}\right\}$$

을 만족시키는 실수 h가 존재한다. 이때

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

이므로 $(y+h)^n < x$이다. 따라서 $y+h \in E$이다. 그런데 $y+h>y$이므로 y가 E의 상한이라는 데에 모순이다.

(ii) $y^n > x$인 경우

$$k \coloneqq \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}, \quad t \coloneqq y - k$$

라고 하면 $0<k<y$이다. 이때

$$y^n - t^n = y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x$$

이므로 $t^n > x$이다. 따라서 $t \notin E$이다. 또한 t보다 큰 실수는 E에 속하지 않는다. 이것은 $y-k$가 E의 상계임을 의미하므로 y가 E의 상한이라는 데에 모순이다.

따라서 $y^n = x$일 수밖에 없다. 한편 실수 z에 대하여 $y<z$라고 가정하자. 그러면 부등식의 성질에 의하여 $y^n < z^n$이므로 $z^n \ne x$이다. 즉 $y^n = x$를 만족시키는 양수 y는 유일하다. ■

따름정리 2.5.6 음의 실수 x와 홀수인 자연수 n에 대하여 $y^n = x$를 만족시키는 실수 y가 유일하게 존재한다.

증명 $|x|$는 양수이므로 $z^n = |x|$를 만족시키는 양수 z가 유일하게 존재한다. 이때 $y \coloneqq -z$라고 하면 y는 정리의 조건을 만족시키는 실수이다. 한편 $y \ge 0$이면서 $y^n = x$인 y는 존재하지 않는다. ■

참고 2.5.5와 따름정리 2.5.6에 의하여 정의 2.5.3이 타당함을 알 수 있다.

밑이 음수인 경우에는 일반적으로 지수 법칙이 성립하지 않으므로 보통 밑이 양수인 경우에만 유리수 지수를 가진 거듭제곱을 정의한다. 그러나 우리는 지수의 분모가 홀수인 특별한 경우에 한하여 밑이 음수이고 유리수 지수를 가진 거듭제곱을 정의하였다.

다음으로 지수가 실수인 경우의 거듭제곱을 정의하자.

정의 2.5.7 | 실수 지수

x가 양수이고 r가 무리수라고 하자.

(i) $x \geq 1$일 때 $x^r := \sup\{x^t \mid t \leq r,\ t \in \mathbb{Q}\}$로 정의한다.

(ii) $0 < x < 1$일 때 $x^r := \left((x^{-1})^r\right)^{-1}$으로 정의한다.

$x \geq 1$일 때, 유리수 t, r에 대하여 $t \leq r$이면 $x^t \leq x^r$이다. 따라서 r가 유리수일 때

$$x^r = \sup\{x^t \mid t \leq r,\ t \in \mathbb{Q}\}$$

가 성립한다. 즉 정의 2.5.7은 유리수 지수의 정의에 모순되지 않도록 형식불역의 원리에 따라 지수가 실수인 경우의 거듭제곱을 정의한 것이다.

정리 2.5.8 | 실수 지수 법칙

양수 x, y와 실수 r, s에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $x^r x^s = x^{r+s}$ (ii) $(xy)^r = x^r y^r$ (iii) $(x^r)^s = x^{rs}$

증명 실수의 성질만을 이용하여 실수 지수 법칙을 증명하는 것은 다소 복잡하다. 이 정리의 증명은 8.6절에서 지수함수를 정의한 후에 살펴보자. ■

지금까지 밑이 양수이고 지수가 실수인 거듭제곱을 정의하였다. 지수의 정의와 성질에 의하면 $a > 0$이고 x가 실수일 때 등식 $y = a^x$을 만족시키는 y가 유일하게 존재한다. 이때 $y = a^x$을 밑이 a인 **지수함수**라고 부른다.

한편 $a > 0$, $a \neq 1$이고 $x > 0$일 때 등식 $a^y = x$를 만족시키는 실수 y가 유일하게 존재한다. 이때 y를 a를 밑으로 하는 x의 **로그**라고 부르며 기호로는

$$y = \log_a x$$

로 나타낸다. 이때 대응 $x \mapsto y$는 함수가 되는데, 이러한 함수 $y = \log_a x$를 밑이 a인 **로그함수**라고 부른다. 별다른 언급 없이 $\log_a x$라고 쓰면 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$인 것으로 약속한다. 로그에 관한 자세한 내용은 8.6절에서 로그함수를 정의한 후에 살펴보자.

거듭제곱의 지수의 범위를 확장함에 따라 밑의 범위는 축소되었다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

지수	자연수	정수	유리수	실수
밑	실수	0이 아닌 실수	양수	양수

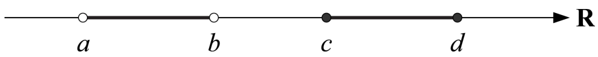
참고로 지수가 실수이고 밑이 0이 아니라는 조건만으로도 거듭제곱을 정의할 수도 있는데, 이때 거듭제곱은 하나의 값만 갖는 것이 아니라 여러 개의 값을 갖게 된다. 그러한 거듭제곱은 복소해석학에서 다룬다.

지수의 확장에서 보다시피 얻는 것이 있으면 한편으로는 잃는 것도 있기 마련이다. 이처럼 우리는 살면서 더 많이 가지려고만 하지 말고 자신이 얻은 만큼 다른 것을 내어줄 수 있는 아량을 지녀야 할 것이다.

2.6 열린집합과 닫힌집합

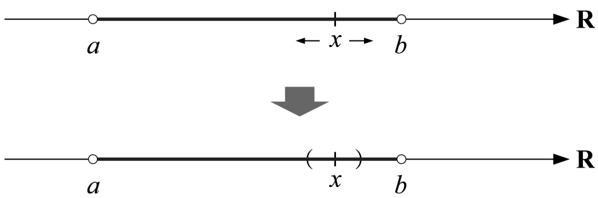
실수는 수직선의 점으로 나타낼 수 있으므로 실수 집합의 부분집합의 성질을 수직선 위에서 기하학적으로 살펴볼 수 있다. 집합 E가 실수 집합의 부분집합일 때, x가 E의 **점**(point)이라는 것은 x가 E의 원소임을 의미하는 것으로 약속한다.

다음은 열린구간 $I_1 = (a,\ b)$와 닫힌구간 $I_2 = [c,\ d]$를 수직선에 나타낸 것이다.



두 점 a, b는 집합 I_1의 경계점이며, 두 점 c, d는 I_2의 경계점이다. 열린구간은 양 끝점을 원소로 갖지 않으며, 닫힌구간은 양 끝점을 모두 원소로 가진다. 즉 I_1은 경계점을 원소로 갖지 않으며 I_2는 경계점을 원소로 가진다.

실수 x에 대하여 $x \in I_1$일 때 x는 I_1의 경계점이 아니면서 I_1에 속하므로 x는 I_1의 내부의 점이 된다. 점 x가 집합 I_1의 내부에 있다는 것은 I_1의 경계로부터 어느 정도 거리를 두고 있다는 뜻이다. 이것은 x가 I_1의 안에서 좌우로 조금은 움직일 수 있는 여유를 가지고 있다는 것을 의미한다.



따라서 $x \in I_1$일 때 x를 원소로 가지면서 I_1에 포함되는 작은 열린구간을 생각할 수 있다. 이러한 개념을 일반화하여 열린집합을 정의한다.

정의 2.6.1 | 내부, 열린집합

집합 G가 실수 집합의 부분집합이고 $x \in G$라고 하자. 만약 $x \in I \subseteq G$를 만족시키는 열린구간 I가 존재하면 x를 G의 **내점**(interior point)이라고 부른다. G의 내점들의 모임을 G의 **내부**(interior)라고 부르며 G^o 또는 $\operatorname{int} G$로 나타낸다. G의 모든 원소가 G의 내점일 때 G를 **열린집합**(open set)이라고 부른다.

직관적으로 열린집합이란 경계에 있는 점을 원소로 갖지 않는 집합을 의미한다. 이제 경계의 점을 모두 원소로 갖는 집합 F를 생각해보자. F와 F^c는 경계가 동일하므로 F^c의 경계점은 F^c에 속하지 않는다. 그런데 경계의 점을 원소로 갖지 않는 집합은 열린집합이므로 F^c는 열린집합이다.

정의 2.6.2 | 닫힌집합

집합 F가 실수 집합의 부분집합이라고 하자. 이때 F가 **닫힌집합**(closed set)이라는 것은 $F^c := \mathbb{R} \setminus F$가 열린집합임을 의미하는 것이다.

정의 2.6.3 | 열린구, 닫힌구

실수 x와 양수 ϵ에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) 중심이 x이고 반지름이 ϵ인 **열린구** : $B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \epsilon\}$

(ii) 중심이 x이고 반지름이 ϵ인 **닫힌구** : $\overline{B_\epsilon}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| \le \epsilon\}$

(iii) 중심이 x이고 반지름이 ϵ인 **빠진 열린구** : $B_\epsilon{}'(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-y| < \epsilon\}$

(iv) 중심이 x이고 반지름이 ϵ인 **빠진 닫힌구** : $\overline{B_\epsilon}{}'(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-y| \le \epsilon\}$

열린구를 이용하여 내점의 정의를 나타내면 다음과 같다.

점 x가 집합 G의 내점이라는 것은 $B_\epsilon(x) \subseteq G$인 양수 ϵ이 존재하는 것이다.

내점을 정의한 것과 비슷한 방법으로 경계점과 외점을 정의할 수 있다. 구간 $I_2 = [c,\ d]$는 두 개의 경계점 c, d를 가지고 있다. 이 두 점은 I_2^c의 경계점이기도 하다. c는 I_2와 I_2^c의 사이에 있기 때문에 아주 조금이라도 오른쪽으로 움직이면 I_2에 속하게 되고 조금이라도 왼쪽으로 움직이면 I_2^c에 속하게 된다.

이것은 c를 중심으로 하는 열린구 $B_\epsilon(c)$의 반지름이 아무리 작아도 $B_\epsilon(c)$는 I_2의 점과 I_2^c의 점을 동시에 원소로 가진다는 것을 의미한다.

정의 2.6.4 | 경계, 외부

E가 실수 집합의 부분집합이고 x가 실수라고 하자.

(i) 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이고 $B_\epsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing$이면 x를 E의 **경계점**이라고 부른다. E의 경계점들의 모임을 E의 **경계**(boundary)라고 부르며 ∂E 또는 $\mathrm{bd}\,E$로 나타낸다.

(ii) x가 E의 내점도 아니고 경계점도 아니면 x를 E의 **외점**(exterior point)이라고 부른다. E의 외점들의 모임을 E의 **외부**(exterior)라고 부르며 $\mathrm{ext}\,E$로 나타낸다.

열린집합은 독일어 단어 Gabiet의 첫 글자를 따서 주로 G로 나타내며, 닫힌집합은 프랑스어 단어 fermé의 첫 글자를 따서 주로 F로 나타낸다.

보기 2.6.5 다음은 실수계에서 열린집합과 닫힌집합에 관련된 여러 가지 예이다.

(i) 열린구간은 열린집합이며 닫힌구간은 닫힌집합이다.
(ii) x가 실수일 때, 한점집합 $\{x\}$는 닫힌집합이다. $\{x\}$의 경계는 $\{x\}$이며 내부는 공집합이다.
(iii) 공집합은 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 공집합의 내부와 경계는 공집합이다.
(iv) 실수 집합 $\mathbb{R}$는 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. $\mathbb{R}$의 내부는 $\mathbb{R}$이고 경계는 공집합이다.
(v) 반열린구간 $(0,\ 1]$은 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다. 내부는 $(0,\ 1)$이고 경계는 $\{0,\ 1\}$이다.
(vi) 정수 집합 $\mathbb{Z}$는 닫힌집합이다. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$는 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다.

종종 ‘열린집합의 여집합이 닫힌집합이다’라는 말을 혼동하여 ‘열린집합이 아니면 닫힌집합이다’ 또는 ‘닫힌집합이 아니면 열린집합이다’라고 생각하는 경우가 있다. 그러나 $\varnothing$이나 $\mathbb{R}$와 같이 열린집합인 동시에 닫힌집합이 존재하며, $\mathbb{Q}$와 같이 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아닌 집합이 존재한다.

다음은 열린집합과 닫힌집합이 가진 중요한 성질이다. [증명이 복잡해 보이지만 꼭 직접 해봐야 한다.]

정리 2.6.6 | 열린집합과 닫힌집합의 연산

열린집합과 닫힌집합의 합집합과 교집합에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$가 열린집합들의 모임이면 $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$도 열린집합이다.

(ii) $\{G_k \mid k = 1, 2, \cdots, p\}$가 유한 개의 열린집합들의 모임이면 $\bigcap_{k=1}^{p} G_k$도 열린집합이다.

(iii) $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$가 닫힌집합들의 모임이면 $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$도 닫힌집합이다.

(iv) $\{F_k \mid k = 1, 2, \cdots, p\}$가 유한 개의 닫힌집합들의 모임이면 $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$도 닫힌집합이다.

(v) G가 열린집합이고 F가 닫힌집합이면, $G \setminus F$는 열린집합이고 $F \setminus G$는 닫힌집합이다.

증명 (i) $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$라고 하자. 그러면 $x \in G_\alpha$인 $\alpha \in A$가 존재한다. G_α는 열린집합이므로 양수 ϵ이 존재하여 $B_\epsilon(x) \subseteq G_\alpha$를 만족시킨다. 따라서 $B_\epsilon(x) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$가 성립한다.

(ii) $x \in \bigcap_{k=1}^{p} G_k$라고 하자. 그러면 $1 \le k \le p$인 모든 k에 대하여 $x \in G_k$이다. 각 k에 대하여 G_k는 열린집합이므로 양수 ϵ_k가 존재하여 $B_{\epsilon_k}(x) \subseteq G_k$를 만족시킨다. $\epsilon \coloneqq \min\{\epsilon_k \mid k = 1, 2, \cdots, p\}$라고 하면 ϵ은 양수이고 임의의 k에 대하여 $B_\epsilon(x) \subseteq B_{\epsilon_k}(x) \subseteq G_k$이므로 $B_\epsilon(x) \subseteq \bigcap_{k=1}^{p} G_k$가 성립한다.

(iii) 각 α에 대하여 F_α^c는 열린집합이고 드모르간의 법칙에 의하여

$$\left[\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right]^c = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c$$

이므로 $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$의 여집합은 열린집합이다. 따라서 $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$는 닫힌집합이다.

(iv) 각 k에 대하여 F_k^c는 열린집합이고 드모르간의 법칙에 의하여

$$\left[\bigcup_{k=1}^{p} F_k\right]^c = \bigcap_{k=1}^{p} F_k^c$$

이므로 $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$의 여집합은 열린집합이다. 따라서 $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$는 닫힌집합이다.

(v) $G \setminus F = G \cap F^c$이고 $F \setminus G = F \cap G^c$이므로 (ii)와 (iii)에 의하여 결론을 얻는다. ■

참고 2.6.7 무한히 많은 수의 열린집합의 교집합은 열린집합이 아닐 수도 있다. 예를 들어 자연수 n에 대하여 $I_n = \left(-\frac{1}{n},\ 1\right)$이라고 하면 I_n은 열린집합이지만 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [0,\ 1)$은 열린집합이 아니다.
마찬가지로 무한히 많은 수의 닫힌집합의 합집합은 닫힌집합이 아닐 수도 있다. 예를 들어 자연수 n에 대하여 $J_n = \left[\frac{1}{n},\ 2\right]$라고 하면 J_n은 닫힌집합이지만 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = (0,\ 2]$는 닫힌집합이 아니다. □

지금까지 전체공간을 $\mathbb{R}$ 로 생각했을 때의 열린집합과 닫힌집합을 살펴보았다. 이제 전체공간을 $\mathbb{R}$ 의 부분집합으로 바꾸었을 때의 열린집합과 닫힌집합을 생각해보자. $\mathbb{R}$ 에서 반열린구간 $G=[0,\ 1)$은 열린집합이 아니다. 그러나 전체공간을 $U=[0,\ 3)$으로 제한하면 G는 열린집합이 된다. 왜냐하면

$$B_1(0)=\{y\in U \mid |0-y|<1\}\subseteq G$$

로서 0은 G의 내점이 되기 때문이다. 또한 $\mathbb{R}$ 에서 $F=[2,\ 3)$은 닫힌집합이 아니지만 전체공간을 U로 제한하면 F는 닫힌집합이 된다. 즉 어떤 집합이 열린집합 또는 닫힌집합이 되는지의 여부는 전체공간을 무엇으로 두느냐에 따라 달라질 수 있다.

정의 2.6.8 | 상대적 열린집합과 상대적 닫힌집합

집합 $U\subseteq\mathbb{R}$ 와 U의 부분집합 G, F가 주어졌다고 하자. 만약 전체공간을 U로 제한했을 때 G가 열린집합이 되면 G를 U에서의 **상대적 열린집합**이라고 부른다. 또한 만약 전체공간을 U로 제한했을 때 F가 닫힌집합이 되면 F를 U에서의 **상대적 닫힌집합**이라고 부른다.

보통 'G는 U에서의 상대적 열린집합이다'라는 말을 줄여서 'G는 U에서의 열린집합이다'라고 말하며 'F는 U에서의 상대적 닫힌집합이다'라는 말을 줄여서 'F는 U에서의 닫힌집합이다'라고 말한다.

G가 U에서의 열린집합이면 각 $x\in G$에 대하여 $B_{\epsilon_x}(x)\subseteq G$를 만족시키는 양수 ϵ_x가 존재한다. 물론 여기서 $B_{\epsilon_x}(x)\coloneqq\{y\in U \mid |x-y|<\epsilon_x\}$이다. 전체공간을 $\mathbb{R}$ 로 확대하고 동일한 ϵ_x들에 대하여

$$G_1=\bigcup_{x\in G}B_{\epsilon_x}(x)$$

로 정의하면 G_1은 열린집합이고 $G=U\cap G_1$을 만족시킨다.

이번엔 F가 U에서의 닫힌집합인 경우를 살펴보자. 이때 $F^c\coloneqq U\setminus F$는 U에서의 열린집합이므로 전체공간을 $\mathbb{R}$ 로 확대했을 때 앞에서와 같은 방법으로 $U\setminus F=U\cap G_1$을 만족시키는 열린집합 G_1이 존재한다. 여기서 $F_1=\mathbb{R}\setminus G_1$이라고 하면 $U\cap F_1=F$가 성립한다.

역으로 $U\subseteq\mathbb{R}$ 일 때, G_1이 $\mathbb{R}$ 에서의 열린집합이고 F_1이 $\mathbb{R}$ 에서의 닫힌집합이면 $U\cap G_1$은 U에서의 열린집합이 되고 $U\cap F_1$은 U에서의 닫힌집합이 된다.

따라서 상대적 열린집합과 상대적 닫힌집합을 다음과 같이 정의할 수 있다.

정리 2.6.9 | 상대적 열린집합과 상대적 닫힌집합의 다른 정의

집합 $U\subseteq\mathbb{R}$ 와 U의 부분집합 G, F가 주어졌다고 하자. G가 U에서의 상대적 열린집합이 될 필요충분조건은 $\mathbb{R}$ 에서의 열린집합 G_1이 존재하여 $G=U\cap G_1$을 만족시키는 것이다. 또한 F가 U에서의 상대적 닫힌집합이 될 필요충분조건은 $\mathbb{R}$ 에서의 닫힌집합 F_1이 존재하여 $F=U\cap F_1$을 만족시키는 것이다.

미적분학에서는 $\epsilon-N$ 논법과 $\epsilon-\delta$ 논법으로 극한의 성질을 증명한다. 하지만 해석학에서는 그러한 방법뿐만 아니라 열린집합과 닫힌집합을 이용하여 극한의 성질을 증명한다. 열린집합과 닫힌집합을 이용하여 극한의 성질을 밝히는 방법을 **위상적 방법**이라고 부른다. 열린집합과 닫힌집합은 실수계에서뿐만 아니라 복소수계, 유클리드 벡터공간, 일반적인 거리공간에서도 정의되므로 위상적 방법으로 밝혀낸 여러 가지 성질은 실수계가 아닌 다른 공간에도 쉽게 적용할 수 있다.

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 다음 진술의 참 · 거짓 여부를 판별하여라.

(1) 이항연산은 함수이다.

(2) 나눗셈은 $\mathbb{R}$ 위에서의 이항연산이다.

(3) 수학적 귀납법은 $n=\infty$에 대하여 $p(n)$이 참임을 보일 때에 사용된다.

(4) 임의의 실수 a와 r에 대하여 a^r은 실수이다.

(5) E가 공집합이 아니면 E의 내부도 공집합이 아니다.

(6) E가 공집합이 아니면 E의 경계도 공집합이 아니다.

(7) E의 외부가 공집합이면 E는 전체집합이다.

(8) 임의의 집합은 열린집합 또는 닫힌집합 둘 중 하나이다.

(9) 열린집합은 닫힌집합이 아니다.

(10) 임의의 유한집합은 최댓값과 최솟값을 가진다.

2. 집합 E와 함수 ϕ가 다음과 같이 주어져 있을 때 ϕ가 E 위에서의 이항연산이 되는지 판별하여라.

(1) $E=\mathbb{Q}$, $\phi(x, y)=x+y$ (2) $E=\mathbb{Q}^+$, $\phi(x, y)=xy$

(3) $E=\mathbb{Z}$, $\phi(x, y)=x-y$ (4) $E=\mathbb{N}$, $\phi(x, y)=x-y$

(5) $E=\mathbb{R}^+$, $\phi(x, y)=\log(xy)$ (6) $E=\mathbb{Z}^*$, $\phi(x, y)=x$

3. 실수 a, b와 0이 아닌 실수 x, y와 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라. 단 2.1절의 내용만 사용하여라.

(1) $(x^{-1})^{-1}=x$ (2) $(xy^{-1})^{-1}=x^{-1}y$

(3) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{ay+bx}{xy}$ (4) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\dfrac{ay-bx}{xy}$

4. 양의 실수들의 모임을 $\mathbb{P}$ 라고 하자. 이때 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $(x\in\mathbb{P} \ \wedge\ y\in\mathbb{P}) \Rightarrow (x+y\in\mathbb{P} \ \wedge\ xy\in\mathbb{P})$

(2) 임의의 실수 x에 대하여 $x\in\mathbb{P}$, $x=0$, $x\in(-\mathbb{P})$ 중 하나만 성립하며, 둘 이상이 동시에 성립하지는 않는다.

5. 수학적 귀납법을 이용하여 자연수 집합이 곱셈에 대하여 닫혀있음을 증명하여라.

6. 정수 집합이 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀있음을 증명하여라.

7. 유리수 집합이 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있음을 증명하여라.

8. 유리수와 무리수의 합이 무리수임을 증명하여라. 또한 0이 아닌 유리수와 무리수의 곱이 무리수임을 증명하여라.

9. 수학적 귀납법을 이용하여 다음을 증명하여라.

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10. 수학적 귀납법을 이용하여 다음을 증명하여라.

(1) $n \geq 3$인 임의의 자연수 n에 대하여 $2n+1 < 2^n$

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $n < 2^n$

(3) 임의의 자연수 n에 대하여 $n^2 \leq 2^n + 1$

(4) 임의의 자연수 n에 대하여 $n^3 \leq 3^n$

11. 실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 아래로 유계일 때 E의 하한이 유일함을 증명하여라.

12. 다음 합집합과 교집합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,\ n)$ (2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n},\ 1\right)$ (3) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$

(4) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)$ (5) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{n},\ 1\right]$ (6) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,\ n]$

(7) $\displaystyle\bigcup_{x\in(0,\ 1]}[x-2,\ x+1]$ (8) $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,\ 1)}(x-1,\ x+1]$ (9) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{1}{n^2+1},\ 2\right]$

13. 다음 집합의 유계 여부를 판별하고 상한, 하한, 최대원소, 최소원소를 각각 구하여라.

(1) $\mathbb{N}$ (2) $\mathbb{Q}$ (3) $\mathbb{Q}^+$

(4) $(-\infty,\ 1]$ (5) $\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ (6) $\left\{\dfrac{1}{x}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}^*\right\}$

14. 다음은 모든 사람이 거지임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 오류를 찾아라.

> 먼저 0원이나 1원만 가진 사람은 거지임이 명백하다. 이제 k원을 가진 사람이 거지라고 가정하자. 거지에게 1원을 주어도 그 사람이 거지임은 변함이 없으므로 $(k+1)$원을 가진 사람도 거지이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 사람은 거지이다.

15. 다음은 임의의 두 자연수가 서로 같음을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 오류를 찾아라.

> 자연수 $m,\ n$에 대하여 $\mu \coloneqq \max\{m,\ n\}$이라고 하자.
>
> • 만약 $\mu = 1$이면 $m = n = 1$이다.
> • 이제 $\mu = k$일 때 $m = n$이라고 가정하자. 그러면 $\mu = k+1$일 때 $k+1 = \max\{m,\ n\}$이므로 $k = \max\{m-1,\ n-1\}$이다. 그런데 귀납적 가정에 의하여 $m-1 = n-1$이므로 $m = n$이다.
>
> 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m = n$이다.

16. 실수 $x,\ y$에 대하여 다음 두 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $\max\{x,\ y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ (2) $\min\{x,\ y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

17. x가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $|x| < \epsilon$이 성립하면 $x = 0$임을 증명하여라.

18. 실수 $x,\ y$에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) $x \leq y$일 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x \leq y+\epsilon$인 것이다.

(2) $x \leq y$일 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x < y+\epsilon$인 것이다.

위 명제는 부등식을 직접 증명하기 어려운 경우에 약간의 여유를 주어 증명하기 쉽게 변형할 때에 사용된다.

19. A와 B가 실수 집합의 부분집합이고 공집합이 아니며 $A \subseteq B$라고 하자. 이때 다음을 증명하여라.

(1) B가 위로 유계일 때 $\sup A \le \sup B$가 성립한다.

(2) B가 아래로 유계일 때 $\inf A \ge \inf B$가 성립한다.

20. 실수 집합의 부분집합 A, B에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) $A \subseteq B$이면 $A^o \subseteq B^o$이다.

(2) $A^o \subseteq A$

(3) $(A^o)^o = A^o$

(4) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

21. $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 f가 임의의 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시키면 f를 **우함수**(even function)라고 부른다. 또한 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 g가 임의의 x에 대하여 $g(-x) = -g(x)$를 만족시키면 g를 **기함수**(odd function)라고 부른다. f_1, f_2가 우함수이고 g_1, g_2가 기함수일 때 다음과 같이 정의된 함수 h가 우함수인지 기함수인지 판별하여라.

(1) $h(x) = f_1(x) f_2(x)$

(2) $h(x) = f_1(x) g_1(x)$

(3) $h(x) = g_1(x) g_2(x)$

(4) $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$

(5) $h(x) = f_1(x) + g_1(x)$

(6) $h(x) = g_1(x) + g_2(x)$

(7) $h(x) = f_1(f_2(x))$

(8) $h(x) = f_1(g_1(x))$

(9) $h(x) = g_1(f_1(x))$

(10) $h(x) = g_1(g_2(x))$

개념 응용하기

22. 서로 다른 n개의 개체 중에서 순서를 고려하지 않고 r개를 선택하는 경우의 수를 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타내며 **조합** 또는 **이항계수**라고 부른다. 즉 자연수 m, k에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$${}_0\mathrm{C}_0 := 1, \ {}_0\mathrm{C}_k := 0, \ {}_m\mathrm{C}_k := {}_{m-1}\mathrm{C}_k + {}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

이때 $0 \le r \le n$인 임의의 두 정수 r, n에 대하여

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

이 성립함을 증명하여라.

23. 0이 아닌 실수 x, y와 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, x^{n-r} y^r$$

이 등식을 **이항 정리**라고 부른다.

24. p가 자연수에 대한 명제함수라고 하자. 만약 p가 두 조건

(i) $p(1)$이 참이다

(ii) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $\cdots$, $p(k)$가 모두 참이면 $p(k+1)$도 참이다

를 모두 만족시키면 임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참임을 증명하여라. 이 명제를 **제 2 수학적 귀납법**이라고 부른다.

25. 무리수의 조밀성을 다른 방법으로 증명해보자. $a < b$일 때 열린구간 (a, b)가 비가산집합임을 보여라. 이것을 이용하여 $a < r < b$인 무리수 r가 존재함을 증명하여라.

26. $\mathbb{Z}$ 가 $\mathbb{R}$ 에서 닫힌집합임을 증명하여라.

27. A와 B가 실수 집합의 부분집합이고 공집합이 아니라고 하자. 이때 다음을 증명하여라.
(1) A, B가 모두 위로 유계일 때 $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$가 성립한다.
(2) A, B가 모두 아래로 유계일 때 $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$가 성립한다.

28. 집합 D에서 정의된 함수 f, g가 D에서 유계일 때 다음이 성립함을 증명하여라.

$$\sup_{x \in D}(f(x)+g(x)) \le \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x),$$

$$\inf_{x \in D}(f(x)+g(x)) \ge \inf_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x).$$

또한 위 부등식에서 등호가 성립하지 않는 f, g, D의 예를 각각 들어라.

29. $\mathbb{R}$ 에서 정의된 임의의 함수는 기함수와 우함수의 합으로 표현됨을 보여라.

실력 다지기

30. $x \ge 1$이고 r가 유리수일 때 $x^r = \sup\{x^t \mid t \le r,\ t \in \mathbb{Q}\}$임을 증명하여라.

31. A와 B가 실수 집합의 부분집합이고 공집합이 아니라고 하자. 이때 다음을 증명하여라.
(1) A, B가 모두 위로 유계이고 원소가 모두 양수일 때 $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$가 성립한다.
(2) A, B가 모두 아래로 유계이고 원소가 모두 양수일 때 $\inf(AB) = (\inf A)(\inf B)$가 성립한다.

32. 집합 $D = \{2^{-n}k \mid k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$이 $\mathbb{R}$ 에서 조밀함을 보여라. 즉 $a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a < q < b$인 원소 $q \in D$가 존재함을 증명하여라.

33. f가 $I := (a,\ b)$에서 정의된 실함수이고 $c \in I$라고 하자. 만약 양수 δ가 존재하여 $c-\delta < x < c$일 때마다 $f(x) < f(c)$이고 $c < x < c+\delta$일 때마다 $f(c) < f(x)$가 성립하면 'f는 **c에서 순증가한다**'라고 말한다. 만약 $a < x < y < b$일 때마다 $f(x) < f(y)$가 성립하면 'f는 **I에서 순증가한다**'라고 말한다. f가 I의 각 점에서 순증가하면 f는 I에서 순증가함을 보여라.

34. D가 실수 집합의 부분집합이라고 하자. D에서 정의된 유계인 함수 f에 대하여

$$\|f\|_D = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

로 정의한다. 이때 $\|f\|_D$를 f의 **상한노름** 또는 **균등노름**이라고 부른다. 두 함수 f, g가 D에서 유계이고 α가 실수일 때 다음을 증명하여라.

(1) $\|-f\| = \|f\|$ (2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$ (3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

이러한 의미에서 집합 D에서 정의된 유계인 함수들의 모임은 노름선형공간이 된다.

35. 실수 집합의 부분집합 A, B가 공집합이 아니고 두 조건

(i) $A \cup B = \mathbb{R}$ (ii) $\forall a \in A\ \forall b \in B : a < b$

를 모두 만족시키면

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \le \alpha \le b$$

를 만족시키는 실수 α가 유일하게 존재함을 증명하여라. 이 명제를 **데데킨트**(Dedekind)**의 정리**라고 부른다.

36. 데데킨트의 정리와 실수계의 상한 공리가 서로 동치임을 증명하여라.

37. $\{x_n\}$이 실수열이고 $s_n := \sup\{x_k \mid k \geq n\}$이라고 하자. 이때 $\{s_n\}$이 감소수열임을 보여라. 즉 임의의 자연수 n에 대하여 $s_n \geq s_{n+1}$임을 보여라. 또한 $t_n := \inf\{x_k \mid k \geq n\}$으로 정의된 수열 $\{t_n\}$에 대해서는 어떠한 결론을 얻을 수 있는지 설명하여라.

38. 실수 r가 **대수적**(algebraic)이라는 것은 r가 모든 계수가 정수인 다항방정식의 해가 되는 것이다. 즉 정수 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n이 존재하여 $a_n \neq 0$이고

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

을 만족시키는 것이다. 대수적이지 않은 실수를 **초월수**(transcendental number)라고 부른다. 모든 대수적 수의 집합이 가산임을 증명하여라.

도약하기

39. 실수계의 공리를 모두 만족시키는 계가 유일함을 증명하여라. 즉 $\mathbb{R}$와 $\mathbb{R}'$이 각각 실수계의 공리를 만족시키는 계이면 $\mathbb{R}$와 $\mathbb{R}'$은 환동형이면서 순서동형임을 보여라.

40. $F := \{p + q\sqrt{2} \mid p \in \mathbb{Q},\ q \in \mathbb{Q}\}$가 $\mathbb{R}$의 부분체임을 보여라. 즉 F가 체 공리의 조건을 모두 만족시킴을 보여라.

41. 초한귀납법(transfinite induction)을 찾아보고 제 2 수학적 귀납법과 비교해보자.

42. 거리함수의 정의를 찾아보고 그것이 정리 2.2.11과 어떠한 관계가 있는지 살펴보자.

43. 위상의 정의를 찾아보고 그것이 정리 2.6.6과 어떠한 관계가 있는지 살펴보자.

44. 실수계를 구성하는 다음 방법을 조사해보자.
    (1) 코시 수열을 이용하는 방법
    (2) 무한소수를 이용하는 방법
    (3) 하이퍼실수(hyperreal number)를 이용하는 방법
    (4) 초실수(surreal number)를 이용하는 방법
    (5) 정수군(group of integers)을 이용하는 방법

45. 복소수계를 정의하는 다음 3가지 방법을 조사해보자.
    (1) 공리를 이용하여 정의하는 방법
    (2) 실수의 순서쌍의 집합으로 정의하는 방법
    (3) 행렬을 이용하여 정의하는 방법

46. 길이가 1인 선분 AB의 내부에 점 C를 임의로 택할 때 선분 AC의 길이가 유리수일 확률을 구하여라.

47. 중학교 3학년 학생이 당신에게 '무리수가 존재하는 수이기는 하지만 실제 생활에서 무리수를 계산하는 일은 없기 때문에 무리수는 현실에서 필요 없는 수이다'라고 말한다면 당신은 그 학생에게 어떤 대답을 해주겠는가?

48. 중학생에게 자연수, 정수, 유리수의 개수가 각각 같다는 것을 직관적으로 이해할 수 있도록 하기 위한 설명 방법을 고안해보아라.

49. 고등학생에게 무리수가 유리수보다 많다는 것을 직관적으로 이해할 수 있도록 하기 위한 설명 방법을 고안해보아라.

50. 실수계를 확장한 체계로서 복소수계, 사원수계, 팔원수계가 있다. 이들의 정의를 찾아보고 실수계에서 성립하는 성질이 이들 공간에서도 성립하는지 살펴보아라.

51. 피타고라스 학파는 다음과 같이 주장하였다.

모든 수는 유리수로 이루어져 있다. 즉 두 정수의 비로 나타낼 수 있다. 설령 직접 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수라 할지라도 그 수에 얼마든지 가까운 유리수를 택하여 근사시킬 수 있으므로 결국 모든 수는 유리수로 이루어져 있다고 할 수 있다.

이에 대한 자신의 의견을 서술하여라.

생각 넓히기 실수의 정의와 칸토어의 무한집합론

19세기 말 해석학을 기하학 직관으로부터 벗어나 논리적으로 명료하게 하는 과정에서 몇 가지 문제점이 발견되었다. 그것은 실수의 정의였다. 이전에는 수열의 극한을 정의하고 나서 실수를 유리수열의 극한으로 정의하였는데, 이것은 해결되지 않은 전제에 기초를 두고 논점을 세우는 심각한 오류를 범하는 것이었다. 메레이(Méray)는 그의 책 『무한소 해석의 새 이론(Nouveau précis d'analyse infinitésimale)』에서 실수를 정의할 때 수열이나 극한과 같은 조건을 전제로 하지 않는 방법으로 이 문제를 해결하였다.

한편 데데킨트(Dedekind)는 실수가 선분 위의 점과 일대일 대응된다는 것에 관심을 가졌다. 선분은 그 위에 있는 한 점에 의해 두 부분으로 분할되며 역으로 선분이 두 부분으로 분할되면 그 사이의 점은 반드시 하나만이 존재하게 된다. 유리수 집합을 둘로 나누면 그 사이에는 반드시 한 점만이 존재하게 되는데 유리수 집합은 조밀하기 때문에 그 사이의 점은 유리수가 될 수도 있고 무리수가 될 수도 있다. 여기에서 유리수의 분할된 한 집합은 다른 한 집합을 유일하게 결정하므로 결국 유리수의 한 부분집합만으로도 유리수와 무리수를 정의할 수 있다. 이것이 오늘날 실수의 상한 공리(완비성 공리)이다.

실수의 정의 외에 발견된 또 다른 문제점은 무한의 산술화였다. 그때까지 많은 수학자들이 무한을 언급하고 사용하였지만 그것은 단지 양이 매우 커지는 상태, 또는 임의의 수보다 더 큰 수 정도로 인식되었을 뿐 명확하게 정의되지는 않았었다. 데데킨트의 친구이자 후배였던 칸토어(Cantor)는 유한집합에서 사용하던 산술을 무한집합에도 그대로 적용할 수 있는 새로운 집합론을 창시하였다. 그때까지 무한집합은 자기 자신의 진부분집합과 일대일 대응되는 성질로 인하여 무한집합의 존재는 모순이라고 여겨졌다. 그러나 칸토어는 그것을 모순으로 보지 않고 무한집합의 정의로 삼았다. 이러한 이유 때문에 칸토어의 집합론을 '무한론'이라고 부르기도 한다. 무한에 대한 칸토어의 접근 방법은 해석학의 발전에 큰 영향을 끼쳤다. 또한 해석학에서 다루는 수의 집합이 주로 무한집합이기 때문에 칸토어의 집합론은 해석학의 이론을 다듬는 데에 중요한 이론적 기저가 되었다.

불행히도 칸토어의 집합론이 그 당시 수학자들에게 곧바로 받아들여진 것은 아니다. 특히 그 당시 권위 있는 수학자였던 크로네커(Kronecker)는 실재하지 않는 무한을 다룬 칸토어의 집합론이 아무런 가치가 없다며 칸토어를 비난하였다. 그러나 데데킨트는 칸토어의 이론을 적극 지지하였으며, 뒤늦게 20세기 초에 칸토어 이론은 많은 수학자들에게 인정받게 되었다. 특히 힐베르트(Hilbert)는 "그 누구도 칸토어가 만든 이 낙원에서 우리를 추방할 수 없다"라며 그를 지지하였다. 칸토어에 의하여 무한이 산술화되자 수학은 매우 빠르게 발전하기 시작하였다. 이러한 이유로 칸토어가 집합론을 발표한 때를 현대 수학의 시점으로 본다.

03
실수열의 극한

해석학은 극한을 이용하여 함수의 성질을 분석하는 학문이며, 수열의 극한은 모든 극한의 기본이다. 함수의 극한의 정의는 수열의 극한의 정의로부터 유도될 수 있으며 해석학의 중심 이론인 함수열의 극한은 수열의 극한을 함수열에 적용한 것이다. 따라서 수열의 극한의 성질은 수많은 극한의 성질을 살펴보기 위한 바탕이 된다.

이 장에서는 실수열의 극한의 개념과 다양한 성질을 살펴본다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 실수열의 극한의 정의를 말하고 $\epsilon - N$ 논법으로 수열의 수렴과 발산을 증명할 수 있다.
- 부분수열과 단조수열의 성질을 이용하여 수열의 수렴을 증명할 수 있다.
- 집적점의 개념을 설명하고 관련 성질을 증명할 수 있다.
- 코시 수열의 정의와 성질을 설명할 수 있다.
- 상극한과 하극한의 개념을 설명하고, 수열의 상극한과 하극한을 구할 수 있다.
- 열린집합과 닫힌집합에 관련된 수열의 극한의 성질을 증명할 수 있다.
- 콤팩트집합의 개념을 설명하고 집합의 콤팩트성을 판별할 수 있다.

3.1 극한의 개념

직관적으로 수열이란 수를 나열한 것을 의미한다. 나열한 각 수를 항이라고 부르는데, 각 항에는 순서가 있다. 따라서 수열의 항을 나열한 순서대로 자연수에 대응시키면 수열의 모든 항은 자연수와 하나씩 대응된다. 이러한 개념을 바탕으로 수열을 정의하면 다음과 같다.

> **정의 3.1.1** | 수열 (sequence)
>
> 적당한 정수 n_0에 대하여 $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$의 꼴로 나타낼 수 있는 정의역을 갖는 함수를 **수열**이라고 부른다. $n \in D$에 대하여 수열 $a : D \to \mathbb{R}$의 함숫값을 $a(n)$으로 나타내는 대신 a_n으로 나타낸다. 그리고 수열 $a : D \to \mathbb{R}$를 $\{a_n\}$, $\langle a_n \rangle$ 또는 $(a_n \mid n \in D)$로 나타낸다. 이때 a_{n_0}을 $\{a_n\}$의 **첫째항** 또는 **초항**이라고 부른다.

참고 3.1.2 정의 3.1.1에서 수열 $\{a_n\}$의 정의역 D는 위로 유계가 아니다. 특별한 경우 수열의 정의역이 위로 유계인 경우가 있는데 그러한 수열을 **유한수열**이라고 부른다. 이와 구분하기 위하여 정의역이 위로 유계가 아닌 수열을 **무한수열**이라고 부르기도 한다. 별다른 언급이 없는 한 수열이라고 할 때에는 무한수열을 의미하는 것으로 약속한다. □

참고 3.1.3 정의 3.1.1에서 수열 $\{a_n\}$의 공역은 실수 집합이다. 그러한 수열을 **실수열**이라고 부른다. 공역이 유리수 집합인 수열은 **유리수열**이라고 부르며 공역이 무리수 집합인 수열은 **무리수열**이라고 부른다. 다변수 해석학에서는 공역이 $\mathbb{R}^n$인 수열을 다루는데, 그러한 수열은 **벡터수열**이라고 부른다. □

수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n을 **항**(term)이라고 부르며 이때 n을 a_n의 **첨수**(index)라고 부른다. 정의에 의하면 수열의 첫째항은 a_1일 수도 있고 a_{-1}일 수도 있으며 a_4일 수도 있다. 그러나 보통 첫째항은 a_0이거나 a_1이다. 수열의 첫째항이 언급되어있지 않고 단지 수열의 일반항만 주어져 있다면, 자연수 n_0 중에서 그 이상의 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정의되도록 하는 가장 작은 n_0을 택하여 첫째항의 첨수로 정한다. [첫째항에 관한 단서가 전혀 없는 경우 문맥에 따라서 첫째항은 a_0 또는 a_1인 것으로 생각한다.]

예제 3.1.4 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{\pi}{n(n-1)(n-3)}$$

로 주어졌을 때, $\{a_n\}$의 첫째항을 정하여라.

풀이 $n=1$ 또는 $n=3$인 경우 일반항의 분모가 0이 되므로 항 a_n이 정의되지 않는다. 따라서 수열의 첫째항은 a_4이다. □

고등학교 과정에서는 수열의 극한을 다음과 같이 직관적으로 정의한다.

n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 말한다.

여기서 a_n이 L에 한없이 가까워진다는 것은 a_n과 L 사이의 거리 $|a_n - L|$이 0에 가까워진다는 것을 의미한다. 즉 양수 ϵ이 임의로 주어졌을 때 ϵ이 아무리 작아도 그것이 양수이기만 하면 $|a_n - L| < \epsilon$이 되도록 할 수 있다는 것을 의미한다. 단, 이 부등식은 항상 성립하는 것이 아니라 n이 충분히 커야 성립한다.

예제 3.1.5 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어졌다.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

(1) $\epsilon = 2$일 때 $|a_n - 0| < \epsilon$이 성립하도록 하는 n의 조건을 구하여라.

(2) $\epsilon = 0.1$일 때 $|a_n - 0| < \epsilon$이 성립하도록 하는 n의 조건을 구하여라.

풀이 $|a_n - 0| = 1/n < \epsilon$이 되어야 하므로 $n > 1/\epsilon$일 때 $|a_n - 0| < \epsilon$이 성립한다.

(1) $n > 1/2$일 때 성립한다. 그런데 n이 자연수이므로 이것을 $n > 0$이라고 나타낼 수 있다.

(2) $n > 1/0.1$일 때 성립한다. 즉 구하는 조건은 $n > 10$이다. [$n > 20$이라고 해도 된다.] □

앞의 예제 3.1.5에서 직관적으로 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다. 따라서 양수 ϵ이 임의로 주어졌을 때, ϵ이 아무리 작아도 $n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon$이 성립하도록 하는 자연수 N이 존재한다. 이러한 내용을 바탕으로 수열의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 3.1.6 | 수열의 극한

$\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립하면 '$\{a_n\}$은 L에 **수렴**(converges)한다'라고 말하며 $a_n \to L$로 나타낸다. 이때 L을 수열 $\{a_n\}$의 **극한**(limit)이라고 부른다.

참고 3.1.7 수렴하는 실수열의 극한은 유일하다. 즉 $a_n \to L$이고 $a_n \to M$이면 $L = M$이다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\epsilon/2$도 양수이다. 먼저 $a_n \to L$이므로 수열의 극한의 정의에 의하져 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 또한 $a_n \to M$이므로 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때마다

$$|a_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \le |L - a_n| + |a_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $|L - M| < \epsilon$이다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로 $|L - M| = 0$이다. ■

수렴하는 수열의 극한이 유일하므로 $\{a_n\}$이 L에 수렴하는 것을 다음과 같이 등호를 사용하여 나타낸다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad \text{또는} \quad \lim a_n = L$$

수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 것을 한정기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n : [n > N \to |a_n - L| < \epsilon]$$

한정기호 $\forall$과 $\exists$가 섞여 있는 명제를 증명할 때에는 전칭기호 $\forall$에 해당하는 변수는 임의로 주어졌다고 가정하고 존재기호 $\exists$에 해당하는 변수의 존재성을 보여야 한다. 극한의 정의를 이용하여 수열의 극한의 증명을 기술하는 과정은 다음과 같다. [증명을 '기술하는 과정'이며 '찾는 방법'이 아니다.]

1. 먼저 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 가정한다.
2. 그리고 ϵ에 대응하는 충분히 큰 자연수 N을 설정한다.
3. 다음으로 $n > N$이라고 가정하고 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립함을 보인다.

예제 3.1.8 수열 $\{a_n\}$이 $a_n = 1/n$로 주어졌을 때 $a_n \to 0$임을 보여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < \epsilon N$인 자연수 N이 존재한다. 그러면 $n > N$일 때

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이므로 $a_n \to 0$이다. □

위 예제처럼 N을 쉽게 찾을 수 있는 경우도 있지만, 아래의 예제처럼 증명을 시작하기 전에 꽤 복잡한 계산을 하여 N을 찾아야 하는 경우도 있다.

예제 3.1.9 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$을 증명하여라.

도입 $a_n := \sqrt{(n+1)/n}$이라고 하자. 자연수 N이 이미 구해졌다고 생각하고 $n > N$이라고 가정하자. 그러면

$$|a_n - 1| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 = \frac{\frac{n+1}{n} - 1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1\right)} < \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{n}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N}$$

을 얻는다. 따라서 $1/(2N) < \epsilon$이 되도록 N을 정해주면 된다.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < 2\epsilon N$인 자연수 N이 존재한다. 그러면 $n > N$일 때

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1\right)} < \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{n}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \epsilon$$

이므로 $a_n \to 1$이다. □

예제 3.1.10 $a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$으로 주어진 수열 $\{a_n\}$이 $\frac{2}{3}$에 수렴함을 보여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < 9\epsilon N$인 자연수 N이 존재한다. 그러면 $n > N$일 때

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3(3n+4)} < \frac{1}{3 \cdot 3n} = \frac{1}{9n} < \frac{1}{9N} < \epsilon$$

이므로 $\{a_n\}$은 $2/3$에 수렴한다. □

예제 3.1.11 $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{2^n} \to 0$임을 증명하여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 아르키메데스의 정리에 의하여 $1 < \epsilon N$인 자연수 N이 존재한다. 그러면 $n > N$일 때

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이므로 $1/2^n \to 0$이다. [엄밀히 따지면 $n \le 2^n$도 증명해야 한다.] □

이제 수렴하는 수열의 성질을 살펴보자.

정의 3.1.12 함수의 유계성

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 집합 $E \subseteq D$가 주어졌다고 하자. 만약 양수 M이 존재하여 임의의 $x \in E$에 대하여 $|f(x)| \le M$이 성립하면 'f는 **E에서 유계**이다'라고 말하며, 이것을 $|f| \le M$으로 나타낸다. f가 정의역에서 유계이면 'f는 **유계**이다'라고 말한다.

수열도 함수의 일종이므로 수열의 유계는 함수의 유계와 똑같이 정의된다. 즉 $\{a_n\}$이 수열일 때, 실수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_n| \le M$이 성립하면 '$\{a_n\}$은 **유계**이다'라고 말한다.

정리 3.1.13 수렴하는 수열의 유계성

수렴하는 수열은 유계이다.

증명 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다고 하자. $\epsilon \coloneqq 1$이라고 하자. 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립한다. 여기에 $\epsilon = 1$을 대입하고 부등식을 변형하면 $n > N$일 때

$$|a_n| < |L| + 1$$

을 얻는다. 한편 집합 $\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|\}$은 유한집합이므로 최댓값 m을 가진다.

이제 $M \coloneqq \max\{|L|+1, m\}$이라고 하면 임의의 n에 대하여 $|a_n| \le M$이 성립한다. ■

참고 3.1.14 정리 3.1.13의 역은 참이 아니다. 즉 유계이지만 수렴하지 않는 수열이 존재한다. 예를 들어 $a_n \coloneqq (-1)^n$이라고 하면 $\{a_n\}$은 유계인 수열이지만 수렴하지 않는다. 한편 유계인 수열은 그 자신이 수렴하지 않을지라도 항상 수렴하는 부분수열을 가진다. 이와 관련된 자세한 내용은 3.5절의 볼차노-바이어슈트라스의 정리를 통해 보게 될 것이다. □

수열의 일부 항만을 모아 순서대로 나열한 수열을 부분수열이라고 부른다. 예를 들어 수열

$$a_n : 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots$$

의 짝수 번째 항을 모아 나열한 수열

$$b_k : 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ \cdots$$

는 $\{a_n\}$의 부분수열이 된다. 여기서 $n_k = 2k$라고 하면 $b_k = a_{n_k}$라고 쓸 수 있다.

정의 3.1.15 부분수열

$\{a_n\}$이 정의역 D를 갖는 수열이고 $\{n_k\}$가 공역이 D인 순증가수열이라고 하자. [즉 $j<k$일 때 $n_j < n_k$라고 하자.] 이때 두 수열을 합성하여 만든 수열 $\{a_{n_k}\}$를 $\{a_n\}$의 **부분수열**(subsequence)이라고 부른다.

수렴하는 수열의 부분수열이 어떠한 성질을 가지고 있는지 살펴보자. $\{a_n\}$이 L에 수렴하는 수열이라고 하자. 그리고 $\{a_{n_k}\}$가 $\{a_n\}$의 부분수열이라고 하자. 극한의 정의에 의하여 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립한다. 즉 $n_k > N_1$일 때마다 $|a_{n_k} - L| < \epsilon$이 성립한다. $\{n_k\}$는 순증가수열이고 공역이 정수 집합이므로 N_1보다 큰 값을 갖는 항 n_N이 존재한다. 이때 $k > N$이라고 하면 $n_k > n_N > N_1$이므로 $|a_{n_k} - L| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 $\{a_{n_k}\}$도 L에 수렴함을 알 수 있다. 즉 다음 정리를 얻는다.

정리 3.1.16 | 부분수열의 수렴성

수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 부분수열 $\{a_{n_k}\}$도 L에 수렴한다.

참고 3.1.17 수열 $\{a_n\}$의 한 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 수렴하여도 본래의 수열은 수렴하지 않을 수 있다. 예를 들어 $a_n := (-n)^n - n^n$이라고 하면 n이 짝수일 때에는 $a_n = 0$이므로 $a_{2n} \to 0$이다. 그러나 $\{a_n\}$은 유계가 아니므로 수렴하지 않는다. □

끝으로 열린집합을 이용하여 수열의 극한을 정의해보자. 직관적으로 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 것은 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때 a_n의 값이 L로부터 멀리 떨어지지 않는다는 것을 의미한다. 이것을 열린집합을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

정리 3.1.18 | 수열의 극한의 위상적 정의

수열 $\{a_n\}$과 실수 L에 대하여 다음 세 명제는 서로 동치이다. [위상수학에서 자주 사용한다.]

(i) $\{a_n\}$이 L에 수렴한다.

(ii) 임의의 양수 ϵ에 대하여 $a_n \notin B_\epsilon(L)$인 항 a_n의 개수가 유한이다.

(iii) L을 원소로 가지는 임의의 열린집합 G에 대하여 $a_n \notin G$인 항 a_n의 개수가 유한이다.

증명 [(i)⇒(ii)] 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립한다. 즉 $a_n \notin B_\epsilon(L)$인 것은 $n \le N$일 때뿐이다.

[(ii)⇒(iii)] G가 열린집합이고 $L \in G$라고 하자. L은 G의 내점이므로 $B_\epsilon(L) \subseteq G$인 양수 ϵ이 존재한다. 이때 $a_n \notin B_\epsilon(L)$인 항 a_n의 개수가 유한이므로 $a_n \notin G$인 항 a_n의 개수도 유한이다.

[(iii)⇒(i)] 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $B_\epsilon(L)$은 L을 원소로 가지는 열린집합이다. 따라서 $a_n \notin B_\epsilon(L)$인 항 a_n의 개수는 유한이다. 그러한 항 a_n의 첨수 중에서 가장 큰 값을 N이라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다 $a_n \in B_\epsilon(L)$이므로 $|a_n - L| < \epsilon$이다. ■

참고 3.1.19 집합 E와 점 p에 대하여 $p \in E^o$일 때 E를 p의 **근방**(neighborhood)이라고 부른다. 위 정리에 의하면 수열의 극한의 정의를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴할 필요충분조건은 L의 임의의 근방 E에 대하여 $a_n \notin E$인 항 a_n의 개수가 유한인 것이다.

3.2 극한의 계산

극한의 정의는 수열의 극한이 수렴하거나 발산함을 증명하는 데에 사용되지만 극한의 정의가 수열의 극한을 구하는 구체적인 방법을 제공하지는 않는다. 그러나 극한의 정의를 이용하여 유리식으로 정의된 수열의 극한을 구하는 공식을 만들 수 있다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 사칙계산으로 결합하여 새로운 수열을 만들 수 있다. 이를테면 수열 $\{a_n + b_n\}$은 두 수열의 각 항을 더하여 얻은 수열이며 $\{a_n b_n\}$은 두 수열의 각 항을 곱하여 얻은 수열이다. 이렇게 얻어진 수열의 극한이 본래의 수열의 극한과 어떠한 관계가 있는지 살펴보자.

정리 3.2.1 수열의 합과 극한

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하면 $\{a_n + b_n\}$도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{1}$$

증명 (1)의 양변 모두 극한이다. 그러나 우변은 이미 정해진 값이므로 상수로 생각하고 좌변의 극한이 우변에 수렴함을 증명하면 된다.

$\{a_n\}$에 A에 수렴하고 $\{b_n\}$이 B에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\epsilon/2$도 양수이므로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 마찬가지로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때마다

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $N := \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\{a_n + b_n\}$은 $A + B$에 수렴한다. ■

두 수열을 곱하여 얻은 수열의 극한의 성질도 이와 비슷하다.

정리 3.2.2 수열의 곱과 극한

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하면 $\{a_n b_n\}$도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

증명 $\{a_n\}$에 A에 수렴하고 $\{b_n\}$이 B에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 수렴하는 수열은 유계이므로 양수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_n| < M$을 만족시킨다.

또한 $\{b_n\}$이 B에 수렴하므로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2M}$$

이 성립한다. $\epsilon/(2|B|+1)$은 양수이므로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2(|B|+1)}$$

이 성립한다. 이제 $N \coloneqq \max\{N_1,\ N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \le |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \\ &< |a_n|\frac{\epsilon}{2M} + |B|\frac{\epsilon}{2(|B|+1)} < M\frac{\epsilon}{2M} + |B|\frac{\epsilon}{2(|B|+1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 $\{a_n b_n\}$은 AB에 수렴한다. ■

따름정리 3.2.3 수렴하는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

증명 (ii) $c_n \coloneqq k$라고 하면 $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} c_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) 정리 3.2.2와 따름정리 3.2.3-(ii)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\{a_n + (-1)b_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n + (-1)\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$ ■

참고 3.2.4 함수 $f : A \to B$가 임의의 $x,\ y \in A$와 임의의 실수 k에 대하여

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(kx) = kf(x)$$

를 만족시킬 때, f를 **선형사상**(linear mapping)이라고 부른다. 여기서 A와 B는 실수 집합의 부분집합일 수도 있고 벡터공간의 부분집합일 수도 있다. 만약 A와 B가 동일한 집합이면 f를 **선형변환**(linear transformation)이라고 부른다. A가 벡터공간이고 B가 실수 집합이면 f를 **선형범함수**(linear functional)라고 부른다.

C가 수렴하는 수열들의 집합일 때 $\{x_n\} \in C$에 대하여 함수 $f : C \to \mathbb{R}$를

$$f(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

으로 정의하면 f는 선형사상의 두 조건을 만족시킨다. 즉 극한은 선형사상이다. 특히 수렴하는 수열들의 모임은 실수 집합을 체(field)로 갖는 벡터공간이므로 수열의 극한은 선형범함수이다. □

따름정리 3.2.5 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 p가 자연수이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p$$

증명 수학적 귀납법으로 증명하자. $p=1$일 때에는 명백하게 정리의 등식이 성립한다. 이제 자연수 k에 대하여 $p=k$일 때 정리의 등식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{k+1} = \lim_{n\to\infty}\{(a_n)^k(a_n)\} = \left\{\lim_{n\to\infty}(a_n)^k\right\}\left\{\lim_{n\to\infty} a_n\right\} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{k+1}$$

이므로 $p = k+1$일 때에도 정리의 등식이 성립한다. ■

정리 3.2.6 수열의 몫의 극한

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니고 $a_n \to A$, $A \neq 0$이면 $\{1/a_n\}$도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$$

위 정리에서 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 양수일 수도 있고 음수일 수도 있다. 그러나 A가 양수라면 적당한 항 이후로 a_n은 계속 양수가 될 것이며, A가 음수라면 적당한 항 이후로 a_n은 계속 음수가 될 것이다. 따라서 n을 충분히 크게 하면 a_n은 A에 충분히 가까이 다가가고 $A \neq 0$이므로 a_n은 0에 가까이 다가가지 않게 된다. a_n이 0에 가까이 다가가지 않아야

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n A|}$$

의 값을 작아지게 할 수 있다. 따라서 위 정리를 증명하기 위해서는 먼저 n을 충분히 크게 하여 a_n이 0에 다가가지 않도록 하고, 극한의 정의를 이용하여 $|a_n - A|$의 값이 작아지게 해야 한다.

정리 3.2.6의 증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $|A|/2$는 양수이므로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}|A|$$

가 성립한다. 이 부등식을 변형하면

$$\frac{|A|}{2} < |a_n|$$

을 얻는다. 다음으로 $(|A|^2\epsilon)/2$은 양수이므로 극한의 정의에 의하여 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때마다

$$|a_n - A| < \frac{|A|^2\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $N := \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{|A|\,|a_n|} < \frac{|a_n - A|}{|A|} \cdot \frac{2}{|A|} = |a_n - A| \cdot \frac{2}{|A|^2} < \frac{|A|^2\epsilon}{2} \cdot \frac{2}{|A|^2} = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\{1/a_n\}$은 $1/A$에 수렴한다. ■

따름정리 3.2.7 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 A, B에 수렴하고 $\{b_n\}$의 모든 항이 0이 아니며 $B \neq 0$이면, 수열 $\{a_n/b_n\}$도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

증명 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$. ■

예제 3.2.8 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$을 이용하여 $a_n=\frac{2n+3}{3n+4}$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 극한을 구하여라.

풀이 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}2+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}3+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2+3\cdot 0}{3+4\cdot 0}=\frac{2}{3}.$$ □

참고 3.2.9 정리 3.2.1과 정리 3.2.2는 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모두 수렴할 때에만 사용할 수 있다. $\{a_n\}$ 또는 $\{b_n\}$이 수렴하지 않는 경우에는 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하더라도 정리 3.2.1을 사용할 수 없으며, $\{a_nb_n\}$이 수렴하더라도 정리 3.2.2를 사용할 수 없다. 예를 들어 $a_n := n$, $b_n := -n$이면 $\{a_n+b_n\}$은 0에 수렴하지만 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 각각 수렴하지 않으므로 $\lim(a_n+b_n)\neq\lim a_n+\lim b_n$이다. 마찬가지로 $a_n := n$, $b_n := 1/n$이면 $\{a_nb_n\}$은 1에 수렴하지만 $\{a_n\}$은 수렴하지 않으므로 $\lim(a_nb_n)\neq(\lim a_n)(\lim b_n)$이다. □

지금까지 수열의 극한과 사칙계산의 관계를 살펴보았다. 이제 수열의 극한과 부등호의 관계를 살펴보자.

정리 3.2.10 | 수열의 극한과 부등호의 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고 모든 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$$

증명 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한을 각각 A, B라고 하자. 그리고 결론에 반하여 $B<A$라고 가정하자. 그러면 $\epsilon := (A-B)/2$는 양수이므로 자연수 N_1이 존재하여 $n>N_1$일 때마다

$$|a_n-A|<\epsilon$$

이 성립한다. 마찬가지로 자연수 N_2가 존재하여 $n>N_2$일 때마다

$$|b_n-B|<\epsilon$$

이 성립한다. $N := \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n>N$일 때마다

$$b_n<B+\epsilon=B+\frac{A-B}{2}=A-\frac{A-B}{2}=A-\epsilon<a_n$$

이므로 $b_n<a_n$이다. 이것은 정리의 가정에 모순이다. 따라서 $A\le B$이다. ■

따름정리 3.2.11 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고, $a_n>b_n$인 n의 개수가 유한이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$$

증명 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한을 각각 A, B라고 하자. $a_n>b_n$인 n의 개수가 유한이므로 자연수 K가 존재하여 $n\ge K$일 때마다 $a_n\le b_n$이 성립한다. $a_{n_k} := a_{K+k}$, $b_{n_k} := b_{K+k}$라고 하면 $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$는 각각 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 부분수열이므로 A, B에 수렴한다. 또한 임의의 k에 대하여 $a_{n_k}\le b_{n_k}$이므로 정리 3.2.10에 의하여 $A\le B$이다. ■

따름정리 **3.2.12** 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $a_n < 0$인 항 a_n의 개수가 유한이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$이다.

증명 따름정리 3.2.11에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} 0 = 0$이다. ■

참고 **3.2.13** 수렴하는 수열들의 집합을 C라고 하자. C의 두 원소 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$에 대하여

$$x \leq y \iff [x_n > y_n \text{인 } n\text{의 개수가 유한이다}]$$

라고 정의하고 극한이 같은 두 수열을 서로 동치인 것으로 간주하면 $\langle C, \leq \rangle$는 전순서집합이 된다. 따름정리 3.2.11에 의하면 $x \leq y$일 때 $\lim x_n \leq \lim y_n$이 성립한다. 따라서 수열의 극한은 C로부터 $\mathbb{R}$로의 순서보존사상이다. □

참고 **3.2.14** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 A, B에 수렴하고 임의의 n에 대하여 $a_n < b_n$일지라도 $A = B$일 수도 있다. 예를 들어 $a_n := 2^{-n}$, $b_n := 1/n$이라고 하면 임의의 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 두 수열 모두 0에 수렴한다. □

정리 3.2.15 | 조임 정리

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 주어졌다고 하자. 만약 유한 개를 제외한 n에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$이 성립하고 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$이 동일한 값 L에 수렴하면 $\{b_n\}$도 L에 수렴한다.

증명 정리의 조건에 의하여 자연수 K가 존재하여 $n \geq K$일 때마다 $a_n \leq b_n \leq c_n$이 성립한다.
['유한 개를 제외한'이 무슨 뜻인지 깊게 생각해보자.]

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다

$$|a_n - L| < \epsilon$$

이 성립한다. 마찬가지로 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$일 때마다

$$|c_n - L| < \epsilon$$

이 성립한다. $N := \max\{K, N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon$$

이므로 $|b_n - L| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 $\{b_n\}$은 L에 수렴한다. ■

예제 **3.2.16** $0 < r < 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$임을 보여라.

풀이 $h := \frac{1}{r} - 1$이라고 하면 $h > 0$이고 $r = \frac{1}{1+h}$이다. 베르누이 부등식에 의하여 자연수 n에 대하여

$$0 < r^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$

이 성립한다. 여기서

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nh} = 0$$

이므로 조임 정리에 의하여 $\{r^n\}$은 0에 수렴한다. □

3.3 단조수열

이 절에서는 유계인 증가수열과 유계인 감소수열의 수렴하는 성질을 살펴본다.

정의 3.3.1 | 단조함수

함수 f의 정의역과 공역이 순서집합이라고 하자. 그리고 x_1과 x_2가 f의 정의역의 원소라고 하자.

(i) $x_1 < x_2$일 때마다 $f(x_1) < f(x_2)$가 성립하면 f를 **순증가함수**라고 부른다.

(ii) $x_1 < x_2$일 때마다 $f(x_1) > f(x_2)$가 성립하면 f를 **순감소함수**라고 부른다.

(iii) $x_1 < x_2$일 때마다 $f(x_1) \le f(x_2)$가 성립하면 f를 **증가함수**라고 부른다.

(iv) $x_1 < x_2$일 때마다 $f(x_1) \ge f(x_2)$가 성립하면 f를 **감소함수**라고 부른다.

(v) 증가함수와 감소함수를 통틀어 **단조함수**라고 부른다.

수열도 함수이므로 수열의 단조도 함수의 단조와 동일하게 결정된다. 예를 들어 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $m < k$일 때마다 $a_m \le a_k$가 성립하면 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

예제 3.3.2 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열임을 보여라.

$$a_1 \coloneqq \sqrt{2}\,,\ a_{n+1} \coloneqq \sqrt{2+a_n}$$

풀이 먼저 수열 $\{a_n\}$이 2에 의하여 위로 유계임을 보이자. $a_1 = \sqrt{2} < 2$이 성립하고, $a_k < 2$라고 가정하면 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$이므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 n에 대하여 $a_n < 2$이다.

다음으로 $\{a_n\}$이 증가수열임을 보이자. 임의의 n에 대하여 $0 < a_n < 2$이므로

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{2+a_n-(a_n)^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n} = \frac{(2-a_n)(1+a_n)}{\sqrt{2+a_n}+a_n} > 0$$

이다. 따라서 $\{a_n\}$은 증가수열이다. □

위 예제에서 $\{a_n\}$은 증가수열이다. 그러나 2에 의하여 위로 유계이기 때문에 한없이 증가할 수는 없다. 따라서 $\{a_n\}$은 2 이하인 실수에 수렴할 것이라고 추측할 수 있다.

정리 3.3.3 | 단조수렴

단조이고 유계인 수열은 수렴한다.

증명 수열 $\{a_n\}$이 단조증가하고 유계인 수열이라고 하자. 그러면 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 공집합이 아니고 유계이므로 상한 L을 가진다. 이제 $\{a_n\}$이 L에 수렴함을 보이자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 상한의 성질에 의하여 $L-\epsilon < a_N \le L$인 항 a_N이 존재한다. 그런데 $\{a_n\}$이 단조증가수열이므로 $n > N$일 때 $a_N \le a_n < L+\epsilon$이 성립한다. 따라서 $n > N$일 때마다 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립하므로 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다. 수열 $\{a_n\}$이 단조감소하고 유계인 수열일 때에도 비슷한 방법으로 $\{a_n\}$이 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$의 하한에 수렴함을 보일 수 있다. ■

단조수렴 정리는 단조이고 유계인 수열이 수렴한다는 것을 알려주지만 극한을 구하는 방법은 설명하지 않는다. 그러나 부분수열의 성질을 함께 이용하면 단조수렴하는 수열의 극한을 구할 수 있는 경우가 많다.

예제 3.3.4 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 \coloneqq \sqrt{2}$, $a_{n+1} \coloneqq \sqrt{2+a_n}$으로 정의되었을 때 $\{a_n\}$의 극한을 구하여라.

풀이 예제 3.3.2에 의하여 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다. 그 극한을 L이라고 하자. 그러면 $\{a_{n+1}\}$은 부분수열이므로 동일한 값 L에 수렴한다. 따라서

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+L}$$

이므로 $L = \sqrt{2+L}$이다. 이 방정식을 풀면 $L = 2$이다. 따라서 $\{a_n\}$은 2에 수렴한다. □

예제 3.3.5 $0 < a < 1$일 때 $\{a^n\}$의 극한을 구하여라.

풀이 $\{a^n\}$은 감소수열이고 0에 의하여 아래로 유계이므로 단조수렴 정리에 의하여 수렴한다. 그 극한을 L이라고 하자. 그러면 $\{a^{n+1}\}$은 부분수열이므로 동일한 값 L에 수렴한다. 따라서

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a^n a = \left(\lim_{n\to\infty} a^n\right)\left(\lim_{n\to\infty} a\right) = La$$

이므로 $L = La$이다. 이때 $a \neq 0$이므로 $L = 0$이다. 따라서 $\{a^n\}$은 0에 수렴한다. □

예제 3.3.6 $a > 0$일 때 $\{a^{1/n}\}$의 극한을 구하여라.

풀이 먼저 $a > 1$인 경우를 증명하자. $\{a^{1/n}\}$은 감소수열이고 1에 의하여 아래로 유계이므로 단조수렴 정리에 의하여 수렴한다. 그 극한을 L이라고 하자. 그러면 부분수열 $\{a^{1/(2n)}\}$도 L에 수렴한다. 따라서

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{\frac{1}{2n}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n}}\right)^2 = L^2$$

이므로 $L = L^2$이다. 그런데 $a^{1/n} \geq 1$이므로 $L \geq 1$이다. 따라서 $L = L^2$을 풀면 $L = 1$이다. 즉 수열 $\{a^{1/n}\}$은 1에 수렴한다.

다음으로 $0 < a < 1$인 경우를 증명하자. $1 < 1/a$이므로 앞에서 얻은 결과를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} = 1$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{1/n}}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

을 얻는다.

한편 $a = 1$인 경우에는 자명하게 $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$이다. □

예제 **3.3.7** $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$으로 주어진 수열 $\{e_n\}$이 수렴함을 보여라.

풀이 먼저 $\{e_n\}$이 증가수열임을 보이자. 베르누이 부등식에서 $n > 2$, $x > -1$인 경우 $(1+x)^n > 1+nx$가 성립한다. 여기에 $x = -1/n^2$을 대입하면

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$$

을 얻는다. 좌변을 인수분해하면

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$$

이고 양변을 $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$으로 나누면

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

을 얻는다. 즉 $e_n > e_{n-1}$이므로 $\{e_n\}$은 증가수열이다.

다음으로 $\{e_n\}$이 위로 유계임을 보이자. 이항정리와 등비수열의 합 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)\\ &\le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} \le 1+\frac{1}{1-1/2} = 3\end{aligned}$$

이므로 $\{e_n\}$은 3에 의하여 위로 유계이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{e_n\}$은 수렴한다. □

정의 3.3.8 | 자연상수

극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$을 e로 나타내고 **자연상수**라고 부른다. ['오일러 상수' 또는 '네이피어 상수'라고도 부른다.]

참고 **3.3.9** 자연상수는 $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$로 정의할 수도 있다. 단, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$이다.

증명* $e_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$이라고 하자. 예제 3.3.7의 풀이 과정에 의하여

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

이므로 $e_n \le s_n$이다. 따라서 $e \le \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$이다.

이제 자연수 n, m에 대하여 $n \geq m$이라고 하자. 그러면 이항정리에 의하여

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\end{aligned}$$

이다. 이 부등식의 양변에 $n \to \infty$인 극한을 취하면

$$e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m$$

을 얻는다. 다시 양변에 $m \to \infty$인 극한을 취하면 $e \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$을 얻는다. ■

참고 3.3.10 자연상수 e는 무리수이다.

증명 결론에 반하여 e가 유리수라고 가정하자. 그러면 $e=p/q$인 자연수 p, q가 존재한다. 참고 3.3.9의 증명에서 사용한 수열 $\{s_n\}$에 대하여

$$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{n!\,n}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$0 < e-s_n < \frac{1}{n!\,n}$$

한편 $q!\,e$가 자연수이고

$$q!\,s_q = q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

도 자연수이므로 $q!\,(e-s_q)$도 자연수이다. 그런데 $q \geq 1$이므로

$$0 < q!\,(e-s_q) < \frac{1}{q} \leq 1$$

이다. 이것은 $q!\,(e-s_q)$가 자연수라는 데에 모순이다. 따라서 e는 유리수가 아니다. ■

예제 3.3.11 수열 $\{n^{1/n}\}$이 1에 수렴함을 보여라.

풀이 예제 3.3.7에서 $\{e_n\}$은 3에 의하여 위로 유계이므로 $n \geq 3$일 때

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

이 성립한다. 부등식의 성질을 이용하여 위 식을 변형하면

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(n+1)^n}{n^n} \leq n \quad\Leftrightarrow\quad (n+1)^n \leq n^{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \leq n^{\frac{1}{n}}$$

이므로 $n \geq 3$일 때 $\{n^{1/n}\}$은 감소한다. 또한 $n^{1/n} \geq 1$이므로 $\{n^{1/n}\}$은 아래로 유계이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{n^{1/n}\}$은 수렴한다. $\{n^{1/n}\}$의 극한값을 L이라고 하자. 그러면 $\{(2n)^{1/(2n)}\}$은 부분수열이므로 동일한 값 L에 수렴한다. 따라서

$$L=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(2n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^{\frac{1}{n}}} = 1\cdot\sqrt{L}=\sqrt{L}$$

이므로 $L=\sqrt{L}$이다. $L \geq 1$이므로 방정식 $L=\sqrt{L}$을 풀면 $L=1$을 얻는다. □

3.4 발산하는 수열

지금까지 수렴하는 수열의 성질을 살펴보았다. 이 절에서는 수렴하지 않는 수열의 성질을 살펴보자.

> **정의 3.4.1** 수열의 발산
>
> 수열 $\{a_n\}$이 어떠한 값에도 수렴하지 않을 때 '$\{a_n\}$은 **발산**한다'라고 말한다.

수열의 수렴을 증명할 때에 극한의 정의를 이용한 것처럼 수열의 발산을 증명할 때에도 극한의 정의를 이용할 수 있다. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 것을 한정기호로 나타내면

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n : \left[n > N \to \left|a_n - L\right| < \epsilon\right]$$

이며, 이것의 부정을 구하면

$$\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n : \left[n > N \wedge \left|a_n - L\right| \geq \epsilon\right]$$

이다. 즉 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하지 않음을 증명할 때에는 적당히 작은 양수 ϵ을 정해두고 자연수 N이 임의로 주어졌을 때 그보다 더 큰 자연수 n이 존재하여 $\left|a_n - L\right| \geq \epsilon$을 만족시킴을 보여야 한다.

예제 3.4.2 수열 $\{(-1)^n\}$이 발산함을 보여라.

풀이 실수 L이 임의로 주어졌다고 하자. 이제 $\{(-1)^n\}$이 L에 수렴하지 않음을 보일 것이다.

먼저 $L \geq 0$인 경우를 살펴보자. $\epsilon := 1$이라고 하자. 그리고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. 이때 홀수 $n > N$에 대하여 $\left|(-1)^n - L\right| = |-1-L| \geq 1 = \epsilon$이므로 $\{(-1)^n\}$은 L에 수렴하지 않는다.

다음으로 $L < 0$인 경우를 살펴보자. $\epsilon := 1$이라고 하고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. 이때 짝수 $n > N$에 대하여 $\left|(-1)^n - L\right| = |1-L| \geq 1 = \epsilon$이므로 $\{(-1)^n\}$은 L에 수렴하지 않는다.

이로써 수열 $\{(-1)^n\}$은 어떠한 값에도 수렴하지 않으므로 $\{(-1)^n\}$은 발산한다. □

다른 방법의 풀이 수열 $\{(-1)^n\}$이 수렴한다고 가정하자. 그리고 극한을 L이라고 하자. 수렴하는 수열의 부분수열은 본래 수열과 동일한 값에 수렴하므로 $L = \lim(-1)^{2n} = 1$이고 $L = \lim(-1)^{2n+1} = -1$이다. 이것은 극한의 유일성에 모순이므로 $\{(-1)^n\}$은 수렴하지 않는다. □

예제 3.4.3 수열 $\{n^2\}$이 발산함을 보여라.

풀이 실수 L이 임의로 주어졌다고 하자. $\epsilon := 1$이라고 하자. 그리고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $n > \max\{L,\ N\} + 1$을 만족시키는 자연수 n이 존재한다. 이때 $\left|n^2 - L\right| \geq |n - L| > 1 = \epsilon$이므로 $\{n^2\}$은 L에 수렴하지 않는다. □

다른 방법의 풀이 수렴하는 수열은 유계이다. 그러나 $\{n^2\}$은 유계가 아니다. 따라서 발산한다. □

수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우 $\{a_n\}$은 유계일 수도 있고 유계가 아닐 수도 있다. 또한 $\{a_n\}$이 유계가 아닌 경우 $\{a_n\}$은 무한히 커질 수도 있고 무한히 작아질 수도 있다. 이처럼 발산을 여러 가지 경우로 구분해보자.

정의 3.4.4 | 수열의 발산

실수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) 임의의 실수 Y에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $a_n > Y$가 성립하면 '수열 $\{a_n\}$은 **양의 무한대로 발산한다**'라고 말하며 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$로 나타낸다.

(ii) 임의의 실수 Y에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $a_n < Y$가 성립하면 '수열 $\{a_n\}$은 **음의 무한대로 발산한다**'라고 말하며 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$로 나타낸다.

(iii) 양의 무한대로 발산하는 경우와 음의 무한대로 발산하는 경우를 통틀어 '**무한대로 발산한다**'라고 말한다.

(iv) 발산하지만 양의 무한대로 발산하지도 않고 음의 무한대로 발산하지도 않는 경우 '**진동한다**'라고 말한다.

보기 3.4.5 다음은 발산하는 수열의 여러 가지 예이다.

(i) $\{(-1)^n\}$은 유계이지만 발산하므로 진동한다.

(ii) $\{n^2\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(iii) $\{n-n^3\}$은 음의 무한대로 발산한다.

(iv) $\{n+n(-1)^n\}$은 아래로 유계이지만 위로 유계가 아니므로 발산한다. 그러나 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지 않는다.

(v) $\{(-n)^n\}$은 아래로 유계가 아니고 위로 유계도 아니므로 발산한다. 그러나 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지 않는다.

(vi) $\{\sin n\}$은 유계이지만 발산하므로 진동한다. □

양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 수열에 대해서도 조임 정리를 사용할 수 있다.

정리 3.4.6 | 무한대로 발산하는 수열의 조임 정리

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n > b_n$인 첨수 n의 개수가 유한이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(i) $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하면 $\{b_n\}$도 양의 무한대로 발산한다.

(ii) $\{b_n\}$이 음의 무한대로 발산하면 $\{a_n\}$도 음의 무한대로 발산한다.

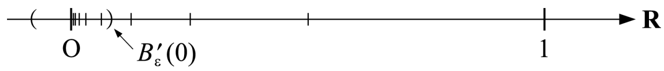
증명 정리의 조건에 의하여 자연수 K가 존재하여 $n > K$일 때마다 $a_n \le b_n$이 성립한다.

(i) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하므로 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다 $a_n > Y$가 성립한다. $N \coloneqq \max\{N_1, K\}$라고 하면 $n > N$일 때마다 $b_n \ge a_n > Y$이므로 $\{b_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(ii) 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. $\{b_n\}$이 음의 무한대로 발산하므로 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$일 때마다 $b_n < Y$가 성립한다. $N \coloneqq \max\{N_1, K\}$라고 하면 $n > N$일 때마다 $a_n \le b_n < Y$이므로 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다. ■

3.5 집합의 집적점과 수열의 집적점

집합 $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$의 원소를 수직선에 나타내면 점들이 원점 근처에 가까이 몰려 있는 것을 볼 수 있다.



이때 E의 원소 중 일부는 빠진 열린구 $B_\epsilon'(0)$에 속한다. 즉 양수 ϵ이 아무리 작아도 E의 원소 중 하나 이상은 $B_\epsilon'(0)$에 속한다. 이렇게 집합 E의 원소가 λ의 주변에 몰려있을 때 λ를 E의 집적점이라고 부른다.

정의 3.5.1 | 집합의 집적점

E가 실수 집합의 부분집합이고 λ가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon'(\lambda) \cap E \neq \varnothing$ 이면 λ를 E의 **집적점**(cluster point)이라고 부른다. E의 집적점들의 모임을 E의 **도집합**(derived set)이라고 부르며 E'으로 나타낸다.

참고 3.5.2 정의 3.5.1에서 조건 '임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon'(\lambda) \cap E \neq \varnothing$ 이면'을 '임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon'(\lambda) \cap E$가 무한집합이면'으로 바꾸어도 동치인 정의가 된다. □

보기 3.5.3 다음은 집적점과 도집합의 예이다.

(i) 열린구간 $(0, 1)$의 도집합은 $[0, 1]$이다.
(ii) 유리수의 조밀성에 의하여 $\mathbb{Q}$ 의 도집합은 $\mathbb{R}$ 이다.
(iii) 집합 $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 의 도집합은 $[0, 1]$이다.
(iv) 유한집합은 집적점을 갖지 않는다. 즉 유한집합의 도집합은 공집합이다.
(v) $\mathbb{Z}$ 는 집적점을 갖지 않는다. 즉 $\mathbb{Z}$ 는 어느 곳에서도 조밀하지 않다.

이 예를 통해 λ가 E의 집적점인 것과 λ가 E의 원소인 것은 관계가 없음을 알 수 있다. 즉 E의 원소가 아닌 것도 E의 집적점이 될 수 있으며, E의 원소인 점이 E의 집적점이 아닌 경우도 있다. □

실수 집합의 부분집합 E가 무한집합이라고 하자. 만약 E가 유계라면 E의 원소들이 몰려 있는 점이 적어도 하나 이상 존재할 것이다. 원소들이 몰려 있는 점이 없고 유계인 집합은 유한집합이 될 것이기 때문이다. 다음 정리는 이와 같은 내용을 논리적으로 설명한다.

정리 3.5.4 | 볼차노-바이어슈트라스(Bolzano-Weierstrass)

유계인 무한집합은 집적점을 가진다.

증명 집합 E가 유계이고 무한집합이라고 하자. E가 유계이므로 양수 M이 존재하여 $E \subseteq [-M, M]$을 만족시킨다. 그러면 두 집합 $[-M, 0]$과 $[0, M]$ 중 적어도 하나는 E의 원소를 무한히 많이 가진다. 그러한 것을 택하여 I_1이라고 하자. 다시 $I_1 = [a_1, b_1]$을 두 개의 구간으로 등분한 $[a_1, (a_1+b_1)/2]$, $[(a_1+b_1)/2, b_1]$ 중 적어도 하나는 E의 원소를 무한히 많이 가진다. 그러한 것을 택하여 I_2라고 하자.

이제 닫힌구간 $I_n = [a_n,\ b_n]$이 E의 원소를 무한히 많이 가진다고 가정하자. 그러면 I_n을 두 개의 닫힌구간으로 등분한

$$\left[a_n,\ \frac{a_n+b_n}{2}\right],\quad \left[\frac{a_n+b_n}{2},\ b_n\right]$$

중 적어도 하나는 E의 원소를 무한히 많이 가진다. 그러한 것을 택하여 $I_{n+1} = [a_{n+1},\ b_{n+1}]$이라고 하자. 이제 집합족 $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$과 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 귀납적으로 정의되었다.

정의에 의하여 $I_{n+1} \subseteq I_n$이고 $a_n = \inf I_n$, $b_n = \sup I_n$이므로 $\{a_n\}$은 단조증가수열이고 $\{b_n\}$은 단조감소수열이다. 또한 $a_n \le b_n$이므로 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 단조수렴 정리에 의하여 수렴한다. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한을 각각 a, b라고 하자. 그러면 $a \le b$이다. 정의에 의하여 I_n의 길이는 $b_n - a_n = 2^{1-n}M$이므로

$$b-a = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{1-n}M = 0$$

이다. 따라서 $a = b$이다.

이제 $\lambda \coloneqq a$라고 하자. 그리고 λ가 E의 집적점임을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $2^{1-N}M < \epsilon$인 자연수 N이 존재한다. 이것은 $I_{N+1} \subseteq B_\epsilon(\lambda)$인 것을 의미한다. 그런데 I_{N+1}에 속하는 E의 원소의 개수가 무한이므로 $B_\epsilon(\lambda)$에 속하는 E의 원소의 개수도 무한이다. 따라서 E의 무한히 많은 원소가 $B_\epsilon{}'(\lambda)$에도 속한다. 즉 λ는 E의 집적점이다. ■

참고 3.5.5 위 정리에서 사용된 I_n을 **축소구간**(nested interval)이라고 부른다. 정리의 증명 과정을 통해, 집합 $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$의 모든 원소가 닫힌구간이고 $I_{n+1} \subseteq I_n$을 만족시키면 $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$은 공집합이 아님을 알 수 있다. 특히 $n \to \infty$일 때 I_n의 길이가 0에 수렴하면 I는 한점집합이 된다. 이러한 명제를 **축소구간 정리**라고 부른다.

집합의 집적점과 비슷하게 수열의 집적점을 정의할 수 있다. $a_n \coloneqq 1/n$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 항은 0 주변에 몰려 있다. 이때 0을 이 수열의 집적점이라고 부른다. 이번에는 $b_n \coloneqq (-1)^n$으로 정의된 수열 $\{b_n\}$을 생각하자. 이 수열의 치역은 $\{-1,\ 1\}$로서 유한집합이지만 무한히 많은 항이 -1과 1에 몰려 있다고 말할 수 있다. $\{b_n\}$의 항이 1에 무수히 많이 몰려 있으므로 1에 수렴하는 $\{b_n\}$의 부분수열이 존재한다. 실제로 부분수열 $\{b_{2k}\}$는 1에 수렴하는 수열이다. 따라서 수열의 집적점을 다음과 같이 정의한다.

정의 3.5.6 | 수열의 집적점

$\{a_n\}$이 실수열이고 λ가 실수라고 하자. 만약 $\{a_n\}$의 부분수열 중에서 λ에 수렴하는 것이 존재하면 λ를 $\{a_n\}$의 **집적점**이라고 부른다.

참고 3.5.7 다음은 수열의 집적점의 예이다.

(i) 수렴하는 수열은 단 하나의 집적점을 가진다.

(ii) $a_n = (-1)^n$일 때 $\{a_n\}$은 -1과 1을 집적점으로 가진다.

(iii) $a_n = (-n)^n$일 때 $\{a_n\}$은 집적점을 갖지 않는다.

(iv) $a_n = n - n(-1)^n$일 때 $\{a_n\}$은 수렴하지 않지만 한 점 0을 집적점으로 가진다.

(v) $\{a_n\}$이 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{Q}$로의 일대일대응일 때 $\{a_n\}$은 모든 실수를 집적점으로 가진다. □

수열의 집적점은 집합의 집적점과 밀접한 관련을 가지고 있다.

참고 3.5.8 λ가 집합 E의 집적점이면 E의 점을 이용하여 λ에 수렴하는 수열을 만들 수 있다.

증명 자연수 n에 대하여 $a_n \in B_{1/n}(\lambda) \cap E$인 점 a_n을 택하면 $\{a_n\}$은 λ에 수렴하고 E의 점들로 이루어진 수열이 된다. ■

참고 3.5.9 수열 $\{a_n\}$의 치역 $E = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 집적점 λ를 가지면 λ는 $\{a_n\}$의 집적점이다.

증명 먼저 $a_{n_1} \in B_1(\lambda) \cap E$인 항 a_{n_1}이 존재한다. 이제 자연수 k에 대하여 $a_{n_k} \in B_{1/k}(\lambda) \cap E$라고 가정하자. $B_{1/(k+1)}(\lambda) \cap E$는 무한집합이므로 $n_{k+1} > n_k$이면서 $a_{n_{k+1}} \in B_{1/(k+1)}(\lambda) \cap E$인 항 $a_{n_{k+1}}$이 존재한다. 이로써 임의의 자연수 k에 대하여 a_{n_k}가 귀납적으로 정의되었다. 이때 $\{a_{n_k}\}$는 $\{a_n\}$의 부분수열이고 λ에 수렴한다. ■

수렴하는 수열의 극한을 위상적으로 정의한 것처럼 수열의 집적점도 위상적으로 정의할 수 있다.

참고 3.5.10 λ가 수열 $\{a_n\}$의 집적점일 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $a_n \in B_\epsilon(\lambda)$인 항 a_n의 개수가 무한인 것이다.

증명 [$\Rightarrow$] λ가 수열 $\{a_n\}$의 집적점이라고 하자. 그러면 λ에 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재한다. 수렴하는 수열의 극한의 성질에 의하여 임의의 양수 ϵ에 대하여 $a_{n_k} \notin B_\epsilon(\lambda)$인 a_{n_k}의 개수는 유한이다.

[$\Leftarrow$] 임의의 양수 ϵ에 대하여 $a_n \in B_\epsilon(\lambda)$인 항 a_n의 개수가 무한이라고 하자. 먼저 $a_{n_1} \in B_1(\lambda)$인 첨수 n_1이 존재한다. 또한 자연수 n_k에 대하여 $n_{k+1} > n_k$이면서 $a_{n_{k+1}} \in B_{1/(k+1)}(\lambda)$인 첨수 n_{k+1}이 존재한다. 이로써 수열 $\{a_{n_k}\}$가 귀납적으로 정의되었다. 이때 $\{a_{n_k}\}$는 λ에 수렴한다. ■

유계인 무한집합이 집적점을 갖는 것처럼 유계인 수열은 집적점을 가진다.

정리 3.5.11	볼차노-바이어슈트라스
유계인 수열은 집적점을 가진다.	

증명 수열 $\{a_n\}$이 유계라고 하자. 그리고 $\{a_n\}$의 치역을 $E = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이라고 하자. 그러면 E는 유한집합이거나 무한집합이다.

만약 E가 유한집합이면 무한히 많은 n에 대하여 $a_n = \lambda$가 되는 점 $\lambda \in E$가 존재한다. 그러한 항 a_n을 모아서 구성한 부분수열은 λ에 수렴하므로 λ는 $\{a_n\}$의 집적점이다.

만약 E가 무한집합이면 E는 유계이므로 집적점 λ를 가진다. 그러면 참고 3.5.9에 의하여 λ는 $\{a_n\}$의 집적점이다. ■

참고 3.5.12 위 정리의 역은 참이 아니다. 즉 집적점을 갖더라도 유계가 아닐 수 있다. $a_n := n - n(-1)^n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 집적점 0을 갖지만 위로 유계가 아니다. □

3.6 코시 수열

극한의 정의를 이용하여 수열이 수렴함을 증명하려면 극한값을 알아야 한다. 따라서 극한값을 알지 못한 상태에서 수렴 여부를 증명하는 것은 다소 어려울 수 있다. 특히 수열이 단조가 아닌 경우에는 단조수렴정리를 사용할 수 없기 때문에 어려움이 더 커진다. 이 절에서 살펴볼 코시 조건은 극한값을 알지 못하는 수열의 수렴 여부를 밝히는 데에 유용하게 사용된다.

정의 3.6.1 | 코시 수열

수열 $\{a_n\}$이 주어졌다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N,\ m > N$일 때마다 $|a_m - a_n| < \epsilon$이 성립하면 '$\{a_n\}$은 **코시 조건**(Cauchy condition)을 만족시킨다'라고 말한다. 코시 조건을 만족시키는 수열을 **코시 수열**(Cauchy sequence)이라고 부른다.

직관적으로 수열 $\{a_n\}$이 코시 수열이라는 것은 첨수가 커질수록 $\{a_n\}$의 항들이 서로 가까워진다는 것을 의미한다. 이제 실수계에서 수열의 수렴이 코시 수열과 어떠한 관계가 있는지 살펴보자.

정리 3.6.2 | 실수계에서 코시 수열의 수렴성

실수계에서 수열이 수렴할 필요충분조건은 코시 수열인 것이다.

증명 [$\Rightarrow$] 수렴하는 수열이 코시 수열임을 증명하는 것은 정의를 이용하여 쉽게 된다. $\{a_n\}$이 L에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. 동일한 자연수 N에 대하여 $n > N,\ m > N$일 때마다

$$|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \le |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $\{a_n\}$은 코시 수열이다.

[$\Leftarrow$] 역을 증명하는 것은 약간의 감각이 필요하다. $\{a_n\}$이 코시 수열이라고 하자. 먼저 $\{a_n\}$이 유계임을 보이고, 집적점을 찾고, 그 집적점에 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이는 세 단계로 증명을 진행하자.

코시 수열의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N,\ m > N$일 때마다 $|a_n - a_m| < 1$이 성립한다. 즉 $n > N$일 때마다 $|a_n - a_{N+1}| < 1$이므로 $|a_n| < |a_{N+1}| + 1$이 성립한다.

$$M \coloneqq \max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|,\ |a_{N+1}| + 1\}$$

이라고 하면 임의의 n에 대하여 $|a_n| \le M$이다. 따라서 $\{a_n\}$은 유계이다.

볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 집적점 L을 가진다. L에 수렴하는 부분수열을 $\{a_{n_k}\}$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 N_1이 존재하여 $k > N_1$일 때마다 $|a_{n_k} - L| < \epsilon/2$이 성립한다. 또한 코시 조건에 의하여 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2,\ m > N_2$일 때마다 $|a_m - a_n| < \epsilon/2$이 성립한다.

$N := \max\{N_1,\ N_2\}$라고 하자. 그리고 $n_k > N,\ k > N$인 k를 택하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다. ■

참고 3.6.3 거리공간 $(M,\ d)$에서 정의된 임의의 코시 수열이 M의 원소에 수렴할 때 $(M,\ d)$를 **완비거리공간**이라고 부른다. 실수계의 두 점 $p,\ q$에 대하여 $d(p,\ q) = |p-q|$라고 하면 $d(p,\ q)$는 p와 q의 거리를 나타내는 함수가 된다. 이러한 관점에서 실수계는 거리공간이다. 특히 실수계에서 임의의 코시 수열이 수렴하므로 실수계는 완비인 거리공간이다. 반면 모든 항이 유리수이지만 극한값은 유리수가 아닌 코시 수열이 존재하므로 유리수계는 완비가 아닌 거리공간이다. □

코시 조건은 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

수열 $\{a_n\}$이 코시 수열이라는 것은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N,\ p \in \mathbb{N}$ 일 때마다 $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$이 성립하는 것이다.

다음은 코시 조건을 이용하여 수렴을 증명하는 예이다.

예제 3.6.4 수열 $\{a_n\}$이 **축약수열**(contractive sequence)이라는 것은 $0 < q < 1$인 실수 q가 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_{n+1} - a_n| \le q\,|a_n - a_{n-1}|$이 성립하는 것을 의미한다. 임의의 축약수열이 수렴함을 보여라.

풀이 $\{a_n\}$이 축약수열이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

먼저 $|a_2 - a_1| \le q^1 |a_1 - a_0|$이 성립한다. 다음으로 자연수 k에 대하여 $|a_{k+1} - a_k| \le q^k |a_1 - a_0|$이 성립한다고 가정하면

$$|a_{k+2} - a_{k+1}| \le q\,|a_{k+1} - a_k| \le q\left(q^k |a_1 - a_0|\right) = q^{k+1} |a_1 - a_0|$$

이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여

$$|a_{n+1} - a_n| \le q^n |a_1 - a_0|$$

이 성립한다. 이 부등식을 이용하면 자연수 p에 대하여

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=1}^{p} (a_{n+k} - a_{n+k-1}) \right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| \\ &\le \sum_{k=1}^{p} q^{n+k-1} |a_1 - a_0| = q^n \frac{1-q^p}{1-q} |a_1 - a_0| \le \frac{q^n}{1-q} |a_1 - a_0| \end{aligned}$$

을 얻는다. 여기서 $0 < q < 1$이므로 $\dfrac{q^N}{1-q} |a_1 - a_0| < \epsilon$을 만족시키는 자연수 N이 존재한다.

이제 $n > N,\ p \in \mathbb{N}$ 일 때마다

$$|a_{n+p} - a_n| \le \frac{q^n}{1-q} |a_1 - a_0| \le \frac{q^N}{1-q} |a_1 - a_0| < \epsilon$$

이므로 $\{a_n\}$은 코시 수열이다. 따라서 $\{a_n\}$은 수렴한다. □

3.7 상극한과 하극한

수열 $\{a_n\}$이 $a_n := (-1)^n$으로 주어졌다고 하자. $\{a_n\}$의 항은 -1과 1이 교대로 반복되어 나타나므로 수렴하지 않는다. 그러나 부분수열 $\{a_{2n+1}\}$은 -1에 수렴하고 $\{a_{2n}\}$은 1에 수렴한다. 또한 $\{a_n\}$의 부분수열은 1보다 더 큰 값에 수렴할 수 없으며 -1보다 더 작은 값에 수렴할 수 없다. 즉 1은 $\{a_n\}$의 집적점 중에서 가장 큰 값이며 -1은 $\{a_n\}$의 집적점 중에서 가장 작은 값이다. 이렇게 수열의 집적점 중에서 가장 큰 값을 상극한이라고 부르며, 가장 작은 값을 하극한이라고 부른다.

정의 3.7.1 | 수열의 상극한과 하극한

실수열 $\{a_n\}$의 집적점들의 모임을 C라고 하자.

(i) $\{a_n\}$이 위로 유계이고 C가 공집합이 아닐 때 $\sup C$를 $\{a_n\}$의 **상극한**(limit superior)이라고 부른다.

(ii) $\{a_n\}$이 아래로 유계이고 C가 공집합이 아닐 때 $\inf C$를 $\{a_n\}$의 **하극한**(limit inferior)이라고 부른다.

실수 Λ가 수열 $\{a_n\}$의 상극한인 것을

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \Lambda \quad \text{또는} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \Lambda$$

로 나타낸다. 또한 실수 λ가 수열 $\{a_n\}$의 하극한인 것을

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lambda \quad \text{또는} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lambda$$

로 나타낸다.

참고 3.7.2 $\{a_n\}$이 유계가 아니거나 C가 공집합인 경우의 상극한과 하극한은 다음과 같이 정의한다.

(i) $\{a_n\}$이 위로 유계가 아니면 $\{a_n\}$의 상극한을 $+\infty$로 정의한다.

(ii) $\{a_n\}$이 아래로 유계가 아니면 $\{a_n\}$의 하극한을 $-\infty$로 정의한다.

(iii) $\{a_n\}$이 위로 유계이고 C가 공집합이면 $\{a_n\}$의 상극한을 $-\infty$로 정의한다.

(iv) $\{a_n\}$이 아래로 유계이고 C가 공집합이면 $\{a_n\}$의 하극한을 $+\infty$로 정의한다. □

보기 3.7.3 다음은 상극한과 하극한의 예이다.

(i) $\{(-1)^n\}$의 상극한은 1이고 하극한은 -1이다.

(ii) $\{n+n(-1)^n\}$의 상극한은 $+\infty$이고 하극한은 0이다.

(iii) $\{n^2\}$의 상극한과 하극한은 모두 $+\infty$이다.

(iv) $\{-n^3\}$의 상극한과 하극한은 모두 $-\infty$이다.

(v) $0<a<1$일 때 $\{a^n\}$의 상극한과 하극한은 모두 0이다.

(vi) $\{(-n)^n\}$의 상극한은 $+\infty$이고 하극한은 $-\infty$이다. □

참고 3.7.4 수렴하는 수열은 상극한과 하극한이 동일하다. 왜냐하면 수렴하는 수열은 유계이고, 집적점을 하나만 갖기 때문이다. □

수열의 극한을 $\epsilon - N$ 명제로 정의한 것처럼 상극한도 $\epsilon - N$ 명제로 정의할 수 있다.

정리 3.7.5 $\epsilon - N$을 이용한 상극한의 정의

수열 $\{a_n\}$이 유계이고 Λ가 실수라고 하자. 이때 Λ가 $\{a_n\}$의 상극한일 필요충분조건은 두 조건

(i) $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n : \ [n > N \to \ a_n < \Lambda + \epsilon]$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n : \ [n > N \ \wedge \ a_n > \Lambda - \epsilon]$

을 모두 만족시키는 것이다.

증명* 위 정리에서 (i)은 $\{a_n\}$의 부분수열이 Λ보다 큰 값에 수렴할 수 없다는 뜻이며 (ii)는 Λ 이상의 값에 수렴하는 부분수열이 존재한다는 뜻이다. 이 사실을 염두에 두고 증명을 하자.

[⇒] Λ가 $\{a_n\}$의 상극한이라고 하자. 만약 (i)을 부정하면 적당한 양수 ϵ이 존재하여 아무리 큰 자연수 N이 주어지더라도 $n > N$이면서 $a_n \geq \Lambda + \epsilon$인 n이 존재한다. 즉 $a_n \geq \Lambda + \epsilon$인 n의 개수가 무한이므로 $\{a_n\}$의 부분수열 중에서 $\Lambda + \epsilon$ 이상의 값에 수렴하는 것이 존재하게 된다. 이것은 Λ가 상극한이라는 데에 모순이다.

만약 (ii)를 부정하면 양수 ϵ과 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $a_n \leq \Lambda - \epsilon$이 성립한다. 유한 개의 n을 제외하고 모두 $a_n \leq \Lambda - \epsilon$을 만족시키므로 $\{a_n\}$의 부분수열 중 수렴하는 것은 $\Lambda - \epsilon$ 이하의 값에 수렴하게 된다. 이것은 Λ가 상극한이라는 데에 모순이다.

[⇐] Λ와 $\{a_n\}$이 (i), (ii)를 모두 만족시킨다고 하자. 그리고 $\{a_n\}$의 상극한을 Λ'이라고 하자. 그러면 Λ'에 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재한다(문제 27 참조).

만약 $\Lambda < \Lambda'$이라면 $\epsilon \coloneqq (\Lambda' - \Lambda)/2$는 양수이므로 (i)에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $a_n < \Lambda + \epsilon = \Lambda' - \epsilon$이 성립한다. 즉 유한 개의 항을 제외하면 $a_n < \Lambda' - \epsilon$이므로 $\{a_{n_k}\}$는 $\Lambda' - \epsilon$ 이하의 값에 수렴한다. 이것은 모순이므로 $\Lambda' \leq \Lambda$이다.

다음으로 (i), (ii)에 의하여 $\Lambda - 1 < a_{m_1} < \Lambda + 1$인 m_1이 존재한다. 또한 임의의 자연수 m_k에 대하여 (i), (ii)에 의하여 m_{k+1}이 존재하여 $m_{k+1} > m_k$이면서

$$\Lambda - \frac{1}{k} < a_{m_{k+1}} < \Lambda + \frac{1}{k}$$

을 만족시킨다. 이때 조임 정리에 의하여 $\{a_{m_k}\}$는 Λ에 수렴한다. 그런데 Λ'는 $\{a_n\}$의 상극한이므로 $\Lambda \leq \Lambda'$이다. 따라서 $\Lambda = \Lambda'$이므로 Λ는 $\{a_n\}$의 상극한이다. ■

하극한도 상극한과 마찬가지로 $\epsilon - N$ 명제로 정의할 수 있다.

따름정리 3.7.6 수열 $\{a_n\}$이 유계이고 λ가 실수라고 하자. 이때 λ가 $\{a_n\}$의 하극한일 필요충분조건은

(i) $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n : \ [n > N \to \ a_n > \lambda - \epsilon]$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n : \ [n > N \ \wedge \ a_n < \lambda + \epsilon]$

을 모두 만족시키는 것이다.

증명 정리 3.7.5의 증명에서 부등호의 방향과 ϵ의 부호만 바꾸면 된다. ■

따름정리 3.7.7 유계인 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴할 필요충분조건은 $\{a_n\}$의 상극한과 하극한이 모두 L인 것이다.

증명 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $\{a_n\}$의 모든 부분수열은 L에 수렴하므로 $\{a_n\}$의 집적점은 L 뿐이다. 따라서 $\{a_n\}$의 상극한과 하극한은 모두 L이다.

역으로 $\{a_n\}$이 유계이고 상극한과 하극한이 모두 L이라고 하자. 임의의 ϵ에 대하여 정리 3.7.5-(i)과 따름정리 3.7.6-(i)에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $L-\epsilon < a_n < L+\epsilon$이 성립한다. 따라서 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다. ■

따름정리 3.7.8 유계인 수열 $\{a_n\}$이 수렴할 필요충분조건은 $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열들이 모두 동일한 값에 수렴하는 것이다.

증명 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 정리 3.1.16에 의하여 $\{a_n\}$의 모든 부분수열은 $\{a_n\}$과 동일한 값에 수렴한다.

역으로 유계인 수열 $\{a_n\}$의 수렴하는 모든 부분수열이 동일한 값 L에 수렴한다고 하자. 그러면 $\{a_n\}$은 하나의 집적점 L만을 가지므로 $\{a_n\}$의 상극한과 하극한은 모두 L이다. 따라서 따름정리 3.7.7에 의하여 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다. ■

수렴하는 수열의 극한에 대해서는

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n$$

이 성립한다. 그러나 상극한과 하극한에 대해서는 등호가 성립하지 않는 경우도 있다. 예를 들어 $a_n = (-1)^n$이고 $b_n = (-1)^{n+1}$일 때

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = 0 < 2 = 1+1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$$

이다. 이것을 일반화하면 다음을 얻는다.

정리 3.7.9 | 상 · 하극한의 부분가법성

유계인 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

증명 수열 $\{a_n\}$의 상극한을 A, $\{b_n\}$의 상극한을 B라고 하자. 그리고 (i)의 부등식이 성립하지 않는다고 가정하자. 그러면 양수 ϵ과 부분수열 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$가 존재하여 임의의 k에 대하여 $a_{n_k}+b_{n_k} > A+B+\epsilon$이 성립한다. 따라서

$$a_{n_k} > A+\frac{\epsilon}{2} \quad \text{또는} \quad b_{n_k} > B+\frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시키는 n_k의 개수가 무한이 된다. 이것은

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n \ge A+\frac{\epsilon}{2} \quad \text{또는} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}b_n \ge B+\frac{\epsilon}{2}$$

을 뜻하므로 모순이다. 따라서 (i)이 성립한다. (ii)도 비슷한 방법으로 증명된다. ■

정리 3.7.10 | 상한 · 하한과 극한을 이용한 상 · 하극한의 정의

유계인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k$

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} a_k$

증명 $x_n \coloneqq \sup\{a_k \mid k\ge n\}$이라고 하자. $\{a_k \mid k \ge n+1\} \subseteq \{a_k \mid k\ge n\}$이므로 $x_{n+1} \le x_n$이다. 따라서 $\{x_n\}$은 단조감소수열이다. 또한 $\{a_n\}$이 유계이므로 $\{x_n\}$도 유계이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{x_n\}$은 수렴한다. $\{x_n\}$의 극한을 Λ라고 하자.

극한의 정의에 의하여 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $|x_N - \Lambda| < \epsilon$을 만족시킨다. 즉 $x_N < \Lambda + \epsilon$이므로 $n > N$일 때마다 $x_n < \Lambda+\epsilon$이 성립한다. 이것은 $k \ge n$인 임의의 k에 대하여 $a_k \le x_n < \Lambda + \epsilon$이 성립함을 의미하므로 정리 3.7.5의 (i)이 성립한다.

한편 자연수 K가 임의로 주어졌다고 하자. $m > \max\{N, K\}$라고 하면 $|x_m - \Lambda| < \epsilon$이 성립하므로 $x_m > \Lambda - \epsilon$이다. 그런데 x_m은 $\{a_k \mid k \ge m\}$의 상한이므로 $a_k > \Lambda - \epsilon$인 a_k가 존재한다. 즉 정리 3.7.5의 (ii)가 성립한다. 따라서 Λ는 $\{a_n\}$의 상극한이다.

또한 $\{x_n\}$은 감소수열이므로 $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$이 성립한다.

따라서 (i)이 증명되었다. (ii)도 비슷한 방법으로 증명된다. 마음속으로만 '그렇게 되겠지'라고 생각하지 말고 꼭 직접 (ii)를 증명해보기 바란다. ■

예제 3.7.11 유계인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$임을 증명하여라.

풀이 정리 3.7.10에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) &= \lim_{n\to\infty}(\sup\{-a_k \mid k\ge n\}) = \lim_{n\to\infty}(-\inf\{a_k \mid k \ge n\}) \\ &= -\lim_{n\to\infty}(\inf\{a_k \mid k\ge n\}) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n.\end{aligned}$$ □

예제 3.7.12 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 유계이고 임의의 첨수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이 성립한다고 하자. 이때 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$이 성립함을 증명하여라.

증명 임의의 자연수 n에 대하여 $\sup\{a_k \mid k\ge n\} \le \sup\{b_k \mid k \ge n\}$이므로 다음을 얻는다.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_k \mid k\ge n\}) \le \lim_{n\to\infty}(\sup\{b_k \mid k\ge n\}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$ □

만약 집적점, 상극한, 하극한의 개념이 없었다면 모든 수열은 수렴하는 수열과 발산하는 수열로만 구분되었을 것이며, 발산하는 수열의 극한은 구할 필요가 없었을 것이다. 그러나 이들 개념이 있는 덕분에 발산하는 수열도 그냥 버리지 않고 수렴하는 부분수열을 찾아 그 성질을 탐구할 수 있게 되었다. 우리 삶에서도 모든 것을 이분법적으로만 구분하여 하나만 취하기보다는 다양한 경우를 생각하여 되도록 많은 것을 품고 그것에 관심을 가져야 할 것이다.

3.8 닫힌집합에서의 극한

닫힌집합은 모든 경계점을 가지고 있다는 기하학적 성질뿐만 아니라 극한과 관련된 중요한 성질들을 가지고 있다. 이 절에서는 닫힌집합과 관련된 극한의 성질을 살펴본다.

정의 3.8.1 폐포

집합 E에 대하여, E를 포함하는 닫힌집합 중에서 가장 작은 것을 E의 **폐포**(closure) 또는 **닫개**라고 부른다. E의 폐포를 $\overline{E}$로 나타낸다.

참고 3.8.2 E의 폐포는 $\overline{E} = \bigcap\{F \mid F \supseteq E,\ F\text{는 닫힌집합}\}$으로 정의할 수도 있다. □

참고 3.8.3 다음은 폐포의 정의에 의하여 자명하게 성립하는 성질들이다.

(i) $E \subseteq \overline{E}$

(ii) F가 닫힌집합이고 $E \subseteq F$이면 $\overline{E} \subseteq F$이다.

(iii) E가 닫힌집합일 필요충분조건은 $\overline{E} = E$인 것이다. □

집합 E가 닫힌집합이 아닌 경우 E를 포함하는 닫힌집합을 모두 생각하는 것은 어려우므로 E의 폐포를 구하는 다른 방법이 필요하다.

보조정리 3.8.4 집합 E와 점 p에 대하여, $p \in \overline{E}$일 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(p) \cap E \neq \varnothing$인 것이다. 즉 p가 E의 폐포에 속할 필요충분조건은 p를 중심으로 하는 임의의 열린구가 E와 만나는 것이다.

증명 $p \in \overline{E}$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 만약 $B_\epsilon(p) \cap E$가 공집합이라면 $B_\epsilon(p)^c$는 E를 덮는 닫힌집합이므로 $\overline{E} \subseteq B_\epsilon(p)^c$가 성립한다. 그런데 $p \in \overline{E}$이므로 이것은 모순이다. 따라서 $B_\epsilon(p) \cap E \neq \varnothing$이다.

역으로 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(p) \cap E \neq \varnothing$이 성립한다고 하자. 만약 $p \notin \overline{E}$라면 $p \in (\overline{E})^c$이다. 그런데 $\overline{E}$는 닫힌집합이므로 $(\overline{E})^c$는 열린집합이다. 따라서 $B_r(p) \subseteq (\overline{E})^c$인 양수 r가 존재한다. 그러면 $B_r(p) \cap E \subseteq B_r(p) \cap \overline{E} = \varnothing$이 되어 모순이다. 따라서 $p \in \overline{E}$이다. ■

정리 3.8.5 도집합을 이용한 폐포의 정의

집합 E에 대하여 $\overline{E} = E \cup E'$이다.

증명 먼저 $\overline{E} \subseteq E \cup E'$을 증명하자. $x \in \overline{E}$라고 하자. $x \in E$인 경우에는 당연히 $x \in E \cup E'$이다. $x \notin E$인 경우 $x \in \overline{E} \setminus E$이다. 보조정리 3.8.4에 의하여 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in E'$이므로 $x \in E \cup E'$이다. 다음으로 $E \cup E' \subseteq \overline{E}$를 증명하자. $x \in E \cup E'$라고 하자. $x \in E$인 경우는 당연히 $x \in \overline{E}$이다. $x \notin E$인 경우 $x \in E' \setminus E$이다. 그러면 x는 E의 집적점이므로 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이다. 따라서 보조정리 3.8.4에 의하여 $x \in \overline{E}$이다. ■

따름정리 3.8.6 집합 E가 닫힌집합일 필요충분조건은 $E' \subseteq E$인 것이다. ■

정리 3.8.7 내부와 경계를 이용한 폐포의 정의

집합 E에 대하여 $\overline{E} = E^o \cup \partial E$이다.

증명 $x \in \overline{E}$라고 하자. 그러면 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이다. 만약 $x \notin E^o$라면 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \not\subseteq E$이므로 $B_\epsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in \partial E$이다. 즉 $\overline{E} \subseteq E^o \cup \partial E$이다. 반대로 $x \in E^o \cup \partial E$라고 하자. 만약 $x \in E^o$라면 명백히 $x \in \overline{E}$이다. 만약 $x \notin E^o$라면 $x \in \partial E$이므로 임의의 양수 ϵ에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이다. 즉 $x \in \overline{E}$이다. 따라서 $E^o \cup \partial E \subseteq \overline{E}$이다. ■

정리 3.8.5에 의하면 E의 폐포는 E에 그것의 집적점들을 모두 추가시킨 집합이다. 또한 정리 3.8.7에 의하면 E의 폐포는 E의 내점과 경계점으로 이루어진 집합이다.

정리 3.8.8 닫힌집합에서의 극한

집합 F가 닫힌집합이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 F에 속하며 λ가 $\{a_n\}$의 집적점이면 $\lambda \in F$이다.

증명 결론에 반하여 $\lambda \notin F$라고 하자. 그러면 $\lambda \in F^c$이다. 그런데 F^c는 열린집합이므로 $B_\epsilon(\lambda) \subseteq F^c$인 양수 ϵ이 존재한다. 즉 $B_\epsilon(\lambda) \cap F = \varnothing$이다. 여기서 $\{a_n\}$의 모든 항이 F의 원소이므로 임의의 n에 대하여 $a_n \notin B_\epsilon(\lambda)$을 얻는다. 즉 $B_\epsilon(\lambda)$에 속하는 $\{a_n\}$의 항이 존재하지 않으므로 $\{a_n\}$의 어떠한 부분수열도 λ에 수렴하지 않는다. 이것은 모순이므로 $\lambda \in F$이다. ■

따름정리 3.8.9 집합 F가 닫힌집합이고 $\{a_n\}$의 모든 항이 F에 속하며 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $L \in F$이다.

닫힌집합은 '닫혀있는 집합'이다. 여기서 닫혀있다는 것은 기하학적으로는 경계를 모두 포함하여 내부를 닫았다는 뜻으로 생각할 수 있지만, 해석학에서 닫힌집합은 극한에 대하여 닫혀있다는 뜻으로 생각할 수 있다.

따름정리 3.8.10 실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니라고 하자. 이때 E가 완비일 필요충분조건은 닫힌집합인 것이다.

증명 집합 E가 닫힌집합이고 $\{a_n\}$이 코시 수열이며 $\{a_n\}$의 모든 항이 E에 속한다고 하자. 그러면 $\{a_n\}$은 적당한 실수 λ에 수렴한다. 따라서 따름정리 3.8.9에 의하여 $\lambda \in E$이다.

역으로 E가 완비라고 하자. 그리고 결론에 반하여 E가 닫힌집합이 아니라고 하자. 그러면 $\lambda \in E' \setminus E$가 존재한다. λ는 E의 집적점이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n \in E \cap B_{1/n}(\lambda)$를 택할 수 있다. 이때 $\{a_n\}$은 λ에 수렴하는 코시 수열이고 모든 항이 E에 속하는 수열이다. 따라서 완비의 정의에 의하여 λ는 E의 원소이다. 이것은 모순이므로 E는 닫힌집합이다. ■

보기 3.8.11 다음은 닫힌집합과 극한의 관계에 대한 예이다.

(i) 반열린구간 $(0,\ 1]$은 닫힌집합이 아니다. 왜냐하면 $\{2^{-n}\}$은 모든 항이 $(0,\ 1]$에 속하고 수렴하지만 극한이 $(0,\ 1]$에 속하지 않기 때문이다.

(ii) $\mathbb{R}$에서 수렴하는 수열의 극한은 항상 $\mathbb{R}$의 원소이므로 $\mathbb{R}$는 닫힌집합이다. □

3.9 콤팩트집합

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가 D의 각 점의 근방에서 어떠한 성질을 가지고 있다고 해서 f가 D 전체에서 그러한 성질을 가지고 있다고 단정할 수 없다. 예를 들어 $D = (0,\ 1]$일 때 함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

로 주어졌다고 하자. 그러면 임의의 $a \in D$에 대하여 f가 $B_\epsilon(a)$에서 유계가 되도록 하는 양수 ϵ이 존재한다. 즉 임의의 $a \in D$에 대하여 f는 a의 근방에서 유계이다. 그러나 f는 D에서 유계가 아니다. 즉 f는 각 점에서 국소적으로 유계이지만 D 전체에서는 유계가 아니다.

그러나 D의 특성에 따라서는 $f : D \to \mathbb{R}$ 의 국소적 성질을 대역적 성질로 확장하는 것이 가능한 경우도 있다. 이 절에서 살펴볼 콤팩트집합은 그러한 대표적인 집합이다.

정의 3.9.1 덮개, 부분덮개

집합 K와 집합족 $C = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$에 대하여 $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$가 성립할 때 C를 K의 **덮개**라고 부른다. 만약 C의 모든 원소가 열린집합이면 C를 K의 **열린덮개**라고 부른다. 만약 C의 모든 원소가 닫힌집합이면 C를 K의 **닫힌덮개**라고 부른다.

집합족 C_1이 C의 부분집합이면서 K의 덮개이면 C_1을 K를 덮는 C의 **부분덮개**라고 부른다. C_1이 C의 부분덮개이면서 유한집합이면 C_1을 C의 **유한부분덮개**라고 부른다.

보기 3.9.2 다음은 열린덮개와 부분덮개의 예이다.

(i) 집합족 $C = \{(n-1,\ n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$는 $\mathbb{R}$ 의 열린덮개이다. 임의의 정수는 C의 한 개의 원소에 의해서만 덮이기 때문에 C의 원소 중 하나라도 빠지면 덮이지 않는 정수점이 존재하게 된다. 따라서 C는 진부분덮개를 갖지 않는다.

(ii) $I_n = (1/n,\ 2)$일 때 집합족 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $(0,\ 2)$의 열린덮개이다. C는 $(0,\ 2)$를 덮는 부분덮개 $C_1 = \{I_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$을 가진다.

(iii) 집합족 $C = \{B_1(x) \mid x \in \mathbb{Q}\}$는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 열린덮개이다. C는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$를 덮는 유한부분덮개 $C_1 = \{B_1(1),\ B_1(2),\ B_1(3),\ B_1(4)\}$를 가진다.

위 보기의 (iii)에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$는 유한집합이므로 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$를 덮는 **임의의** 열린덮개는 유한부분덮개를 가진다. 반면 (i)에서 C는 $\mathbb{R}$ 를 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다. 이처럼 집합의 특성에 따라 그 집합을 덮는 임의의 열린덮개가 유한부분덮개를 갖는 경우도 있고 그렇지 않은 경우도 있다.

정의 3.9.3 콤팩트집합 (compact set)

집합 K를 덮는 임의의 열린덮개 C가 K를 덮는 유한부분덮개 C_1을 가지면 K를 **콤팩트집합**이라고 부른다.

콤팩트집합은 **긴밀집합** 또는 **옹골집합**이라고도 불린다. 참고로 덮개는 영어 단어 cover의 첫 글자를 따서 주로 C로 나타내며, 콤팩트집합은 독일어 단어 kompakte의 첫 글자를 따서 주로 K로 나타낸다.

주어진 집합이 콤팩트가 아님을 보일 때에는 그 집합을 덮으면서 유한부분덮개를 갖지 않는 열린덮개가 적어도 하나 이상 존재함을 보이면 된다. 그러나 집합 K가 콤팩트임을 보이려면 K를 덮는 **임의의** 열린덮개가 유한인 부분덮개를 가짐을 보여야 한다.

예제 3.9.4 구간 $I=(0,\ 2]$가 콤팩트집합이 아님을 보여라.

풀이 자연수 n에 대하여

$$I_n := \left(\frac{1}{n},\ 3\right) = (0,\ 3) \setminus \left[0,\ \frac{1}{n}\right]$$

이라고 하면 $C=\{I_n \mid n\in\mathbb{N}\}$은 I를 덮는 열린덮개이다. $C_1=\{I_n \mid n\in J\}$가 C의 유한부분집합이고 공집합이 아니라고 하자. 그러면 J는 $\mathbb{N}$의 유한부분집합이므로 $m=\max J$가 존재한다. 이때 임의의 $j\in J$에 대하여 $j\le m$이므로 $I_j \subseteq I_m$이다. 그런데 $1/(m+1)\in I$이지만 $1/(m+1)\notin I_m$이므로

$$\frac{1}{m+1} \notin \bigcup_{n\in J} I_n$$

이다. 즉 I는 C_1에 의하여 덮이지 않는다. 따라서 C는 I를 덮는 유한부분덮개를 갖지 않는다. □

예제 3.9.5 실수 집합의 부분집합 K가 유한이면 K가 콤팩트집합임을 보여라.

풀이 K가 공집합이면 당연히 K를 덮는 임의의 열린덮개는 K를 덮는 유한부분덮개를 가진다. 이제 K가 공집합이 아니고 $K=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$이라고 하자. 그리고 C가 K를 덮는 열린덮개라고 하자. 그러면 임의의 $x_i\in K$에 대하여 $V_i\in C$가 존재하여 $x_i\in V_i$를 만족시킨다. 이때 $\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n\}$은 C의 유한부분덮개이고 K를 덮는다. 따라서 K는 콤팩트집합이다. □

그러나 이와 같은 방법으로 주어진 집합의 콤팩트성을 판별하고 증명하는 것은 매우 불편하다. 다음 정리는 실수 집합의 부분집합의 콤팩트성을 쉽게 판별하는 방법을 제공한다.

정리 3.9.6 하이네-보렐 (Heine-Borel)

실수 집합의 부분집합 K가 콤팩트집합일 필요충분조건은 유계이고 닫힌집합인 것이다.

콤팩트집합 K가 유계임을 보이는 것은 쉽다. 왜냐하면 유한 개의 열린집합에 의하여 덮이기 때문이다. 반면 콤팩트집합 K가 닫힌집합임을 직접 보이는 것은 쉽지 않다. 따라서 K가 닫힌집합이 아니라고 가정한다. 그리고 점 $\lambda\in K'\setminus K$를 잡는다. [여기서 λ는 예제 3.9.4에서 구간 $(0,\ 2]$의 왼쪽 끝점 0과 같은 역할을 한다.] 집합 K가 유계이므로 K를 덮는 충분히 큰 구간 $(-M,\ M)$이 존재한다. 이 구간에서 λ 근방에 있는 점을 제외한 집합 $V_n=(-M,\ M)\setminus[\lambda-1/n,\ \lambda+1/n]$들의 모임으로 K의 열린덮개를 구성한다. 그러면 λ가 집적점이므로 유한 개의 V_n으로는 K를 덮을 수 없게 된다. 이것은 K가 콤팩트집합이라는 데에 모순이다.

역을 증명하는 것은 볼차노-바이어슈트라스 정리를 증명하는 것과 비슷하다. K가 유계이고 닫혀있지만 콤팩트가 아니라고 가정하자. 그러면 K를 덮지만 유한부분덮개는 갖지 않는 K의 열린덮개 C가 존재한다. 이제 K를 포함하는 구간 $[-M,\ M]$을 생각한다. 그러면 이 구간에 속하는 K의 점들은 C의 유한부분덮개로 덮이지 않는다. $[-M,\ M]$을 반으로 자르면 두 구간 중 하나는 K와 교집합했을 때 C의 유한부분덮개로 덮이지 않는다. 그러한 구간을 택하고 그것을 또 반으로 자른다. 이와 같은 과정을 계속하면 구간의 길이가 0에 수렴하므로 언젠가는 이 구간은 C의 하나의 원소에 의해 덮이게 된다. 이것은 모순이므로 K는 콤팩트이다.

정리 3.9.6의 증명* [$\Rightarrow$] K가 콤팩트집합이라고 하자. $I_n = (-n,\ n)$이라고 하면 $C = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $\mathbb{R}$의 열린덮개이고 $K \subseteq \mathbb{R}$이므로 C는 K를 덮는다. K가 콤팩트집합이므로 C는 K를 덮는 유한부분덮개 $C_1 = \{I_n \mid n \in J\}$를 가진다. 이때 $\bigcup_{j \in J} I_j$는 유계이므로 K도 유계이다.

다음으로 K가 닫힌집합임을 보이자. 결론에 반하여 K가 닫힌집합이 아니라고 가정하자. 그러면 실수 $\lambda \in K' \setminus K$가 존재한다. 한편 K는 유계이므로 $K \subseteq (-M,\ M)$인 양수 M이 존재한다. 자연수 n에 대하여 $V_n = (-M,\ M) \setminus [\lambda - 1/n,\ \lambda + 1/n]$이라고 하면 $C = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 K의 열린덮개가 된다. 그런데 K가 콤팩트집합이므로 C는 K를 덮는 유한부분덮개 $C_1 = \{V_n \mid n \in J\}$를 가진다. 여기서 $m \coloneqq \max J$라고 하자. V_n의 정의에 의하여 $\bigcup_{n \in J} V_n = V_m$이다. 그런데 λ는 K의 집적점이므로

$$\left[\lambda - \frac{1}{m},\ \lambda + \frac{1}{m}\right] \cap K \neq \varnothing$$

이다. 즉 $(V_m)^c \cap K \neq \varnothing$이므로 $K \not\subseteq V_m = \bigcup_{n \in J} V_n$이다. 이것은 C_1이 K를 덮는다는 사실에 모순이다. 따라서 K는 닫힌집합이다.

[$\Leftarrow$] K가 유계이고 닫힌집합이라고 하자. 그리고 결론에 반하여 K가 콤팩트집합이 아니라고 하자. 그러면 유한부분덮개를 갖지 않는 K의 열린덮개 C가 존재한다.

K는 유계이므로 $K \subseteq [-M,\ M]$인 양수 M이 존재한다. $[-M,\ M]$을 두 개의 닫힌구간으로 등분한 것을 $I_0^* = [-M,\ 0]$, $I_0^{**} = [0,\ M]$이라고 하자. 이때 $I_0^* \cap K$와 $I_0^{**} \cap K$ 중 적어도 하나는 C의 유한부분덮개에 의해 덮이지 않는다. 그러한 닫힌구간을 택하여 I_1이라고 하자.

닫힌구간 I_n에 대하여 $I_n \subseteq [-M,\ M]$이고 $I_n \cap K$가 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는다고 가정하자. 그러면 I_n을 두 개의 닫힌구간으로 등분한 것 중 K와 교집합했을 때 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는 것이 존재하는데, 그것을 I_{n+1}이라고 하자. 이제 임의의 자연수 n에 대하여 닫힌구간 I_n이 귀납적으로 정의되었다.

$I_n = [a_n,\ b_n]$이라고 하면 $\{a_n\}$은 단조증가수열이고 $\{b_n\}$은 단조감소수열이며 $a_n \le b_n$이므로 두 수열 모두 수렴한다. 그런데 구간 I_n의 길이가 0에 수렴하므로 두 수열은 동일한 값에 수렴한다. 그 극한을 λ라고 하자. 임의의 n에 대하여 $x_n \in I_n \cap K$를 택하여 만든 수열 $\{x_n\}$은 $a_n \le x_n \le b_n$을 만족시키므로 조임 정리에 의하여 $x_n \to \lambda$이다. 그런데 K가 닫힌집합이므로 $\lambda \in K$이다. C는 K의 덮개이므로 C의 원소 중 $\lambda \in V$인 열린집합 V가 존재한다. λ는 V의 내점이므로 $(\lambda - \epsilon,\ \lambda + \epsilon) \subseteq V$인 양수 ϵ이 존재한다. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 λ에 수렴하므로 자연수 m이 존재하여 $a_m \in (\lambda - \epsilon,\ \lambda + \epsilon)$이고 $b_m \in (\lambda - \epsilon,\ \lambda + \epsilon)$을 만족시킨다. $I_m = [a_m,\ b_m] \subseteq (\lambda - \epsilon,\ \lambda + \epsilon) \subseteq V$이므로 $I_m \cap K \subseteq V$이다. 이것은 $I_m \cap K$가 C의 유한부분덮개에 의하여 덮이지 않는다는 것에 모순이다. 따라서 K는 콤팩트집합이다. ■

보기 3.9.7 다음은 콤팩트집합과 콤팩트가 아닌 집합의 예이다.

(i) $\mathbb{Q}$는 유계가 아니고 닫힌집합도 아니므로 콤팩트집합이 아니다.
(ii) $\mathbb{Z}$는 닫힌집합이지만 유계가 아니므로 콤팩트집합이 아니다.
(iii) 반열린구간 $[0,\ 3)$은 유계이지만 닫힌집합이 아니므로 콤팩트집합이 아니다.
(iv) 공집합은 유계이고 닫힌집합이므로 콤팩트집합이다.
(v) 두 콤팩트집합의 합집합과 교집합은 모두 콤팩트집합이다. □

개념 이해하기

1. 수열의 극한에 관한 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) $\{a_n\}$이 수렴하면 $\{a_n/n\}$도 수렴한다.

(2) $\{a_n\}$이 발산하면 $\{a_n/n\}$도 발산한다.

(3) $\{a_n\}$이 수렴하고 $\{b_n\}$이 유계이면 $\{a_n b_n\}$은 수렴한다.

(4) $\{a_n\}$이 0에 수렴하고 $\{b_n\}$이 양항수열이면 $\{a_n b_n\}$은 0에 수렴한다.

(5) $a_n \to \infty$이고 $b_n \to -\infty$이면 $a_n + b_n \to 0$이다.

(6) $a_n \to -\infty$이면 $1/a_n \to 0$이다.

(7) $a_n \to 0$이고 $a_n \neq 0$이면 $1/a_n \to \infty$이다.

2. 코시 수열에 관한 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) $\{a_n\}$이 코시 수열이고 $\{b_n\}$이 유계이면 $\{a_n b_n\}$은 코시 수열이다.

(2) $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 코시 수열이고 $b_n \neq 0$이면 $\{a_n/b_n\}$도 코시 수열이다.

(3) $\{a_n b_n\}$이 코시 수열이면 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 중 하나 이상은 코시 수열이다.

3. 일반항이 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 정해보아라.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$

(2) $a_n = \ln n$

(3) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$

(4) $a_n = \dfrac{n-1}{n-1}$

4. 정의를 잘 기억하는 방법 중 하나는 정의를 은유적이고 유의미한 문장으로 표현하는 것이다. 예를 들어 극한 $a_n \to L$의 정의는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

> 아무리 작은 양수 ϵ이 주어지더라도 그에 대응할만한 충분히 큰 자연수 N이 존재하여 수열 $\{a_n\}$의 N번째 항 이후로는 a_n과 L의 거리가 ϵ보다 가까워진다.

다음 정의를 유의미한 문장으로 표현해보자.

(1) 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산한다.

(2) 수열 $\{a_n\}$이 유계이다.

(3) 수열 $\{a_n\}$의 상극한이 양의 무한대로 발산한다.

5. 증명을 잘 이해하고 기억하는 방법 중 하나는 증명을 단계별로 나누어 요약하는 것이다. 예를 들어 정리 3.6.2에서 코시 수열이 수렴함을 증명하는 과정은 다음과 같이 세 단계로 나누어 요약할 수 있다.

> 1단계. $\{a_n\}$이 유계임을 보인다.
>
> 2단계. $\{a_n\}$이 집적점을 가짐을 보인다.
>
> 3단계. $\{a_n\}$이 집적점에 수렴함을 보인다.

다음 물음에 답하여라.

(1) 정리 3.3.3의 증명 과정을 단계별로 나누어 요약하여라.

(2) 정리 3.5.4의 증명 과정을 단계별로 나누어 요약하여라.

6. 다음은 극한의 유일성을 다른 방법으로 증명한 것이다. 오류를 찾아라.

> 수열 $\{a_n\}$의 극한을 L, M이라고 하자. 극한의 성질에 의하여
> $$L-M=\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n-a_n)=\lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
> 이므로 $L-M=0$ 즉 $L=M$이다.

7. $\mathbb{R}$ 에서 집적점을 갖지 않는 수열의 예를 들어라.

8. 다음 집합이 콤팩트집합인지 아닌지 판별하여라.
(1) 콤팩트집합의 부분집합
(2) 유한 개의 콤팩트집합의 합집합
(3) 유한 개의 콤팩트집합의 교집합
(4) 무한 개의 콤팩트집합의 합집합
(5) 무한 개의 콤팩트집합의 교집합
(6) $\mathbb{R}$에서 콤팩트집합의 여집합

9. 수열 $\{a_n\}$의 부분수열의 부분수열은 $\{a_n\}$의 부분수열임을 보여라.

10. 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$을 이용하여 다음 극한을 계산하여라.
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1}$
(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n^3+n}$

11. 일반항이 다음과 같이 주어진 수열이 유계인지 판별하여라. (단, [ ]는 최대정수함수이다.)
(1) n
(2) $\frac{1}{n}$
(3) $\frac{n+1}{n-1}$
(4) $\sin n$
(5) $[n\sqrt{2}]-n\sqrt{2}$
(6) $n^{1/n}$

12. 수열의 극한의 정의와 $\epsilon-N$ 논법을 이용하여 다음을 증명하여라.
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$
(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$

13. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어졌을 때 $\{a_n\}$의 극한을 구하여라.
(1) $\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2+1}}$
(2) $\sqrt{n^2+n}-n$
(3) $\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$
(4) $\frac{10^n-10^{2n}}{10^{n-1}+10^{2n-1}}$

14. 자연상수 e의 정의를 이용하여 다음 극한을 계산하여라.
(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$
(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$
(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2n}$
(4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$
(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}$
(6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$

15. 자연수 n을 10으로 나누었을 때의 나머지를 r_n이라고 하자. 즉 n의 십진법 표기에서 일의 자리 숫자를 r_n이라고 하자. 일반항이 다음과 같이 주어진 수열의 집적점을 모두 구하여라.
(1) $r_n-\frac{1}{n}$
(2) $\frac{r_{2n+1}}{3}+\frac{1}{2^n}$
(3) $(-1)^n r_n$
(4) $r_n+r_{9n}+(-1)^n$

개념 응용하기

16. 다음 집합을 완비인 것과 완비가 아닌 것으로 구분하여라.
   (1) 모든 실수의 집합　(2) 모든 유리수의 집합
   (3) 모든 무리수의 집합　(4) 모든 정수의 집합
   (5) 모든 자연수의 집합　(6) 공집합이 아닌 유한집합

17. 흔히 완비성을 '빈틈없이 빽빽하다'는 것으로 비유한다. 유리수 집합과 정수 집합이 각각 완비인지 생각해보고 이러한 표현의 문제점을 서술하여라.

18. 정확히 가부번 개의 집적점을 갖는 수열의 예를 들어라.

19. 수열의 극한의 정의와 $\epsilon - N$ 논법을 이용하여 다음을 증명하여라.
   (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+1} = 3$　(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1$　(3) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n \neq 0$이고 $\{|a_{n+1}/a_n|\}$이 1보다 작은 값에 수렴하면 $\{a_n\}$은 0에 수렴함을 증명하여라.

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어졌을 때 $\{a_n\}$이 수렴하는지 판별하여라.
   (1) $\frac{n}{2^n}$　(2) $\frac{n!}{n^n}$　(3) $\frac{n!}{e^n}$
   (4) $\cos n$　(5) $\tan n$　(6) $n+n(-1)^n$

22. 양수 x_1, x_2, x_3에 대하여 다음 극한을 구하여라.
   (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\right)^{1/n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^n+x_2^n+x_3^n}{3}\right)^{1/n}$
   (3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{-n}+x_2^{-n}}{2}\right)^{-1/n}$　(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{-n}+x_2^{-n}+x_3^{-n}}{3}\right)^{-1/n}$
   위 결과를 x_i의 개수가 k개일 때로 일반화하여라.

23. 양수 a에 대하여 수열 $\{a^n/n!\}$이 수렴함을 증명하고 극한을 구하여라.

24. 수열 $\{n^n/(n!e^n)\}$이 수렴함을 증명하여라.

25. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3^{-n}$을 만족시킬 때 $\{a_n\}$이 코시 수열임을 보여라.

26. 두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$에 대하여 $0 < x_1 < y_1$이고

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

   이 성립한다고 하자. 이때 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 동일한 값에 수렴함을 보여라.

27. 유계인 수열 $\{a_n\}$의 집적점들의 모임 C가 닫힌집합임을 보여라.

28. 다음 집합이 콤팩트집합인지 판별하고 콤팩트집합의 정의를 이용하여 그것을 증명하여라.
   (1) $[0, 1]$　(2) $(0, 1)$　(3) $[0, 1]\cap\mathbb{Q}$
   (4) $(0, 1)\cap\mathbb{Q}$　(5) $\mathbb{N}$　(6) $[0, 1]\cup[2, 3]$

29. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 무한집합이라고 하자. 이때 $\{a_n\}$의 부분수열들의 모임이 비가산집합임을 증명하여라.

30. 수열 $\{a_n\}$의 두 부분수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$이 모두 L에 수렴하면 $\{a_n\}$도 L에 수렴함을 보여라.

31. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$을 만족시킬 때 $\{a_n\}$이 수렴함을 보여라.

32. 실수 집합의 부분집합 E가 공집합이 아니고 위로 유계이지만 최댓값을 갖지 않는다고 하자. 이때 모든 항이 E에 속하면서 $\sup E$에 수렴하는 순증가수열이 존재함을 증명하여라.

33. 실수 r에 대하여 r에 수렴하고 순증가하는 무리수열이 존재함을 보여라. 또한 r에 수렴하고 순증가하는 유리수열이 존재함을 보여라.

34. 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 유계이고 임의의 n에 대하여 $a_n \le b_n$을 만족시킨다고 하자. 이때

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varliminf_{n\to\infty} b_n$$

임을 증명하여라.

35. 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 유계이고 모든 항이 양수일 때

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \le \left(\varlimsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\varlimsup_{n\to\infty} b_n\right)$$

임을 증명하여라.

36. 유계인 수열 $\{a_n\}$의 하극한을 λ라고 하자. 이때 $\{-a_n\}$의 상극한이 $-\lambda$임을 증명하여라.

실력 다지기

37. 상한의 성질과 수열을 이용하여 열린구간 $I = (0,\ 1)$이 비가산집합임을 증명하려고 한다. 먼저 I는 명백히 유한집합이 아니다. 이제 결론에 반하여 I가 가산집합이라고 가정하자. 그러면 $\mathbb{N}$을 I에 대응시키는 일대일대응 f가 존재한다.

    (1) 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n+1) \notin (a_{n+1},\ b_{n+1})$이고 $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < 1$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 존재함을 보여라.

    (2) 단조수렴정리를 이용하여 $\{a_n\}$이 수렴함을 보여라.

    (3) $\{a_n\}$의 극한 r에 대하여 $r \in (0,\ 1)$임을 보여라.

    (4) 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n) \neq r$임을 보여라.

    이것은 모순이므로 I는 비가산집합이다.

38. 임의의 수열은 단조인 부분수열을 가짐을 증명하여라.

39. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = L$임을 증명하여라.

40. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 L에 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} = L$임을 증명하여라.

41. 구간 $[0,\ 1]$의 모든 점을 집적점으로 가지는 수열의 예를 들어라.

42. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$이고, 1보다 작은 양수 r가 존재하여 임의의 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + r^n a_{n-1}$을 만족시킨다고 하자. 이때 $\{a_n\}$이 수렴함을 증명하여라.

43. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\{b_n\}$이 유계일 때 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$$

44. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\{b_n\}$이 유계이며 두 수열의 모든 항이 양수일 때 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n\right)$$

45. 실수 집합의 부분집합 G가 열린집합이면 G는 서로소인 가산 개의 열린구간들의 합집합으로 나타남을 증명하여라.

46. 실수 집합의 부분집합 K에 대하여 다음 세 명제가 서로 동치임을 증명하여라.

(1) K는 콤팩트집합이다.

(2) K의 무한부분집합은 K의 원소인 집적점을 가진다.

(3) 모든 항이 K에 속하는 임의의 수열은 K의 한 점에 수렴하는 부분수열을 가진다.

47. 가부번 개의 집적점을 갖는 콤팩트집합을 구성하여라.

도약하기

48. 다음은 어느 고등학생의 질문이다.

유리수의 개수가 자연수의 개수와 같다는 것은 납득할 수가 없어요. 자연수 집합으로부터 유리수 집합으로의 일대일대응 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ 가 존재한다고 했는데, 그러면 $a_n = f(n)$이라고 하면 $\{a_n\}$은 수열이잖아요. 그런데 수열은 규칙을 가지고 수를 나열한 거잖아요. 아무리 봐도 그런 수열은 만들 수 없을 것 같은데요.

이 학생에게 해줄 수 있는 적절한 답을 작성해 보아라.

49. 고등학교 2학년 학생이 당신에게 다음과 같은 내용의 편지를 보냈다.

수학자들이 연구하는 극한은 허무하고 의미 없는 개념이라고 생각합니다. 사람은 실제로 어떠한 행위를 무한 번 할 수 없으며 무한에 다가갈 수 없습니다. 인간은 한정된 능력으로 다가갈 수 없는 무한에 대한 동경심을 가지고 있으며 극한은 인간의 한계를 벗어나려고 하는 욕심일 뿐입니다. 실제로 임의의 자연수 n에 대하여 $1/n$은 양수로서 절대로 0과 같아질 수 없지만 수열 $\{1/n\}$의 극한이 0이라는 것, 그리고 그것에 등호를 사용하여 나타내는 것은 모순입니다. 또한 수열 $\{n\}$의 극한을 무한대라고 칭하며 ∞로 나타내고 마치 그것에 도달한 것처럼 등호를 사용하여 나타내는 것도 모순입니다.

이 학생에게 답장으로 보낼 만한 편지글을 작성해 보아라.

50. 수학을 사랑하는 고등학교 3학년 학생들에게 학년 말 특강으로 실수계의 완비성에 대한 수업을 하려고 한다. 2차시(100분)동안 수업할 수 있는 교수·학습 과정안을 작성해 보아라.

04 실함수의 극한

수열은 정의역이 정수 집합의 부분집합인 함수이다. 즉 수열은 함수의 특별한 경우이고 반대로 함수는 수열의 일반적인 경우이다. 따라서 함수의 극한은 수열의 극한을 일반화한 것으로 볼 수 있다. 함수의 극한에는 점에서의 극한과 무한대에서의 극한이 있으므로 함수의 극한은 수열의 극한보다 더욱 다양한 성질을 가지고 있다.

이 절에서는 함수의 극한과 연속함수의 개념을 살펴보고 이를 이용하여 함수의 다양한 성질을 밝힌다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 함수의 여러 가지 극한의 정의를 말하고 $\epsilon-\delta$ 논법으로 함수의 극한을 증명할 수 있다.
- 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한을 증명할 수 있다.
- 연속함수의 개념을 설명하고 연속함수의 성질을 증명할 수 있다.
- 상극한과 하극한의 개념을 설명하고, 함수의 상극한과 하극한을 구할 수 있다.

4.1 점에서의 극한

고등학교 과정에서는 함수의 극한을 다음과 같이 직관적으로 정의한다.

> 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 f는 L에 수렴한다고 말한다.

여기서 $f(x)$의 값이 L에 한없이 가까워진다는 것은 $f(x)$와 L 사이의 거리 $|f(x)-L|$이 0에 가까워진다는 것을 의미한다. 즉 양수 ϵ이 임의로 주어졌을 때 ϵ이 아무리 작아도 $|f(x)-L|<\epsilon$이 되도록 할 수 있다는 것을 의미한다.

그런데 이 부등식은 항상 성립하는 것이 아니라 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 성립한다. x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워진다는 것은 $|x-a|$가 0이 아니면서 0에 가까워진다는 것을 의미한다. 즉 충분히 작은 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$인 것을 의미한다.

한편 x의 값이 a에 가까워질 수 있으려면 a는 함수 f의 정의역의 집적점이어야 한다. 따라서 점에서 함수의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 4.1.1 점에서 수렴하는 함수의 극한

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 D의 집적점 a, 그리고 실수 L이 주어졌다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면 **'f는 a에서 L에 수렴한다'** 또는 **'$x \to a$일 때 $f(x) \to L$이다'**라고 말한다. 이때 L을 a에서 f의 **극한**이라고 부른다.

참고 4.1.2 수렴하는 함수의 극한은 유일하다. 즉 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$이고 $f(x) \to M$이면 $L = M$이다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\epsilon/2$도 양수이다. 먼저 $f(x) \to L$이므로 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_1$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - L| < \epsilon/2$이 성립한다. 또한 $f(x) \to M$이므로 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - M| < \epsilon/2$이 성립한다. $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 하자. 그러면 $0 < |x-a| < \delta$, $x \in D$일 때

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \le |L - f(x)| + |f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $|L - M| < \epsilon$이다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로 $|L - M| = 0$이다. ■

수렴하는 함수의 극한이 유일하므로 f가 a에서 L에 수렴하는 것을 다음과 같이 등호를 사용하여 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

함수 f가 a에서 L에 수렴한다는 것을 한정기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \ [0 < |x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - L| < \epsilon]$$

수열의 극한과 마찬가지로, 극한의 정의를 이용하여 함수의 극한의 증명을 기술하는 과정은 다음과 같다.

1. 먼저 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 가정한다.
2. 그리고 ϵ에 대응하는 충분히 작은 양수 δ를 설정한다.
3. 다음으로 $0 < |x-a| < \delta$, $x \in D$라고 가정하고 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립함을 보인다.

여기서 별다른 언급 없이 $0 < |x-a| < \delta$라고 하면 x는 f의 정의역의 원소를 나타내는 것으로 약속한다.

예제 4.1.3 $f(x) = 2x + 1$로 정의된 함수 f가 3에서 7에 수렴함을 보여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta \coloneqq \epsilon/2$라고 하자. 그러면 $0 < |x-3| < \delta$일 때마다

$$|f(x) - 7| = |(2x+1) - 7| = |2x - 6| = 2|x-3| < 2\delta = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 f는 3에서 7에 수렴한다. □

예제 4.1.4 $x \to 5$일 때 $\sqrt{x-1} \to 2$임을 보여라.

풀이 $f(x) = \sqrt{x-1}$이라고 하자. 그러면 f의 정의역은 $[1, \infty)$이다. 이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $\delta \coloneqq 2\epsilon$이라고 하자. 그러면 $0 < |x-5| < \delta$일 때마다

$$|f(x) - 2| = |\sqrt{x-1} - 2| = \left|\frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}\right| \le \left|\frac{x-5}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-5| < \frac{1}{2}\delta = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $x \to 5$일 때 $f(x) \to 2$이다. □

함수의 극한을 증명할 때 적절한 양수 δ를 찾는 것이 다소 어려울 때도 있다. 이때에는 양수 δ가 이미 주어져 있다고 생각하고 $0<|x-a|<\delta$를 가정한 뒤 $|f(x)-L|$을 변형해보면 δ를 찾을 수 있는 실마리를 발견하는 경우가 많다.

예제 4.1.5 $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$임을 증명하여라.

풀이 $f(x)=x^2+1$이라고 하자. 양수 δ가 주어졌다고 생각하고 $0<|x-2|<\delta$라고 가정하자. 그러면

$$|f(x)-5|=|x^2+1-5|=|x-2|\,|x+2|<\delta\,|x+2|$$

이다. 여기서 $-\delta+4<x+2<\delta+4$이므로 $|x+2|$는 아무리 커져도 $\delta+4$보다 작다. $\delta+4\le 5$가 되도록 하면

$$\delta\,|x+2|\le\delta\cdot 5=5\delta$$

를 얻는다. 이때 $5\delta\le\epsilon$인 δ를 택하면 $|f(x)-5|$의 값이 ϵ보다 작아지게 할 수 있다. 그런데 위 부등식을 사용하려면 $\delta+4\le 5$도 성립해야 하므로 $\delta\le 1$인 δ를 택해야 한다. 따라서 주어진 양수 ϵ에 대하여 $\delta=\min\{\epsilon/5,\ 1\}$이라고 하면 된다. [여기까지는 생각하는 과정이며, 증명은 이 다음부터이다.]

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta\coloneqq\min\{\epsilon/5,\ 1\}$이라고 하자. 그러면 $0<|x-2|<\delta$일 때마다

$$|(x^2+1)-5|=|x-2|\,|x+2|<\delta|x+2|\le 5\delta\le\epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$이다. □

위 예제에서 δ를 찾는 과정은 길었으나 증명은 세 줄로 간단히 끝났다. 수학자들이 만들어낸 수많은 아름다운 정리들은 얼핏 보기에는 간단하게 보일지라도 사실은 그러한 아이디어를 떠올리고 그것을 증명하기까지 우리가 상상하기 어려울 정도로 복잡한 탐구 과정이 있었을 것이다.

참고 4.1.6 함수 f가 a에서 수렴할 때, a에서 f의 함숫값과 a에서 f의 극한은 서로 관계가 없다. 예를 들어 함수 $f,\ g$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)\coloneqq x+1,\quad g(x)\coloneqq\begin{cases}x+1 & \text{if } x\ne 2\\ 0 & \text{if } x=2\end{cases}$$

그러면 $x\to 2$일 때 $f(x)\to 3$이고 $g(x)\to 3$이다. □

함수 $f:D\to\mathbb{R}$가 **a의 근방에서 조건 p를 만족시킨다**는 것은 양수 δ가 존재하여 $B_\delta(a)\cap D$ 위에서 f가 p를 만족시킨다는 것을 의미한다.

참고 4.1.7 함수 f가 a에서 수렴하면 f는 a의 근방에서 유계이다.

증명 함수 f가 a에서 L에 수렴한다고 하자. $\epsilon\coloneqq 1$에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta,\ x\in D$일 때마다 $|f(x)-L|<\epsilon$을 만족시킨다. 즉 임의의 $x\in B_\delta'(a)\cap D$에 대하여 $|f(x)|<|L|+\epsilon$이 성립한다. 만약 a가 f의 정의역의 원소이면 $M\coloneqq\max\{|L|+1,\ |f(a)|\}$라고 하고, a가 f의 정의역의 원소가 아니면 $M\coloneqq|L|+1$이라고 하자. 그러면 임의의 $x\in B_\delta(a)\cap D$에 대하여 $|f(x)|\le M$이므로 f는 a의 근방에서 유계이다. ■

정리 4.1.8 수열 판정법(sequential test)

함수 $f: D \to \mathbb{R}$ 와 D의 집적점 a가 주어졌다고 하자. f가 a에서 L에 수렴할 필요충분조건은 a에 수렴하고 $x_n \in D \setminus \{a\}$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 수열 $\{f(x_n)\}$이 L에 수렴하는 것이다.

증명 [$\Rightarrow$] 함수 f가 a에서 L에 수렴한다고 하자. 그리고 정리의 조건을 만족시키는 수열 $\{x_n\}$이 주어졌다고 하자. 임의로 주어진 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $|f(x)-L| < \epsilon$이 성립한다. δ는 양수이므로 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $|x_n - a| < \delta$가 성립한다. 특히 $x_n \neq a$이므로 $n > N$일 때 $0 < |x_n - a| < \delta$가 성립하고 따라서 $|f(x_n) - L| < \epsilon$도 성립한다. 그러므로 수열 $\{f(x_n)\}$은 L에 수렴한다.

[$\Leftarrow$] 함수 f가 a에서 L에 수렴하지 않는다고 가정하자. 그러면 적당한 양수 ϵ이 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $x \in D$가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$, $|f(x)-L| \geq \epsilon$을 만족시킨다. 이것을 변형하면 임의의 자연수 n에 대하여 $x_n \in D$가 존재하여 $0 < |x_n - a| < 1/n$이면서 $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$을 만족시킨다. 이때 수열 $\{x_n\}$은 a에 수렴하고 $x_n \neq a$이지만 $\{f(x_n)\}$은 L에 수렴하지 않는다. ■

위 정리는 $f: D \to \mathbb{R}$가 a에서 L에 수렴하는 경우, $x_n \to a$이고 $x_n \in D \setminus \{a\}$인 수열 $\{x_n\}$에 대하여

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

로 계산할 수 있음을 의미한다. 수열 판정법을 이용하면 함수의 극한이 수렴하지 않는 경우를 쉽게 증명할 수 있다. 이러한 이유 때문에 수열 판정법을 발산 판정법 또는 불연속 판정법이라고 부르기도 한다.

예제 4.1.9 정의역이 열린구간 $(0,\ 1)$인 특성함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $(0,\ 1)$의 어떤 점에서도 수렴하지 않는다.

집합 E에 대하여 **특성함수**(characteristic function) χ_E는 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}$$

즉 $x \in E$일 때에만 함숫값이 1이고 그 외의 점에서는 함숫값이 0인 함수이다. 이 예제에서 주어진 함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 유리수인 점에서는 함숫값이 1이고 무리수인 점에서는 함숫값이 0인 함수이다.

예제 4.1.9의 풀이 $a \in (0,\ 1)$이라고 하자. 그리고 결론에 반하여 f가 a에서 수렴한다고 가정하자. 유리수의 조밀성에 의하여 a에 수렴하고 $r_n \in (0,\ 1) \setminus \{a\}$인 유리수열 $\{r_n\}$이 존재한다. 또한 무리수의 조밀성에 의하여 a에 수렴하고 $s_n \in (0,\ 1) \setminus \{a\}$인 무리수열 $\{s_n\}$이 존재한다. 수열 판정법에 의하여

$$\lim_{x \to a} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{n \to \infty} \chi_{\mathbb{Q}}(r_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

그리고

$$\lim_{x \to a} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{n \to \infty} \chi_{\mathbb{Q}}(s_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

이므로 극한의 유일성에 의하여 $1 = 0$이다. 이것은 모순이므로 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 a에서 어떠한 값에도 수렴하지 않는다. □

F가 닫힌집합일 때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴하고 $x_n \in F$이면 $\{x_n\}$의 극한은 F에 속한다. 함수의 극한도 같은 성질을 가진다.

정리 4.1.10 | 닫힌집합에서의 극한

함수 $f : D \to F$와 점 $a \in D'$이 주어졌다고 하자. 만약 F가 닫힌집합이고 f가 a에서 수렴하면 a에서의 f의 극한은 F에 속한다.

증명 f가 a에서 L에 수렴한다고 하자. a가 D의 집적점이므로 $x_n \in D \setminus \{a\}$이고 $x_n \to a$인 수열 $\{x_n\}$이 존재한다. 그러면 수열 $\{f(x_n)\}$에 대하여 $f(x_n) \in F$이고 정리 4.1.8에 의하여 $f(x_n) \to L$이다. 따라서 정리 3.8.9에 의하여 $L \in F$이다. ■

수직선에서 x가 점 a에 다가가는 방향은 왼쪽과 오른쪽의 두 방향이 있다. x가 a에 다가가는 방향에 따라서 a에서 함수 f의 극한을 구분할 수 있다.

정의 4.1.11 | 좌집적점, 우집적점

집합 E와 실수 α, β에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) α가 E의 **좌집적점**이라는 것은 α가 $(-\infty, \alpha) \cap E$의 집적점인 것을 의미한다.

(ii) β가 E의 **우집적점**이라는 것은 β가 $E \cap (\beta, \infty)$의 집적점인 것을 의미한다.

즉 α가 E의 좌집적점이라는 것은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $(\alpha - \epsilon, \alpha) \cap E \neq \varnothing$이 성립하는 것을 의미하며, β가 E의 우집적점이라는 것은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $E \cap (\beta, \beta + \epsilon) \neq \varnothing$이 성립하는 것을 의미한다. 여기서 '좌', '우'는 집합의 입장에서 붙은 것이 아니라 점의 입장에서 붙은 것이다.

보기 4.1.12 다음은 좌집적점과 우집적점의 예이다.

(i) 0은 $(0, 1]$의 우집적점이고 1은 $(0, 1]$의 좌집적점이다. $0 < p < 1$일 때 p는 $(0, 1]$의 좌집적점인 동시에 우집적점이다.

(ii) 3은 $\mathbb{Q}$의 좌집적점인 동시에 우집적점이다. 사실 임의의 점 p는 $\mathbb{Q}$의 좌집적점인 동시에 우집적점이다.

(iii) 3은 $\mathbb{Z}$의 좌집적점도 아니고 우집적점도 아니다. 사실 $\mathbb{Z}$는 집적점을 갖지 않는다.

(iv) π는 $\{\pi\}$의 좌집적점도 아니고 우집적점도 아니다.

(v) 유한집합은 좌집적점도 갖지 않고 우집적점도 갖지 않는다. □

정의 4.1.13 | 좌극한, 우극한

집합 $f : D \to \mathbb{R}$와 점 A, B가 주어졌다고 하자. 또한 a가 D의 좌집적점이며 b가 D의 우집적점이라고 하자.

(i) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < a - x < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - A| < \epsilon$이 성립하면 'a에서 f의 **좌극한이 수렴한다**'라고 말하며 A를 a에서 f의 **좌극한**이라고 부른다.

(ii) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < x - b < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - B| < \epsilon$이 성립하면 'b에서 f의 **우극한이 수렴한다**'라고 말하며 B를 b에서 f의 **우극한**이라고 부른다.

'a에서 f의 좌극한이 수렴한다'는 말을 'f가 a의 왼쪽에서 수렴한다'라고 말하기도 하며, 'b에서 f의 우극한이 수렴한다'는 말을 'f가 b의 오른쪽에서 수렴한다'라고 말하기도 한다.

좌극한과 우극한을 통틀어 **한방향 극한**(one-sided limit)이라고 부른다. 또 점 a가 함수 f의 정의역의 좌집적점인 동시에 우집적점일 때 정의 4.1.1의 극한을 **양방향 극한**(two-sided limit)이라고 부른다.

점 a에서 f의 좌극한이 존재하면 그것은 유일하며, b에서 f의 우극한이 존재하면 그것은 유일하다. 따라서 정의 4.1.13의 좌극한과 우극한을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\text{`}x \to a-\text{일 때 } f(x) \to A\text{'} \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = A \quad \text{또는} \quad f(a-) = A,$$

$$\text{`}x \to b+\text{일 때 } f(x) \to B\text{'} \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to b+} f(x) = B \quad \text{또는} \quad f(b+) = B.$$

정리 4.1.14 | 한방향 극한과 양방향 극한의 관계

함수 $f : D \to \mathbb{R}$에 대하여 점 a가 D의 좌집적점인 동시에 우집적점이라고 하자. 이때 f가 a에서 L에 수렴할 필요충분조건은 a에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 L에 수렴하는 것이다.

증명 [$\Rightarrow$] f가 a에서 L에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $|f(x)-L| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 동일한 δ에 대하여

$$0 < x-a < \delta\text{이면 } |f(x)-L| < \epsilon,$$
$$0 < a-x < \delta\text{이면 } |f(x)-L| < \epsilon$$

이므로 a에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 L에 수렴한다.

[$\Leftarrow$] a에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 L에 수렴한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 좌극한의 정의에 의하여 양수 δ_1이 존재하여 $0 < a-x < \delta_1$일 때마다 $|f(x)-L| < \epsilon$이 성립한다. 또한 우극한의 정의에 의하여 양수 δ_2가 존재하여 $0 < x-a < \delta_2$일 때마다 $|f(x)-L| < \epsilon$이 성립한다. 이제 $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $|f(x)-L| < \epsilon$이 성립한다. ■

단조이고 유계인 수열이 수렴하는 것처럼 단조인 함수는 점에서 수렴한다.

정리 4.1.15 | 단조수렴

함수 f의 정의역이 D이고 f가 D에서 단조라고 하자.

(i) a가 D의 좌집적점이고 f가 $D \cap (-\infty, a)$에서 유계이면 a에서 f의 좌극한이 수렴한다.

(ii) b가 D의 우집적점이고 f가 $D \cap (b, \infty)$에서 유계이면 b에서 f의 우극한이 수렴한다.

증명 (i) 일반성을 잃지 않고 f가 증가함수라고 하자. $L \coloneqq \sup\{f(x) \mid x < a,\ x \in D\}$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 상한의 성질에 의하여 $L - \epsilon < f(c) \le L$, $c < a$인 점 $c \in D$가 존재한다. $\delta \coloneqq a - c$라고 하자. 그러면 $a - \delta < x < a$, $x \in D$일 때 $c < x < a$이므로

$$L - \epsilon < f(c) \le f(x) \le L$$

이다. 즉 $|f(x)-L| < \epsilon$이므로 a에서 f의 좌극한은 L에 수렴한다.

f가 단조감소인 경우에는 $L \coloneqq \inf\{f(x) \mid x < a,\ x \in D\}$라고 하면 a에서 f의 좌극한은 L에 수렴한다.

(ii) 위 (i)의 증명 과정과 비슷하다. ■

4.2 극한의 계산

3장에서 수렴하는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)$$

이 성립함을 살펴보았다. 점에서 수렴하는 함수의 극한도 비슷한 성질을 가진다.

정리 4.2.1 함수의 사칙계산과 극한

$D\subseteq\mathbb{R}$ 이고, 두 함수 $f:D\to\mathbb{R}$, $g:D\to\mathbb{R}$ 와 점 a가 주어졌으며 $a\in D'$라고 하자. 만약 a에서 f와 g가 각각 A, B에 수렴하면 다음이 성립한다.

(i) $f+g$는 a에서 수렴하고 $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$이다.

(ii) fg는 a에서 수렴하고 $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=AB$이다.

(iii) $B\neq 0$이면 f/g는 a에서 수렴하고 $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=A/B$이다.

(iv) p가 자연수일 때 f^p는 a에서 수렴하고 $\lim_{x\to a}(f(x))^p=A^p$이다.

증명 수열 판정법을 이용하여 증명하자. 수열 $\{x_n\}$이 a에 수렴하고 $x_n\in D\setminus\{a\}$라고 하자. 그러면 수열의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))&=\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=\lim_{n\to\infty}f(x_n)+\lim_{n\to\infty}g(x_n)\\&=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=A+B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)g(x))&=\lim_{n\to\infty}(f(x_n)g(x_n))=\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)\left(\lim_{n\to\infty}g(x_n)\right)\\&=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=AB.\end{aligned}$$

따라서 수열 판정법에 의하여 (i), (ii)가 성립한다. 이제 $B\neq 0$이라고 하자. 그러면 a의 근방에서 $g(x)\neq 0$이므로 충분히 큰 모든 n에 대하여 $g(x_n)\neq 0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))&=\lim_{n\to\infty}(f(x_n)/g(x_n))=\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)\Big/\left(\lim_{n\to\infty}g(x_n)\right)\\&=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\Big/\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=A/B\end{aligned}$$

이므로 수열 판정법에 의하여 (iii)이 성립한다. 끝으로 자연수 p에 대하여

$$\lim_{x\to a}(f(x))^p=\lim_{n\to\infty}(f(x_n))^p=\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)^p=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^p=A^p$$

이므로 (iv)가 성립한다. ■

위 정리는 수열 판정법을 이용하지 않고 함수의 극한의 정의를 이용하여 $\epsilon-\delta$ 논법으로 증명할 수 있다.

정리 4.2.1의 다른 증명 (i) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_1$일 때마다

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 또한 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다

$$|g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \ \delta_2\}$라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이 성립하므로 $x \to a$일 때 $(f(x)+g(x)) \to (A+B)$이다.

(ii) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. g는 a에서 수렴하므로 a의 근방에서 유계이다. 따라서 양수 M과 양수 δ_1이 존재하여 임의의 $x \in B_{\delta_1}(a) \cap D$에 대하여 $|g(x)| < M$이 성립한다. 또한 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2M}$$

이 성립한다. 다시 양수 δ_3이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_3$일 때마다

$$|g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2(|A|+1)}$$

이 성립한다. $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3\}$이라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| \\ &\le |f(x) - A|\,|g(x)| + |A|\,|g(x) - B| \\ &< \frac{\epsilon}{2M}|g(x)| + |A|\frac{\epsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

이 성립하므로 $x \to a$일 때 $f(x)g(x) \to AB$이다.

(iii) 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $B \neq 0$이므로 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_1$일 때마다

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

가 성립한다. 정리 2.2.11의 부등식 $||x| - |y|| \le |x+y|$에서 x를 $g(x)$로, y를 $-B$로 바꾸면

$$||g(x)| - |B|| < \frac{|B|}{2}, \quad -\frac{|B|}{2} < |g(x)| - |B|, \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}$$

를 얻는다. 또한 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\epsilon$$

이 성립한다. $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \ \delta_2\}$라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)|\,|B|} < \frac{2}{|B|^2}|g(x) - B| < \frac{2}{|B|^2}\,\frac{|B|^2}{2}\epsilon = \epsilon$$

이므로 $x \to a$일 때 $1/g(x) \to 1/B$이다. 여기에 (ii)의 결론을 결합하면 $f(x)/g(x) \to A/B$를 얻는다.

(iv) p에 수학적 귀납법을 적용하고 (ii)의 결론을 이용하면 된다. 정리 3.2.5의 증명을 참조하라. ■

이번에는 함수의 극한과 부등호의 관계를 살펴보자. 함수의 극한은 수열의 극한과 마찬가지로 순서를 보존한다. 또한 함수의 극한에 조임 정리를 사용할 수 있다.

정리 4.2.2 함수의 극한과 부등호의 관계

$D \subseteq \mathbb{R}$ 이고, 두 함수 $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ 와 점 a가 주어졌다고 하자. 만약 $a \in D'$이고 f와 g가 a에서 각각 수렴하며 a의 빠진 근방에서 $f \le g$이면 $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$가 성립한다.

증명 a의 빠진 근방에서 $f \le g$라는 것은 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in B_\delta{}'(a)$에 대하여 $f(x) \le g(x)$가 성립한다는 것을 의미한다. 수열 판정법으로 정리의 결론을 끌어내자.

수열 $\{x_n\}$이 a에 수렴하고 $x_n \in D \setminus \{a\}$를 만족시킨다고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $x_n \in B_\delta{}'(a)$이다. 따라서 $n > N$일 때마다 $f(x_n) \le g(x_n)$이므로 수열의 극한의 성질과 수열 판정법에 의하여

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \le \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{x \to a} g(x)$$

를 얻는다. ■

다른 방법의 증명 $x \to a$일 때 $f(x) \to A$, $g(x) \to B$라고 하자. 결론에 반하여 $A > B$라고 가정하자. 그러면 $\epsilon := (A-B)/2$는 양수이다. 따라서 극한의 정의에 의하여 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_1$일 때마다 $|f(x) - A| < \epsilon$이 성립하고, 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다 $|g(x) - B| < \epsilon$이 성립한다. $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$라고 하자. 그러면 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 x에 대하여

$$g(x) < B + \epsilon = A - \epsilon < f(x)$$

가 성립한다. 이것은 a의 빠진 근방에서 $f \le g$라는 사실에 모순이다. ■

정리 4.2.3 조임 정리

함수 f, g, h의 정의역이 D이고 $a \in D'$이며 a의 빠진 근방에서 $f \le g \le h$가 성립한다고 하자. 만약 a에서 f, h가 동일한 값 L에 수렴하면 a에서 g도 L에 수렴한다.

증명 정리의 가정에 의하여 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in B_\delta{}'(a) \cap D$에 대하여 $f(x) \le g(x) \le h(x)$가 성립한다. 수열 $\{x_n\}$이 a에 수렴하고 $x_n \in D \setminus \{a\}$를 만족시킨다고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $x_n \in B_\delta{}'(a)$이다. 따라서 $x_n > N$일 때마다 $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$이다. 더욱이 수열 판정법에 의하여 $\{f(x_n)\}$과 $\{h(x_n)\}$은 L에 수렴하므로 수열의 조임 정리에 의하여 $\{g(x_n)\}$은 L에 수렴한다. 따라서 수열 판정법에 의하여 $x \to a$일 때 $g(x) \to L$이다. ■

다른 방법의 증명 양수 r가 존재하여 임의의 $x \in B_r{}'(a) \cap D$에 대하여 $f(x) \le g(x) \le h(x)$가 성립한다. 또한 극한의 정의에 의하여 양수 δ_1이 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_1$일 때마다 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하며, 양수 δ_2가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta_2$일 때마다 $|h(x) - L| < \epsilon$이 성립한다. $\delta := \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$라고 하면 $0 < |x-a| < \delta$일 때마다 $L - \epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \epsilon$이므로 $|g(x) - L| < \epsilon$이 성립한다. ■

4.3 연속함수

고등학교에서는 함수 f가 a에서 연속인 것을 a에서 f의 극한이 $f(a)$에 수렴하는 것으로 정의한다. 그러나 이러한 정의만으로는 일반적인 함수의 연속성을 논하기 어렵다. 이 절에서는 함수의 연속성을 논리적으로 정의하고 연속함수의 성질을 살펴본다.

> **정의 4.3.1** 함수의 연속
>
> 함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$이 성립하면 'f는 **a에서 연속이다**(continuous at a)'라고 말한다. $E \subseteq D$이고 임의의 $a \in E$에서 f가 연속이면 'f는 **E에서 연속이다**(continuous on E)'라고 말한다. f가 정의역의 모든 점에서 연속이면 f를 **연속함수**(continuous function)라고 부른다.

고등학교 과정에서처럼 극한을 이용하여 점 a에서 f의 연속성을 정의하면 a가 f의 정의역의 집적점일 때에만 정의된다. 그러나 위와 같은 정의는 a가 f의 정의역의 집적점이 아닐 때에도 정의된다.

> **정리 4.3.2** 연속성과 극한의 관계
>
> 함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자. 이때 f가 a에서 연속일 필요충분조건은 a가 D의 집적점이 아니거나, a가 D의 집적점인 경우 a에서 f의 극한이 $f(a)$에 수렴하는 것이다.

증명 [$\Rightarrow$] 명제 $p \to (q \vee r)$가 참임을 증명할 때에는 'p가 참이지만 q는 거짓이라고 가정하면 결국 r가 참이 된다'를 증명하면 된다. f가 a에서 연속이고 a가 D의 집적점이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 연속의 정의에 의하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$일 때 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$이 성립한다. 이때 $0<|x-a|<\delta$이면 $|x-a|<\delta$이므로 당연히 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$이 성립한다. 따라서 f는 a에서 $f(a)$에 수렴한다.

[$\Leftarrow$] 먼저 a가 D의 집적점이 아닌 경우를 증명하자. a가 D의 집적점이 아니므로 $B_r'(a) \cap D = \varnothing$인 양수 r가 존재한다. 즉 $B_r(a) \cap D = \{a\}$이다. 따라서 임의의 양수 ϵ과 $\delta = r$에 대하여 $|x-a|<\delta$, $x \in D$인 점은 $x=a$ 뿐이므로 당연히 $|f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 < \epsilon$이 성립한다.

이번에는 a가 D의 집적점이고 a에서 f가 $f(a)$에 수렴하는 경우를 증명하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$일 때마다 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$이 성립한다. 여기서 $|x-a|<\delta$라고 하면 $x \neq a$일 때에는 $0<|x-a|<\delta$이므로 $|f(x)-f(a)|<\epsilon$이고, $x=a$일 때에는 자명하게 $|f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 < \epsilon$이 성립한다. 따라서 f는 a에서 연속이다. ■

참고 4.3.3 $a \in D$이면서 $a \notin D'$일 때 a를 D의 **고립점**(isolated point)이라고 부른다. 따라서 위 정리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

> 함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자. 이때 f가 a에서 연속일 필요충분조건은 a가 D의 고립점이거나, a가 D의 집적점인 경우 a에서 f의 극한이 $f(a)$에 수렴하는 것이다.

함수의 연속성은 열린집합을 이용하여 정의할 수도 있다.

정리 4.3.4 열린집합을 이용한 연속함수의 정의

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가 연속함수일 필요충분조건은 임의의 열린집합 G에 대하여 $f^{-1}(G)$가 D에서의 열린집합인 것이다. [위상수학에서는 이것이 연속함수의 정의이다.]

증명 [$\Rightarrow$] f가 D에서 연속이라고 하자. 그리고 G가 열린집합이라고 하자. $H := f^{-1}(G)$라고 하자. 만약 H가 공집합이면 정리의 결론을 얻는다. 따라서 H가 공집합이 아니고 점 a를 원소로 가진다고 하자. 그리고 $b := f(a)$라고 하자. 그러면 $b \in G$이다. G가 열린집합이므로 $B_\epsilon(b) \subseteq G$인 양수 ϵ이 존재한다. f가 a에서 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$이 성립한다. 이것은 $B_\delta(a) \cap D \subseteq f^{-1}(G)$를 의미하므로 $f^{-1}(G)$는 열린집합이다.

[$\Leftarrow$] 임의의 열린집합 G에 대하여 $f^{-1}(G)$가 D에서의 열린집합이라고 하자. 그리고 $a \in D$라고 하자. 만약 a가 D의 고립점이면 정리 4.3.2에 의하여 f는 a에서 연속이다. 이제 a가 D의 집적점이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $B_\epsilon(f(a))$는 열린집합이므로 $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$는 D에서의 열린집합이다. 따라서 $B_\delta(a) \cap D \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$인 양수 δ가 존재한다. 즉 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 f는 a에서 연속이다. ■

정리 4.3.5 합성함수의 연속성

함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 연속이면 합성함수 $g \circ f : A \to C$도 연속이다.

증명 G가 열린집합이라고 하자. g가 연속함수이므로 정리 4.3.4에 의하여 $g^{-1}(G)$는 B에서의 열린집합이다. f가 연속함수이므로 정리 4.3.4에 의하여 $f^{-1}(g^{-1}(G))$는 A에서의 열린집합이다. 즉 임의의 열린집합 G에 대하여 $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$가 열린집합이므로 정리 4.3.4에 의하여 $g \circ f$는 연속함수이다. ■

다른 방법의 증명 A의 원소 a가 임의로 주어졌다고 하고 $b = f(a)$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. g가 b에서 연속이므로 양수 δ_1이 존재하여 $|y-b| < \delta_1$일 때마다 $|g(y) - g(b)| < \epsilon$이 성립한다. f가 a에서 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-a| < \delta$일 때마다 $|f(x) - f(a)| < \delta_1$이 성립한다. 따라서 동일한 δ에 대하여 $|x-a| < \delta$일 때마다 $|g(f(x)) - g(f(a))| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$이 성립하므로 $g \circ f$는 a에서 연속이다. ■

정리 4.3.6 사칙계산으로 만들어진 함수의 연속성

두 함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 $g : D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 연속이면 $f+g$, fg도 a에서 연속이다. 더욱이 만약 $g(a) \neq 0$이면 f/g는 a에서 연속이다.

증명 만약 a가 D의 고립점이면 $f+g$, fg, f/g는 a에서 연속이다. a가 D의 집적점이면 극한의 성질에 의하여 $x \to a$일 때 $f(x)+g(x) \to f(a)+g(a)$, $f(x)g(x) \to f(a)g(a)$이므로 $f+g$와 fg는 a에서 연속이다. 또한 $g(a) \neq 0$이면 $x \to a$일 때 $f(x)/g(x) \to f(a)/g(a)$이므로 f/g도 a에서 연속이다. ■

극한을 좌극한과 우극한으로 구분한 것처럼 연속성도 좌연속과 우연속으로 구분할 수 있다.

정의 4.3.7 한방향 연속

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자.

(i) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < a - x < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$이 성립하면 'f는 a에서 **좌연속**(left continuous)이다'라고 말한다.

(ii) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < x - a < \delta$, $x \in D$일 때마다 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$이 성립하면 'f는 a에서 **우연속**(right continuous)이다'라고 말한다.

보기 4.3.8 열린구간 $I = (2,\ 4)$에 대하여 특성함수 $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 2에서 좌연속이지만 우연속이 아니고, 4에서 좌연속이 아니지만 우연속이다. 한편 특성함수 $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 어떤 점에서도 좌연속이 아니며 우연속도 아니다. □

보기 4.3.9 실수 x에 대하여 **최대정수함수**를 $[x] \coloneqq \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$로 정의한다. a가 정수일 때 최대정수함수는 a에서 불연속이지만 우연속이다. 그러나 a에서 좌연속은 아니다. 한편 최대정수함수는 정수가 아닌 모든 점에서 연속이다. [최대정수함수는 '가우스 함수'라고도 불린다.] □

좌연속과 우연속은 연속의 정의에서 조건 $|x - a| < \delta$를 변형하여 얻어진 것이다. 마찬가지로 연속의 정의에서 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$을 변형하여 다음과 같은 정의를 얻을 수 있다.

정의 4.3.10 상반·하반연속

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자.

(i) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x - a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $f(x) \leq f(a) + \epsilon$이 성립하면 '$f$는 a에서 **상반연속**(upper semi-continuous)이다'라고 말한다.

(ii) 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x - a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $f(a) - \epsilon \leq f(x)$가 성립하면 '$f$는 a에서 **하반연속**(lower semi-continuous)이다'라고 말한다.

보기 4.3.11 함수 $\chi_{(0,\ 1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 0에서 하반연속이지만 상반연속은 아니다. □

보기 4.3.12 최대정수함수는 정수인 점에서 상반연속이지만 하반연속은 아니다. 정수가 아닌 점에서는 상반연속인 동시에 하반연속이다. □

다음은 한방향 연속과 상반·하반연속의 정의에 의하여 자명하게 성립한다.

정리 4.3.13 연속성 개념들의 관계

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 정의역의 점 a가 주어졌다고 하자. 이때 다음 세 명제는 동치이다.

(i) f는 a에서 연속이다.

(ii) f는 a에서 좌연속인 동시에 우연속이다.

(iii) f는 a에서 상반연속인 동시에 하반연속이다.

지금부터는 닫힌집합 위에서의 연속함수의 성질을 살펴보자.

정리 4.3.14 | 콤팩트집합 위에서 연속함수의 성질

함수 $f: K \to \mathbb{R}$가 연속이고 K가 콤팩트집합이면 $f(K)$도 콤팩트집합이다.

증명 $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$가 $f(K)$의 열린덮개라고 하자. 그러면 $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$는 K의 덮개가 된다. 또한 각 α에 대하여 $U_\alpha \cap K = f^{-1}(V_\alpha)$인 열린집합 U_α가 존재한다. 이때 $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$는 K의 열린덮개가 된다. K가 콤팩트집합이므로 유한 개의 열린집합 $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_N}$이 존재하여

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\alpha_j}$$

를 만족시킨다. 이때

$$f(K) = f\left(\bigcup_{j=1}^{N} U_{\alpha_j} \cap K\right) = \bigcup_{j=1}^{N} f\left(f^{-1}(V_{\alpha_j})\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{\alpha_j}$$

이므로 $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \cdots, V_{\alpha_N}\}$은 $f(K)$를 덮는 $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$의 유한부분덮개이다. 따라서 $f(K)$는 콤팩트집합이다. ■

정리 4.3.15 | 연속함수의 최대 · 최소

함수 $f: K \to \mathbb{R}$가 연속이고 K가 콤팩트집합이며 공집합이 아니면 f는 K에서 유계이다. 더욱이 f는 K에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

증명 $f(K)$는 콤팩트집합이므로 유계이다. 따라서 상한과 하한을 가진다. $f(K)$의 상한을 M_1, 하한을 M_2라고 하자. $f(K)$는 닫힌집합이므로 $f(K)$의 상한과 하한은 $f(K)$에 속한다. 즉 $M_1 = \max f(K) \in f(K)$, $M_2 = \min f(K) \in f(K)$가 성립한다. 따라서 적당한 두 점 m_1, m_2가 존재하여

$$f(m_1) = M_1 = \max f(K), \quad f(m_2) = M_2 = \min f(K)$$

를 만족시킨다. ■

참고 4.3.16 일반적으로 정리 4.3.15의 역은 성립하지 않는다. 즉 콤팩트가 아닌 집합 위에서도 연속함수가 최댓값이나 최솟값을 가질 수 있다. 예컨대 두 함수 $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) := \frac{1}{x}, \quad g(x) := x^2$$

으로 정의하면 f와 g는 모두 연속함수이다.

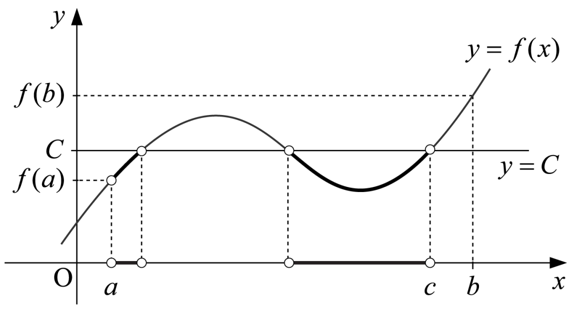
(i) f는 $(0, 1)$에서 유계가 아니지만 콤팩트집합 $[1, 2]$에서는 유계이고 최댓값 1, 최솟값 $\frac{1}{2}$을 가진다. $(1, 2)$는 콤팩트집합이 아니지만 f는 $(1, 2)$에서 유계이다. 그러나 $(1, 2)$에서 최댓값이나 최솟값을 갖지는 않는다.

(ii) g는 $\mathbb{R}$에서 유계가 아니고 최댓값을 갖지 않는다. 그러나 g는 $\mathbb{R}$에서 최솟값을 가진다. g는 콤팩트집합 $[1, 2]$에서 유계이고 최댓값 4, 최솟값 1을 가진다. □

정리 4.3.17 연속함수의 사잇값 성질 (사잇값 정리)

함수 $f:[a,\ b] \to \mathbb{R}$ 가 연속이고 $f(a) \neq f(b)$라고 하자. 그러면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 C에 대하여 $f(c)=C$를 만족시키는 점 c가 $[a,\ b]$에 존재한다.

증명 $f(a)<f(b)$인 경우를 증명하자. $f(a)<C<f(b)$라고 하자. 그리고 $E \coloneqq \{x \in [a,\ b] \mid f(x)<C\}$라고 하자. 먼저 $a \in E$이므로 $E \neq \varnothing$이다. 또한 $E \subseteq [a,\ b]$이므로 E는 유계이다. 따라서 $c \coloneqq \sup E$가 존재한다. $f(c)=C$임을 보이자.



c는 E의 상한이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $c-1/n<x_n \le c$인 $x_n \in E$가 존재한다. 이때 E의 정의에 의하여 $f(x_n)<C$이다.

다음으로 f는 b에서 연속이고 $C<f(b)$이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-b|<\delta$일 때마다 $C<f(x)$를 만족시킨다. 따라서 $c<b$이다. $y_n \coloneqq c+(b-c)/n$이라고 하면 $c<y_n \le b$이므로 $y_n \notin E$이다. 이때 $C \le f(y_n)$이다.

두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$은 모두 c에 수렴하고 f는 c에서 연속이므로

$$C \le \lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(c) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \le C$$

이다. 따라서 $f(c)=C$이다. ■

정리 4.3.18 역함수의 연속성

함수 $f:K \to E$가 일대일대응이고 연속이며 K가 콤팩트집합이면 $f^{-1}:E \to K$도 연속함수이다.

증명 $f^{-1}:E \to K$가 연속함수임을 증명하려면 임의의 열린집합 U에 대하여 $(f^{-1})^{-1}(U)$가 열린집합이 된다는 것을 증명해야 한다. 그런데 K가 콤팩트집합이고 $E=f(K)$이므로 E도 콤팩트집합이다. 따라서 임의의 열린집합 U에 대하여 $(f^{-1})^{-1}(U)$가 열린집합이 된다는 것을 증명하는 대신 다음 명제를 증명하면 된다.

"임의의 닫힌집합 F에 대하여 $(f^{-1})^{-1}(F)$가 닫힌집합이 된다."

이제 위 명제를 증명하자. F가 $\mathbb{R}$ 에서의 닫힌집합이라고 하자. f^{-1}의 정의역이 $f(K)$이므로

$$(f^{-1})^{-1}(F)=f(F)=f(F \cap K)$$

이다. 그런데 $F \cap K$는 콤팩트집합이므로 $f(F \cap K)$도 콤팩트집합이다. 즉 $(f^{-1})^{-1}(F)$는 닫힌집합이다. 그러므로 f^{-1}는 연속함수이다. ■

참고 4.3.19 함수 $f : K \to E$가 일대일대응이고 연속일지라도 K가 콤팩트집합이 아니면 f^{-1}는 연속이 아닐 수도 있다. 예를 들어

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \in [0,\ 1] \\ x-1 & \text{if } x \in (2,\ 3] \end{cases}$$

으로 정의된 함수 f는 $[0,\ 1] \cup (2,\ 3]$에서 연속이다. 그러나

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0,\ 1] \\ x+1 & \text{if } x \in (1,\ 2] \end{cases}$$

이므로 f^{-1}는 1에서 불연속이다. □

함수 $f : D \to \mathbb{R}$가 D에서 연속이라는 것을 한정기호로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall a \in D\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D :\ (|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

여기서 δ는 a의 값과 ϵ의 값에 영향을 받는다. 예를 들어 함수 $f : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$가

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

로 정의되었다고 하자. $\epsilon = 1$이고 $a = 3$일 때에는 $\delta = 1$에 대하여

$$|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

이 참이다. 그러나 만약 $\epsilon = 1$이고 $a = 1$일 때에는 $\delta = 1$에 대하여 위 명제가 성립하지 않는다. $\epsilon = 1,\ a = 1$일 때에는 $\delta = \frac{1}{2}$이 되어야 위 명제가 참이 된다. 즉 ϵ이 변하지 않아도 a가 변하면 δ의 값이 변한다.

그러나 함수에 따라서는 주어진 ϵ에 대하여 적절한 δ가 정해지고 나면 a의 값이 변해도 δ의 값이 변할 필요가 없는 경우가 있다.

정의 4.3.20 | 균등연속

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 집합 $E \subseteq D$가 주어졌다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|s-t| < \delta,\ s \in E,\ t \in E$일 때마다 $|f(s) - f(t)| < \epsilon$이 성립하면 'f는 E에서 **균등연속**(uniformly continuous)이다'라고 말한다.

보기 4.3.21 함수 $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$가 $f(x) := x^2$으로 정의되었을 때 f는 $[0,\ 1]$에서 균등연속이다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $\delta := \epsilon/2$이라고 하자. 그러면 $|s-t| < \delta,\ s \in [0,\ 1],\ t \in [0,\ 1]$일 때마다

$$|f(s) - f(t)| = \left|s^2 - t^2\right| = |s+t|\,|s-t| \le 2|s-t| < 2\delta = \epsilon$$

이다. 따라서 f는 $[0,\ 1]$에서 균등연속이다. □

예제 4.3.22 함수 $f : (0,\ 1) \to \mathbb{R}$가 $f(x) := 1/x$로 정의되었을 때 f는 $(0,\ 1)$에서 균등연속이 아니다.

증명 $\epsilon = 1$이라고 하자. 그리고 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자. $s := \min\{1,\ \delta\}$라고 하자. f는 $(0,\ s)$에서 위로 유계가 아니므로 $f(t) > f(s) + 1$인 $t \in (0,\ s)$가 존재한다.
이때 $|s-t| < \delta$이지만 $|f(s) - f(t)| \ge \epsilon$이므로 f는 $(0,\ 1)$에서 균등연속이 아니다. □

정리 4.3.23 콤팩트집합 위에서의 균등연속성

함수 $f : K \to \mathbb{R}$ 가 연속이고 K가 콤팩트집합이면 f는 K에서 균등연속이다.

증명 f가 K에서 연속이라고 하자. 양수 ϵ과 점 $a \in K$가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 양수 δ_a가 존재하여 임의의 $x \in K$에 대하여

$$x \in B_{\delta_a}(a)\text{일 때마다 } |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. $\left\{B_{2^{-1}\delta_a}(a) \mid a \in K\right\}$는 K의 열린덮개이고 K는 콤팩트집합이므로 유한 개의 점 $a_j \in K$가 존재하여 $\delta_j \coloneqq 2^{-1}\delta_{a_j}$에 대하여

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{\delta_j}(a_j)$$

를 만족시킨다. 여기서 $\delta \coloneqq \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_N\}$이라고 하면 δ는 양수이다.

두 점 $x,\ y \in K$에 대하여 $|x - y| < \delta$라고 하자. 그러면 $x \in B_{\delta_j}(a_j)$이고 $1 \le j \le N$인 j가 존재한다. 따라서

$$\left|y - a_j\right| \le \left|y - x\right| + \left|x - a_j\right| < \delta_j + \delta_j = 2\delta_j = \delta_{a_j}$$

가 성립한다. 이것은 $y \in B_{\delta_{a_j}}(a_j)$를 의미한다. 그러므로

$$|f(x) - f(y)| \le \left|f(x) - f(a_j)\right| + \left|f(a_j) - f(y)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이 성립한다. ■

다른 방법의 증명 결론에 반하여 f가 K에서 균등연속이 아니라고 가정하자. 그러면 적당한 양수 ϵ이 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $s,\ t \in K$가 존재하여 $|s - t| < \delta$이면서 $|f(s) - f(t)| \ge \epsilon$을 만족시킨다. 따라서 자연수 n에 대하여

$$\left|s_n - t_n\right| < \frac{1}{n} \quad \text{이면서} \quad \left|f(s_n) - f(t_n)\right| \ge \epsilon$$

인 두 점 $s_n,\ t_n$이 K에 존재한다. 이렇게 정의된 수열 $\{s_n\}$은 유계이므로 수렴하는 부분수열 $\left\{s_{n_k}\right\}$를 가진다. 동일한 첨자 n_k에 대하여 $\left\{t_{n_k}\right\}$는 $\{t_n\}$의 부분수열이 된다. 더욱이

$$\left|s_{n_k} - t_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$$

이므로 $\left\{t_{n_k}\right\}$는 $\left\{s_{n_k}\right\}$와 동일한 값에 수렴한다. 이 두 수열의 극한을 α라고 하자. K는 닫힌집합이므로 $\alpha \in K$이다. f는 연속함수이므로

$$\lim_{k\to\infty} f\left(s_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(t_{n_k}\right) = f(\alpha)$$

이다. 그런데 임의의 n에 대하여 $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| \ge \epsilon$이므로 $\left\{f\left(s_{n_k}\right)\right\}$와 $\left\{f\left(t_{n_k}\right)\right\}$는 동일한 값에 수렴할 수 없다. 이것은 모순이므로 f는 K에서 균등연속이다. ■

4.4 무한대 극한

수열의 극한과 마찬가지로 함수의 극한에서도 x가 무한히 커질 때 $f(x)$가 L에 가까워지는 극한을 정의할 수 있다. 또한 한 점에서의 극한이나 무한대에서의 극한이 발산하는 경우도 정의할 수 있다. 뿐만 아니라 좌극한과 우극한이 무한대로 발산하는 경우도 정의할 수 있다.

이 절에서는 무한대가 포함된 여러 가지 극한을 살펴보자.

정의 4.4.1 | 양의 무한대에서의 극한

함수 $f : D \to \mathbb{R}$의 정의역 D가 위로 유계가 아닐 때 다음과 같이 정의한다.

(i) L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$인 임의의 $x \in D$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면 'f는 **양의 무한대에서 L에 수렴한다**'라고 말한다.

(ii) 임의의 실수 Y에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$, $x \in D$일 때마다 $f(x) > Y$가 성립하면 'f는 **양의 무한대에서 양의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

(iii) 임의의 실수 Y에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$, $x \in D$일 때마다 $f(x) < Y$가 성립하면 'f는 **양의 무한대에서 음의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

위 정의의 극한을 기호로 나타내면 다음과 같다.

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

또한 위 극한을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

(i) $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to L$이다.
(ii) $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다.
(iii) $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이다.

음의 무한대에서 수렴하거나 발산하는 경우도 비슷하게 정의한다.

정의 4.4.2 | 음의 무한대에서의 극한

함수 $f : D \to \mathbb{R}$의 정의역 D가 아래로 유계가 아닐 때 다음과 같이 정의한다.

(i) L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x < X$인 임의의 $x \in D$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면 'f는 **음의 무한대에서 L에 수렴한다**'라고 말한다.

(ii) 임의의 실수 Y에 대하여 실수 X가 존재하여 $x < X$, $x \in D$일 때마다 $f(x) > Y$가 성립하면 'f는 **음의 무한대에서 양의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

(iii) 임의의 실수 Y에 대하여 실수 X가 존재하여 $x < X$, $x \in D$일 때마다 $f(x) < Y$가 성립하면 'f는 **음의 무한대에서 음의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

음의 무한대에서 수렴하거나 발산하는 극한을 기호로 나타낼 때에는 양의 무한대에서 수렴하거나 발산하는 극한의 표기에서 $x \to +\infty$를 $x \to -\infty$로 바꾸면 된다.

보기 4.4.3 다음은 무한대에서의 극한의 예이다.

(i) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ (iv) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

증명 여기서는 예시로 (i)과 (iv)를 증명하겠다. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $X := 1/\epsilon$은 양수이다. 이때 $x > X$이면

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{X} = \epsilon$$

이므로 (i)이 성립한다.

이제 (iv)를 증명하자. 실수 Y가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $X := \min\{-1, -|Y|\}$라고 하자. 그러면 $x < X$일 때

$$x^2 > X^2 \geq |X| \geq |Y| \geq Y$$

이므로 (iv)가 성립한다. □

한 점에서 발산하는 극한도 비슷하게 정의한다.

정의 4.4.4 | 한 점에서 무한대로 발산

함수 f의 정의역이 D이고 a가 D의 집적점이라고 하자.

(i) 임의의 실수 Y에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $f(x) > Y$가 성립하면 'f는 **a에서 양의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

(ii) 임의의 실수 Y에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다 $f(x) < Y$가 성립하면 'f는 **a에서 음의 무한대로 발산한다**'라고 말한다.

(iii) a가 D의 좌집적점일 때 위 (i), (ii)에서 $|x-a| < \delta$를 $0 < a - x < \delta$로 바꾸면 좌극한의 정의가 된다. 또한 a가 D의 우집적점일 때 위 (i), (ii)에서 $|x-a| < \delta$를 $0 < x - a < \delta$로 바꾸면 우극한의 정의가 된다.

위 정의의 극한을 기호로 나타내면 다음과 같다.

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ii) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

또한 위 극한을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

(i) $x \to a$일 때 $f(x) \to +\infty$이다.
(ii) $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$이다.

좌극한의 경우 $x \to a$를 $x \to a-$로 바꾸면 되고, 우극한의 경우 $x \to a$를 $x \to a+$로 바꾸면 된다.

보기 4.4.5 다음은 한 점에서 발산하는 극한의 예이다.

(i) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (ii) $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

(iii) $\lim_{x \to 1-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$ (iv) $\lim_{x \to 0-} \csc x = -\infty$ □

무한대 극한은 점에서 실수에 수렴하는 극한과 비슷한 성질을 가지고 있다.

정리 4.4.6 | 함수의 극한의 수열 판정법

함수 f의 정의역이 D라고 하자. $x \to a$일 때 $f(x) \to L$일 필요충분조건은 $x_n \to a$, $x_n \neq a$이면서 모든 항이 D에 속하는 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $f(x_n) \to L$이 성립하는 것이다. 여기서 a, L은 각각 실수이거나 양의 무한대이거나 음의 무한대이다. 좌극한과 우극한에 대해서도 마찬가지로 성립한다.

확장실수계 $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$에서의 사칙계산을 다음과 같이 정의한다.

(i) $x \in \mathbb{R}$일 때 $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty := \infty$, $x - \infty = -\infty + x = -\infty - \infty := -\infty$.

(ii) $x > 0$일 때 $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) := \infty$,

$x \cdot (-\infty) = (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) := -\infty$.

(iii) $x < 0$일 때 $x \cdot \infty = \infty \cdot x := -\infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x := \infty$.

(iv) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 := 0$.

단, $\infty - \infty$는 정의되지 않는다. 이 내용을 바탕으로 다음 정리를 얻는다.

정리 4.4.7 | 함수의 극한과 사칙계산의 관계

$x \to a$일 때 $f(x) \to L$, $g(x) \to M$이면 다음이 성립한다.

(i) $x \to a$일 때 $(f(x) + g(x)) \to L + M$ (단, $L + M$이 정의될 때)

(ii) $x \to a$일 때 $(f(x)g(x)) \to LM$ (단, LM이 $\pm\infty \cdot 0$ 꼴이 아닐 때)

여기서 a, L, M은 각각 실수이거나 양의 무한대이거나 음의 무한대이다. 좌극한과 우극한에 대해서도 마찬가지로 성립한다.

점에서의 극한과 마찬가지로 무한대 극한도 부등호와 관련된 성질들을 가지고 있다.

정리 4.4.8 | 함수의 극한과 부등호의 관계

$x \to a$일 때 $f(x) \to L$, $g(x) \to M$이고 임의의 x에 대하여 $f(x) \leq g(x)$이면 $L \leq M$이다. 여기서 a, L, M은 각각 실수이거나 양의 무한대이거나 음의 무한대이다. 좌극한과 우극한에 대해서도 마찬가지로 성립한다.

정리 4.4.9 | 조임 정리

함수 f, g, h의 정의역이 D이고 임의의 $x \in D$에 대하여 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$가 성립한다고 하자. 만약 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$, $h(x) \to L$이면 $g(x) \to L$이다. 여기서 L은 실수이고 a는 실수이거나 양의 무한대이거나 음의 무한대이다. 좌극한과 우극한에 대해서도 마찬가지로 성립한다.

정리 4.4.10 | 단조수렴

함수 f가 단조이고 유계이면 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때 f는 실수에 수렴한다.

4.5 상극한과 하극한*

수열의 상극한과 하극한을 정의한 것처럼 함수의 상극한과 하극한을 정의할 수 있다.

정의 4.5.1 함수의 집적점, 상극한과 하극한

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 와 $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) 수열 $\{x_n\}$이 존재하여 $x_n \to a$, $x_n \in D \setminus \{a\}$, $f(x_n) \to L$이 성립하면 '**f는 a에서 집적점 L을 가진다**'라고 말한다. a에서 f의 집적점 중에서 가장 큰 것을 a에서 f의 **상극한**이라고 부르며, 집적점 중에서 가장 작은 것을 a에서 f의 **하극한**이라고 부른다.

(ii) 위 (i)에서 $x_n \in D$를 $x_n \in D \cap (-\infty, a)$로 바꾸면 좌극한의 정의가 되며, $x_n \in D \cap (a, \infty)$로 바꾸면 우극한의 정의가 된다.

위 정의의 극한을 기호로 나타내면 다음과 같다.

- $\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = L$: a에서 f의 상극한이 L이다.
- $\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = L$: a에서 f의 하극한이 L이다.

좌극한의 경우에는 $x \to a$를 $x \to a-$로 바꾸면 되며, 우극한의 경우에는 $x \to a$를 $x \to a+$로 바꾸면 된다.

보기 4.5.2 함수 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x) \coloneqq \cos\frac{1}{x}$$

이때 0이 아닌 임의의 실수 x에 대하여 $|f(x)| \le 1$이다. 즉 f는 0에서 1보다 큰 집적점을 가질 수 없으며 -1보다 작은 집적점을 가질 수 없다. 또한 $x_n = (2n\pi)^{-1}$, $y_n = ((2n+1)\pi)^{-1}$일 때 $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, $x_n \ne 0$, $y_n \ne 0$이고 $f(x_n) \to 1$, $f(y_n) \to -1$이므로

$$\overline{\lim_{x \to 0}} f(x) = 1, \quad \underline{\lim_{x \to 0}} f(x) = -1$$

이다. □

참고 4.5.3 정의 4.5.1에서 a와 L은 각각 실수일 수도 있고 양의 무한대 또는 음의 무한대일 수도 있다. 예를 들어 $f(x) = x\cos x$로 정의된 함수 f에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} f(2n\pi) = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} f((2n+1)\pi) = -\infty$$

이고 $2n\pi \to +\infty$, $2n+1 \to +\infty$이므로 f는 $a = +\infty$에서 $+\infty$와 $-\infty$를 집적점으로 가진다. [물론 다른 실수도 집적점으로 가진다.] 이때 임의의 실수 r에 대하여 $-\infty < r < +\infty$이므로 f가 $a = +\infty$에서 갖는 집적점 중 가장 큰 것은 $+\infty$이고 가장 작은 것은 $-\infty$이다. 따라서

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} f(x) = +\infty, \quad \underline{\lim_{x \to +\infty}} f(x) = -\infty$$

이다. □

수열과 마찬가지로 함수의 상극한과 하극한에 대해서도 다음이 성립한다.

정리 4.5.4 | 함수의 집적점, 상극한과 하극한

함수 $f: D \to \mathbb{R}$ 와 $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$ 에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 일 필요충분조건은

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = L \quad \text{그리고} \quad \underline{\lim_{x \to a}} f(x) = L$$

인 것이다.

증명 먼저 a와 L이 실수인 경우를 증명하자. $x \to a$일 때 $f(x) \to L$이라고 하자. 그러면 수열 판정법에 의하여 $x_n \in D \setminus \{a\}$이고 $x_n \to a$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $f(x_n) \to L$이다. 즉 f는 a에서 L만을 집적점으로 가지므로 a에서 f의 상극한과 하극한은 모두 L이다.

역으로 a에서 f의 상극한과 하극한이 모두 L이라고 하자. 그리고 $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$인 수열 $\{x_n\}$이 임의로 주어졌다고 하자. L이 실수이므로 $\{f(x_n)\}$은 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는다. 즉 $\{f(x_n)\}$은 유계이다. 따라서 수렴하는 부분수열을 가진다. 그런데 L이 a에서 f의 상극한인 동시에 하극한이므로 $\{f(x_n)\}$의 수렴하는 부분수열은 모두 L에 수렴한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$ 자신도 L에 수렴한다. 그러므로 수열 판정법에 의하여 a에서 f는 L에 수렴한다.

다음으로 a와 L이 모두 양의 무한대인 경우를 증명하자. $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$라고 하자. 그리고 $x_n \in D$이고 $x_n \to +\infty$인 수열 $\{x_n\}$이 임의로 주어졌다고 하자. 함수의 극한의 정의에 의하여 실수 Y에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$, $x \in D$일 때마다 $f(x) > Y$가 성립한다. 다시 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $x_n > X$가 성립한다. 동일한 N에 대하여 $n > N$일 때마다 $f(x_n) > Y$이므로 $f(x_n) \to +\infty$를 얻는다. 즉 $+\infty$는 f가 $+\infty$에서 갖는 유일한 집적점이다. 따라서 $+\infty$에서 f의 상극한과 하극한은 모두 $+\infty$이다.

역으로 $+\infty$에서 f의 상극한과 하극한이 모두 $+\infty$라고 하자. 그리고 결론에 반하여 $x \to +\infty$일 때 $f(x) \not\to +\infty$라고 하자. 그러면 양수 Y가 존재하여 임의의 자연수 n에 대하여 $x_n \in D$가 존재하여 $x_n > n$, $f(x_n) \le Y$를 만족시킨다. 이때 $\{f(x_n)\}$은 Y에 의하여 위로 유계이므로 음의 무한대로 발산하는 부분수열을 갖거나 Y 이하의 실수에 수렴하는 부분수열을 가진다. 이것은 $+\infty$에서 f의 하극한이 Y 이하라는 것을 의미하므로 모순이다. 따라서 $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다.

다른 경우의 증명은 위 두 경우의 증명을 수정하여 조합하면 된다. ■

이로써 정리 4.1.8에서 살펴본 수열 판정법은 a와 L이 무한대인 경우에도 사용할 수 있다.

따름정리 4.5.5 (수열 판정법) 함수 $f: D \to \mathbb{R}$ 와 두 점 $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$ 이 주어졌다고 하자. $x \to a$일 때 $f(x) \to L$일 필요충분조건은 $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $f(x_n) \to L$이 성립하는 것이다.

증명 정리 4.1.8과 정의 4.5.1 그리고 정리 4.5.4의 증명 과정에 의하여 성립한다. ■

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 집적점에 관한 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 실수 λ가 집합 E의 좌집적점이면 λ는 E의 집적점이다.

(2) 실수 λ가 집합 E의 좌집적점이면 λ는 E의 우집적점이다.

(3) 실수 λ가 집합 E의 집적점이 아니면 λ는 E의 고립점이다.

2. 연속에 관한 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 함수 f가 a에서 좌연속이면 f는 a에서 연속이다.

(2) 함수 f가 a에서 좌연속이지만 우연속이 아니면 f는 a에서 연속이 아니다.

(3) 함수 f가 a에서 연속이면 f는 a에서 좌연속이다.

3. 한 점에서 함수의 극한값과 함숫값은 어떠한 관계가 있는지 설명하여라.

4. 극한 $\lim_{x\to a} f(x) = L$의 정의에서 a가 f의 정의역의 집적점이라는 조건이 빠지면 어떠한 모순이 발생하는지 예를 들어 설명하여라.

5. 극한 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$의 정의에서 f의 정의역이 위로 유계가 아니라는 조건이 빠지면 어떠한 모순이 발생하는지 예를 들어 설명하여라.

6. 다음 극한을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{3x+1}$

(2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

(4) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{11x+2}{2x^3-1}$

(5) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3}{7x+4}$

(6) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

7. 다음 극한을 구하여라.

(1) $\overline{\lim_{x\to 0}}\sin\dfrac{1}{x}$

(2) $\overline{\lim_{x\to-\infty}}\sin x$

(3) $\underline{\lim_{x\to 1}}\dfrac{1}{1-x}$

(4) $\underline{\lim_{x\to+\infty}}\chi_{\mathbb{Q}}(x)$

8. 극한의 정의 4.1.1을 이용하여 다음을 증명하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$

(2) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$

(3) $\lim_{x\to-2}\sqrt{4x^2-3} = \sqrt{13}$

(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3$

9. 극한의 정의 4.4.4를 이용하여 다음을 증명하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$

(2) $\lim_{x\to 1-}\dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$

(3) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sin x} = +\infty$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x} = +\infty$

10. 극한의 정의 4.4.1과 4.4.2를 이용하여 다음을 증명하여라.

(1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ (2) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{x+1} = +\infty$

(3) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-x-5} = 2$ (4) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = -1$

11. $f : A \to B$가 A에서 균등연속이고 $g : B \to C$가 B에서 균등연속일 때 $g \circ f : A \to C$가 A에서 균등연속임을 증명하여라.

12. 함수 f가 (a, b)에서 연속이고 순증가이며 유계라고 하자. 이때 a, b에서 f의 함숫값을 적절히 정의함으로써 f가 $[a, b]$에서 연속인 함수로 확장될 수 있음을 보여라.

13. 구간 $[-1, 1]$에서 $f(x) = |x|$로 정의된 함수 f가 균등연속임을 증명하여라.

14. 함수 f가 다음과 같이 정의되었을 때 f는 어느 점에서도 연속이 아님을 증명하여라.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

이러한 함수를 **디리끌레 함수**(Dirichlet function)라고 부른다. 참고로 디리끌레는 본래 이 함수를

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \left(\lim_{j \to \infty} \left(\cos(k!\pi x)^{2j} \right) \right)$$

로 정의했었다.

개념 응용하기

15. 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 연속이고 임의의 $x \in [0, 1]$에 대하여 $f(x) \in \mathbb{Q}$이면 f는 상수함수임을 증명하여라.

16. 양수 a, b에 대하여 다음을 증명하여라. (단, [ ]는 최대정수함수를 의미한다.)

(1) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$ (2) $\lim_{x \to 0+} \left[\dfrac{x}{a}\right]\dfrac{b}{x} = 0$

17. 다음과 같이 정의된 함수 f가 연속인지, 그리고 주어진 정의역에서 균등연속인지 판별하여라. (단, [ ]는 최대정수함수를 의미한다.)

(1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x < 1 \\ x^3 & \text{if } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{if } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{if } 0 \le x < 2 \end{cases}$

(3) $f(x) = x - [x] \quad (x \in \mathbb{R})$ (4) $f(x) = x + [-x] \quad (x \in \mathbb{R})$

18. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 연속이고 임의의 유리수 q에 대하여 $f(q) = 2$를 만족시킨다고 하자. 이때 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = 2$임을 증명하여라.

19. 함수 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$가 0에서 연속이고 임의의 $x \in (-1, 1)$에 대하여 $f(x) = f(x^2)$을 만족시키면 f는 $(-1, 1)$에서 상수함수임을 증명하여라.

20. I가 공집합이 아닌 닫힌구간이고 함수 $f : I \to I$가 연속이면 $f(p) = p$인 점 $p \in I$가 존재함을 보여라. 또한 여기서 I가 구간이라는 조건이 빠지면 어떻게 되는지 설명하여라.

21. 함수 f가 다음과 같이 주어졌을 때 f는 오직 한 점에서만 연속임을 증명하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ 2-x & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

22. 두 함수 f, g가 연속일 때 다음과 같이 정의된 함수 h가 연속임을 증명하여라.

(1) $h(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$ (2) $h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$

23. 함수 f가 두 구간 I_1과 I_2에서 각각 균등연속이고 $I_1\cap I_2\neq\varnothing$라고 하자.

(1) f가 $I_1\cup I_2$에서 균등연속임을 증명하여라.

(2) I_1과 I_2가 구간이라는 조건이 빠져도 f가 $I_1\cup I_2$에서 균등연속이 되는지 판별하여라.

(3) $I_1\cap I_2\neq\varnothing$이라는 조건이 빠져도 f가 $I_1\cup I_2$에서 균등연속이 되는지 판별하여라.

24. 함수 f가 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$으로 정의된 다항함수라고 하자. 만약 m이 짝수이고 $a_m a_0<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 두 개 이상의 서로 다른 실근을 가짐을 보여라.

25. 모든 항이 양수인 유리수열 $\{q_n\}$이 양의 무리수 α에 수렴한다고 하자. q_n을 분모와 분자가 자연수인 기약분수로 나타냈을 때 분모를 r_n, 분자를 s_n이라고 하면 $\{r_n\}$과 $\{s_n\}$은 각각 양의 무한대로 발산함을 증명하여라.

26. E가 닫힌집합이라고 하자. 함수 f가 E에서 연속일 필요충분조건은 모든 항이 E에 속하는 임의의 코시 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\{f(x_n)\}$이 코시 수열이 되는 것임을 증명하여라.

27. 다음 각 경우에 대하여 정리 4.4.6을 증명하여라.

(1) $a=+\infty$, $L\in\mathbb{R}$인 경우 (2) $a=-\infty$, $L=+\infty$인 경우

(3) $a\in\mathbb{R}$, $L=+\infty$인 경우 (4) $a\in\mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}$, $x\to a-$인 경우

28. 다음 각 경우에 대하여 정리 4.4.7을 증명하여라.

(1) $a=+\infty$, $L=+\infty$, $M=+\infty$인 경우 (2) $a=-\infty$, $L=+\infty$, $M\in\mathbb{R}$인 경우

(3) $a\in\mathbb{R}$, $L=-\infty$, $M=-\infty$인 경우 (4) $a\in\mathbb{R}$, $L=-\infty$, $M\in\mathbb{R}$인 경우

29. 다음 각 경우에 대하여 정리 4.4.8을 증명하여라.

(1) $a=+\infty$, $L=+\infty$인 경우 (2) $a=-\infty$, $L\in\mathbb{R}$인 경우

(3) $a\in\mathbb{R}$, $M=-\infty$인 경우 (4) $a\in\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{R}$인 경우

30. 함수 f가 a에서 불연속이지만 a에서 f의 좌극한과 우극한이 각각 실수로서 존재하면 'f는 a에서 **단순불연속**이다'라고 말한다. 또한 단순불연속이 아닌 경우 '**제 2 형태의 불연속**이다'라고 말한다. 다음과 같이 정의된 함수 f가 0에서 어떠한 형태의 불연속인지 판별하여라. (단, [ ]는 최대정수함수를 나타낸다.)

(1) $f(x)=[x]$ (2) $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$

(3) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} \tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$

31. 단조함수는 제 2 형태의 불연속점을 갖지 않음을 증명하여라.

32. 함수 f의 정의역이 D이고 f가 $a\in D$에서 불연속이라고 하자. 만약 a에서 f의 함숫값을 바꾸어 정의함으로써 f가 a에서 연속이 되도록 할 수 있으면 a를 f의 **제거 가능한 불연속점**이라고 부른다. f의 불연속점 a가 제거 가능하면 f는 a에서 단순불연속임을 증명하여라.

33. 집합 K가 공집합이 아닐 때 다음 세 명제가 서로 동치임을 증명하여라.
(1) K는 콤팩트집합이다.
(2) K에서 연속인 임의의 함수가 균등연속이다.
(3) K에서 연속인 임의의 함수는 K에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

34. 함수 f의 정의역이 D이고 a가 D의 좌집적점인 동시에 우집적점이라고 하자. 이때 f가 a에서 양의 무한대로 발산할 필요충분조건은 a에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 양의 무한대로 발산하는 것임을 증명하여라.

35. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 균등연속이고 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$임을 증명하여라. 여기서 f가 균등연속이라는 조건을 연속으로 바꾸면 어떻게 되는지 설명하여라.

36. 함수 $f:[0,\ \infty) \to \mathbb{R}$가 연속이고 $x \to +\infty$일 때 $f(x)$가 상수에 수렴하면 f는 $[0,\ \infty)$에서 균등연속임을 증명하여라.

37. $a < b$이고 함수 f가 $[a,\ b]$에서 단조이며 사잇값 성질을 가지면 f는 $[a,\ b]$에서 연속임을 보여라.

38. 함수 f가 $[0,\ \infty)$에서 연속이면 다음과 같이 정의된 함수 g, h도 $[0,\ \infty)$에서 연속임을 보여라.

$$g(x) = \max\{f(t) \mid t \in [0,\ x]\},\quad h(x) = \min\{f(t) \mid t \in [0,\ x]\}$$

39. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속이고 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$이라고 하자. 이때 f는 $\mathbb{R}$에서 유계임을 증명하여라. 또한 f는 $\mathbb{R}$에서 최댓값 또는 최솟값을 가짐을 보여라.

실력 다지기

40. 함수 f가 단조이고 정의역이 자연수 집합을 포함하며 수열 $\{f(n)\}$이 수렴하면 f는 양의 무한대에서 수렴함을 증명하여라. 이것을 일반화하여 함수 f가 단조이고 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 수열이며 f의 정의역이 $\{a_n\}$을 포함하고 $\{f(a_n)\}$이 수렴하면 f는 양의 무한대에서 수렴함을 증명하여라.

41. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속일 필요충분조건은 임의의 열린구간의 역상이 열린집합인 것임을 증명하여라.

42. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속이고 집합 임의의 정수 n, k에 대하여 $f(2^n k) = 0$을 만족시키면 f는 상수함수임을 증명하여라.

43. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 0에서 연속이고 임의의 실수 a, b에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$가 성립한다고 하자. 이때 실수 k가 존재하여 임의의 x에 대하여 $f(x) = kx$를 만족시킴을 증명하여라.

44. 함수 $f:D \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 세 명제가 동치임을 증명하여라.
(1) f가 D에서 연속이다.
(2) D의 임의의 부분집합 E에 대하여 $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$이다.
(3) D의 임의의 닫힌부분집합 F에 대하여 $f^{-1}(F)$가 닫힌집합이다.

45. 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속이고 임의의 정수 m, k에 대하여 $f(m + k\sqrt{2}) = 0$이면 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = 0$임을 증명하여라.

46. 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 가 단조라고 하자.

(1) $[0,\ 1]$에서 f가 불연속인 점들의 집합이 가산집합임을 증명하여라.

(2) $\mathbb{R}$ 에서 f가 불연속인 점들의 집합이 가산집합임을 증명하여라.

47. 함수 f가 $(0,\ 1)$에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m} & \text{if } x=\dfrac{n}{m}\ :\text{irreducible},\ m\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

이때 f가 $(0,\ 1)$의 유리수인 점에서는 불연속이고 무리수인 점에서는 연속임을 증명하여라. 이러한 함수를 **토마에 함수**(Thomae function) 또는 **팝콘 함수**라고 부른다.

48. 함수 f가 열린집합 D에서 정의되었고 $a\in D$라고 하자. 이때 a에서 f가 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여

$$(x_1\in B_\delta'(a)\cap D,\ x_2\in B_\delta'(a)\cap D)\quad\rightarrow\quad|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

이 성립하는 것임을 증명하여라. 이것을 **함수의 점 극한의 코시 조건**이라고 부른다.

49. 함수 f의 정의역 D가 위로 유계가 아니라고 하자. 이때 양의 무한대에서 f가 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여

$$(x_1>X,\ x_2>X,\ x_1\in D,\ x_2\in D)\quad\rightarrow\quad|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

이 성립하는 것임을 증명하여라. 이것을 **함수의 무한대 극한의 코시 조건**이라고 부른다.

50. 함수 f가 $(0,\ \infty)$에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}m & \text{if } x=\dfrac{n}{m}\ :\text{irreducible},\ m\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

이때 f는 $(0,\ \infty)$에 포함되는 공집합이 아닌 임의의 열린구간에서 유계가 아님을 증명하여라.

51. E가 공집합이 아닌 닫힌집합이고 함수 $f:E\rightarrow E$가 주어졌다고 하자. 만약 1보다 작은 양수 q가 존재하여 E의 임의의 점 $x,\ y$에 대하여 $|f(x)-f(y)|\le q|x-y|$를 만족시키면 f를 **축약함수**(contraction mapping)라고 부른다.

(1) f가 E에서 균등연속임을 보여라.

(2) $p=f(p)$를 만족시키는 점 p가 E에 유일하게 존재함을 증명하여라. 이러한 점 p를 **부동점**(fixed point)이라고 부르며, 이 명제를 **바나흐**(Banach)**의 부동점 정리**라고 부른다.

52. 실수 집합의 부분집합 E가 구간일 필요충분조건은 $x\in E,\ y\in E,\ x<z<y$일 때마다 $z\in E$가 성립하는 것임을 증명하여라.

53. 실수 집합의 부분집합 E에 대하여 서로소인 두 열린집합 $A,\ B$가 존재하여 $E\cap A$와 $E\cap B$가 각각 공집합이 아니고 $E\subseteq A\cup B$를 만족시키면 E를 **비연결집합**이라고 부른다. 또한 비연결집합이 아닌 집합을 **연결집합**이라고 부른다.

(1) 실수 집합의 부분집합 E가 연결집합일 필요충분조건은 E가 구간인 것임을 증명하여라.

(2) E가 연결집합이고 $f:E\rightarrow\mathbb{R}$ 가 연속함수이면 $f(E)$도 연결집합임을 증명하여라.

(3) 위 (1), (2)를 이용하여 연속함수의 사잇값 정리(4.3.17)를 증명하여라.

54. $a<b$이고 함수 $f:[a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이라고 하자. 이때 f가 $[a, b]$에서 단조일 필요충분조건은 임의의 연결집합 E에 대하여 $f^{-1}(E)$가 연결집합인 것임을 증명하여라.

55. 함수 $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$가 연속이고 α가 실수이며

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x+1)-f(x))=\alpha$$

이면 $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha$임을 증명하여라.

56. 함수 $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$가 일대일대응이면 f가 불연속인 점의 개수가 무한임을 증명하여라.

도약하기

57. 거리공간에서 수열의 극한을 어떻게 정의하는지 찾아보자.

58. 수열 $\{a_n\}$을 (a_n)으로 나타내는 경우가 있다. 그 이유를 조사해 보자.

59. 위상수학에서 수열의 극한을 어떻게 정의하는지 찾아보고 정의 3.1.18과 비교해보자.

60. 위상수학에서 그물(net)의 정의를 살펴보고 수열의 정의와 비교해보자.

61. 수열을 귀납적으로 정의한다는 것의 의미를 조사해보자.

62. 컴퓨터공학에서 자료구조의 단순연결 리스트의 개념을 조사하고 이것이 수열의 귀납적 정의와 어떠한 관계가 있는지 살펴보자.

63. 피보나치(Fibonacci) 수열에 대하여 조사해보자.

64. 우리손의 보조정리(Urysohn's lemma)와 띠즈의 확장 정리(Tietze's extention theorem)를 찾아보자.

65. 위상수학에서 연속의 정의를 살펴보고 정리 4.3.4와 비교해보자.

66. 거리공간에서 연결집합의 정의와 사잇값 정리를 찾아보자.

67. 거리공간에서 함수의 극한과 연속의 정의를 찾아보자.

68. 수학자 디리끌레(Dirichlet)에 대하여 조사하고 디리끌레가 모든 점에서 불연속인 함수를 생각하게 된 계기를 알아보자.

69. 함수의 점 극한의 개념과 수열의 극한의 개념을 비교하고 공통점과 차이점을 서술하여라.

70. 고등학교에서 배우는 연속의 정의와 해석학에서 배우는 연속의 정의를 비교하고 공통점과 차이점을 서술하여라.

71. 한 중학생이 당신에게 "원은 무한히 작은 선분을 무한히 많이 연결하여 만들 수 있기 때문에 원도 다각형이다"라고 말한다면 당신은 그 학생에게 무엇이라고 대답하겠는가? ["정말 기특하구나!" 같은 대답 말고.]

72. 유리수인 점에서는 1, 무리수인 점에서는 0의 값을 갖는 함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$가 모든 점에서 불연속임을 고등학교 3학년 학생에게 설명하려고 한다. 적절한 설명 방법을 고안해 보아라.

생각 넓히기 유클리드 거리공간

우리는 지금까지 실수계를 정의하고 실수 집합 위에서 수열의 극한과 함수의 극한을 살펴보았다. 이러한 극한의 개념은 유클리드 공간에서도 다룰 수 있다.

d가 자연수일 때, $\mathbb{R}^d$의 원소 $\mathbf{x}=(x_k)$, $\mathbf{y}=(y_k)$에 대하여 합과 차를 차례대로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} := (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ \cdots,\ x_d+y_d),$$
$$\mathbf{x}-\mathbf{y} := (x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ x_3-y_3,\ \cdots,\ x_d-y_d).$$

또한 $\mathbb{R}^d$의 원소 $\mathbf{x}=(x_k)$에 대하여 $\mathbf{x}$의 **유클리드 노름**을 다음과 같이 정의한다.

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2}.$$

$\mathbb{R}^d$에서 유클리드 노름은 $\mathbb{R}$에서의 절댓값과 같은 역할을 한다. 따라서 $\mathbb{R}^d$에서 두 원소 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 사이의 거리는 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$로 정의된다. 이와 같은 관점에서 $\mathbb{R}^d$를 **유클리드 거리공간**이라고 부른다.

$\mathbb{R}^d$에서 열린집합과 닫힌집합은 실수계에서와 마찬가지로 정의할 수 있다.

$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$이고 $r>0$일 때 중심이 $\mathbf{x}$이고 반지름이 r인 **열린구**를 $B_r(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<r\}$로 정의한다. 그리고 $G\subseteq\mathbb{R}^d$일 때, 점 $\mathbf{x}$가 G의 **내점**이라는 것은 $B_r(\mathbf{x})\subseteq G$인 양수 r가 존재하는 것으로 정의한다. G, E, F가 $\mathbb{R}^d$의 부분집합이라고 하자. G가 **열린집합**이라는 것은 G의 모든 원소가 G의 내점이라는 것을 뜻하며, F가 **닫힌집합**이라는 것은 $\mathbb{R}^d\setminus F$가 $\mathbb{R}^d$에서 열린집합이라는 것을 뜻한다. 또한 $\mathbf{x}$가 E의 **집적점**이라는 것은 임의의 양수 r에 대하여 $E\cap B_r(\mathbf{x})\neq\varnothing$인 것을 뜻한다.

$\mathbb{R}^d$에서 수열의 극한과 함수의 극한 또한 다음과 같이 자연스럽게 정의할 수 있다.

$\mathrm{L}\in\mathbb{R}^d$라고 하자. $\{\mathbf{x}_n\}$이 $\mathbb{R}^d$의 수열일 때, **$\{\mathbf{x}_n\}$이 L에 수렴한다**는 것은

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} : (n>N \to \|\mathbf{x}_n-\mathrm{L}\|<\epsilon)$$

을 만족시키는 것을 뜻한다. 이번에는 p가 자연수이고 f가 $\mathbb{R}^p$의 부분집합 D로부터 $\mathbb{R}^d$로의 함수이며 a가 D의 집적점이라고 하자. 이때 **f가 a에서 L에 수렴한다**는 것은

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\mathbf{x}\in D : (0<\|\mathbf{x}-\mathrm{a}\|<\delta \to \|\mathrm{f}(\mathbf{x})-\mathrm{L}\|<\epsilon)$$

을 만족시키는 것을 뜻한다. a가 D의 원소일 때, a에서 f가 연속이라는 것은

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\mathbf{x}\in D : (\|\mathbf{x}-\mathrm{a}\|<\delta \to \|\mathrm{f}(\mathbf{x})-\mathrm{f}(\mathrm{a})\|<\epsilon)$$

을 만족시키는 것을 뜻한다.

임의의 복소수 z에 대하여 실수 a, b가 존재하여 $z=a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 복소수 z를 순서쌍 $(a,\ b)$에 대응시키면 $\mathbb{C}$를 $\mathbb{R}^2$와 같은 구조를 가진 집합으로 생각할 수 있다. 그러므로 복소수 집합에서 열린집합, 수열의 극한, 함수의 극한을 다룰 때에는 유클리드 거리공간에서 도입한 개념을 그대로 사용할 수 있다.

독자는 이와 같은 정의를 바탕으로 이 책의 2~4장에 소개된 정리를 유클리드 공간으로 확장해보기 바란다.

05
실함수의 미분

함수 f의 그래프가 매끄러우면 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 그래프에 접하는 직선은 유일하게 존재한다. 평면 위에서는 지나는 한 점과 기울기를 알면 직선의 방정식을 구할 수 있으므로 $(a,\ f(a))$에서 f의 그래프의 기울기를 알아낼 수 있다면 그 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. 이때 f의 그래프의 기울기는 평균변화율에 극한을 취한 순간변화율의 개념을 도입하여 구할 수 있다.

순간변화율은 단순히 그래프의 기울기로서의 의미를 가질 뿐만 아니라 함수의 변화와 관련하여 함수의 성질을 밝히는 데에 많은 역할을 한다.

이 장에서는 실함수의 미분법과 그에 관련된 여러 가지 성질을 살펴본다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 미분 가능한 실함수의 도함수를 구할 수 있다.
- 실함수의 미분과 관련된 기본 성질을 증명할 수 있다.
- 평균값 정리를 이용하여 미분 가능한 실함수의 그래프의 성질을 밝힐 수 있다.
- 테일러의 정리를 이용하여 테일러 다항식을 구하고 함숫값의 근삿값을 구할 수 있다.
- 로피탈의 법칙을 이용하여 부정형 극한을 구할 수 있다.
- 볼록함수의 정의를 말하고 그 성질을 설명할 수 있다.

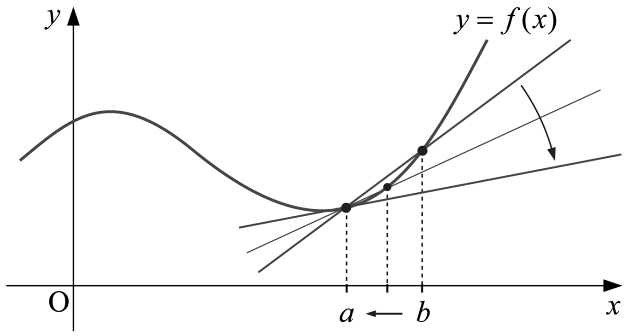
5.1 미분계수와 도함수

함수 $f : D \to \mathbb{R}$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 $y = f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 기울기를 구해보자. 정의역의 원소 b에 대하여 $a \neq b$일 때

$$t := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 선분의 기울기가 된다. 이때 t를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 $f(x)$의 **평균변화율**이라고 부른다. $\Delta y := f(b) - f(a)$, $\Delta x := b - a$라고 하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



여기서 b를 a에 접근시키면 Δx의 값은 0에 가까워지고, t의 값은 점 $(a,\ f(a))$에서 함수의 그래프에 접하는 직선의 기울기에 가까워진다. 따라서 극한 개념을 이용하면 접선의 기울기는

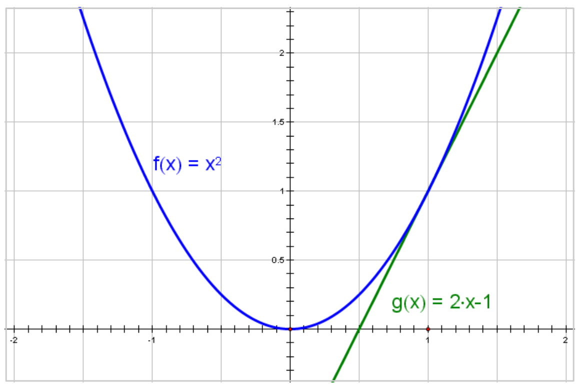
$$T := \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 된다. 이 값을 a에서 f의 **순간변화율**이라고 부른다.

보기 5.1.1 $f(x) := x^2$, $a := 1$일 때 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a)) = (1,\ 1)$에서 접선의 기울기는

$$T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = 2$$

이다. 실제로 그래프 소프트웨어를 이용하여 함수 $y=x^2$의 그래프를 그려보면 점 $(1,\ 1)$에서 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 접하는 것을 볼 수 있다.



□

이러한 개념을 바탕으로 미분을 정의한다.

정의 5.1.2 미분

실함수 $f : D \to \mathbb{R}$가 점 $a \in D$에서 **미분 가능하다**(differentiable)는 것은 극한

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

가 수렴하는 것을 의미한다. 이 극한을 a에서 f의 **미분계수**(derivative)라고 부르며 $f'(a)$ 또는 $Df(a)$로 나타낸다. ['계수'라는 이름이 붙은 이유를 생각해보자.]

함수 f가 E의 각 점에서 미분 가능하면 f'은 E에서의 함수가 된다. 이때 f'을 f의 **도함수**(derivative function)라고 부른다. f의 도함수 f'을

$$Df, \quad \frac{df}{dx} \quad \text{또는} \quad f^{(1)}$$

로 나타내기도 한다. 또한 $y=f(x)$일 때에는 f'을

$$y' \quad \text{또는} \quad \frac{dy}{dx}$$

로 나타내기도 한다.

함수 f의 도함수 f'을 미분한 함수 f''을 **이계도함수**라고 부른다. 즉 f''은 f를 두 번 미분한 것이다. 마찬가지로 f를 n번 미분한 함수를 **n계도함수**라고 부르며

$$D^n f, \quad \frac{d^n f}{(dx)^n} \quad \text{또는} \quad f^{(n)}$$

으로 나타낸다. $y=f(x)$일 때에는 f의 n계도함수를

$$y^{(n)} \quad \text{또는} \quad \frac{d^n y}{(dx)^n}$$

로 나타내기도 한다. 사실 n계도함수는 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$$

극한에서 좌극한과 우극한을 생각한 것처럼 미분계수도 좌미분계수와 우미분계수를 생각할 수 있다.

정의 5.1.3 | 한방향 미분계수

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 점 $a \in D$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) a에서 f의 **좌미분계수** : $D_L f(a) := f_l'(a) := \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(ii) a에서 f의 **우미분계수** : $D_R f(a) := f_r'(a) := \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

극한의 정의에 의하면 $a<b$일 때 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$에 대하여

$$f'(a) := f_r'(a), \quad f'(b) := f_l'(b)$$

이다. 즉 구간의 왼쪽 끝점에서의 미분계수는 우미분계수로 정의되며, 구간의 오른쪽 끝점에서의 미분계수는 좌미분계수로 정의된다.

한방향 극한의 성질(정리 4.1.14)에 의하여 다음을 얻는다.

함수 $f : D \to \mathbb{R}$와 점 $a \in D$, 실수 T가 주어졌다고 하자. 그리고 a가 D의 좌집적점이면서 우집적점이라고 하자. 이때 $f'(a)=T$일 필요충분조건은 $f_l'(a)=f_r'(a)=T$인 것이다.

미분 가능성을 정의하는 방법을 두 가지 더 살펴보자. 먼저

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad x \neq a \tag{2}$$

로 정의된 평균변화율함수를 이용하는 방법이다.

정리 5.1.4 평균변화율함수를 이용한 미분계수의 정의

함수 $f: D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 미분 가능할 필요충분조건은 함수 $F: D \to \mathbb{R}$가 존재하여 F는 a에서 연속이고 임의의 $x \in D$에 대하여

$$f(x)=F(x)(x-a)+f(a) \tag{3}$$

를 만족시키는 것이다. 이때 $F(a)=f'(a)$가 된다.

증명 함수 f가 a에서 미분 가능하다고 하자. 그러면 극한 (1)이 $f'(a)$로서 존재한다. $x \neq a$일 때에는 $F(x)$를 (2)로 정의하고, $x=a$일 때에는 $F(a) \coloneqq f'(a)$라고 하자. 그러면 임의의 $x \in D$에 대하여 (3)이 성립하고 F는 a에서 연속이다.

역으로 (3)이 성립한다고 하자. 그러면 $x \in D \setminus \{a\}$에 대하여 (2)가 성립한다. F는 a에서 연속이므로 (2)에 $x \to a$인 극한을 취하면 $F(a)=f'(a)$를 얻는다. ■

따름정리 5.1.5 함수 $f: D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 미분 가능하면 f는 a에서 연속이다.

증명 f가 a에서 미분 가능하면 정리 5.1.4를 만족시키는 함수 F가 존재한다. 이때

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a}\{F(x)(x-a)+f(a)\}=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$

이므로 f는 a에서 연속이다. ■

다음으로는 일차근사식을 이용하는 방법이다. 즉 미분 가능한 함수는 미분 가능한 점 주변에서 일차함수와 비슷하다는 것이다.

정리 5.1.6 일차근사식을 이용한 미분계수의 정의

함수 $f: D \to \mathbb{R}$가 $a \in D$에서 미분 가능할 필요충분조건은 $T(x)=mx$ 꼴의 선형함수 T가 존재하여

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}=0 \tag{4}$$

을 만족시키는 것이다.

증명 f가 a에서 미분 가능하다고 하자. $m \coloneqq f'(a)$, $T(x) \coloneqq mx$라고 하면 (1)에 의하여 $h \to 0$일 때

$$\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) \to 0$$

을 얻는다. 역으로 $T(x) \coloneqq mx$로 정의된 함수 T에 대하여 (4)가 성립한다고 하자. 그러면 $h \neq 0$일 때

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m+\frac{f(a+h)-f(a)-mh}{h}=m+\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}$$

가 성립한다. 여기에 $h \to 0$인 극한을 취하면 $f'(a)=m$을 얻는다. ■

참고 5.1.7 일반적으로 따름정리 5.1.5의 역은 성립하지 않는다. 즉 함수 f가 미분 가능한 점에서 연속이지만 연속인 점에서 항상 미분 가능한 것은 아니다. 예컨대 $f(x) \coloneqq |x|$라고 하면 f는 0에서 연속이지만 미분 불가능하다.

한편 f는 $I_1 \coloneqq (-\infty, 0]$에서 미분 가능하고 $I_2 \coloneqq [0, \infty)$에서 미분 가능하지만 $I_1 \cup I_2$에서는 미분 가능하지 않다. 즉 함수가 두 집합 위에서 각각 미분 가능하더라도 그들의 합집합 위에서는 미분 가능하지 않을 수 있다. □

참고 5.1.8 함수 f가 미분 가능하다고 해서 그 점에서 f'이 연속이 되는 것은 아니다. 예를 들어

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

으로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 주어졌다고 하자. 그러면 $x \neq 0$일 때

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{그리고} \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

이다. 즉 f는 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하다. 그러나

$$\overline{\lim_{x \to 0}} f'(x) = 1, \quad \underline{\lim_{x \to 0}} f'(x) = -1$$

이므로 f'은 0에서 연속이 아니다. □

I가 길이가 양수인 구간이고 n이 자연수라고 하자. 이때 I에서 연속인 함수들의 모임을 $C(I)$ 또는 $C^0(I)$로 나타낸다. 그리고 I의 모든 점에서 n번 미분 가능한 실함수들의 모임을 $D^n(I)$로 나타내며, $D^n(I)$에 속하는 함수 중에서 n계도함수가 I에서 연속인 함수들을 $C^n(I)$로 나타낸다. 즉

- $D^n(I) \coloneqq \{f \in \mathbb{R}^I \mid f^{(n)} \text{ exists on } I\}$
- $C^n(I) \coloneqq \{f \in \mathbb{R}^I \mid f^{(n)} \text{ exists and is continuous on } I\}$

로 정의한다. 또한 임의의 n에 대하여 $C^n(I)$에 속하는 함수들의 모임을 $C^\infty(I)$로 나타낸다. 즉

$$C^\infty(I) \coloneqq \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \in C^n(I) \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$$

으로 정의한다. $f \in C^n(I)$일 때 'f는 I에서 **연속적으로 n번 미분 가능하다**' 또는 'f는 I에서 **C^n급이다**'라고 말하며, 특히 $f \in C^1(I)$일 때 'f는 I에서 **연속적으로 미분 가능하다**(continuously differentiable)'라고 말한다. I를 구간으로 나타낼 때에는 괄호를 생략하여 나타낸다. 예를 들어 $C^1([a, b])$는 간단히 $C^1[a, b]$로 나타낸다.

참고 5.1.9 참고 5.1.8에 의하여 $C^n(I) \subsetneq D^n(I)$임을 알 수 있다. 또한 따름정리 5.1.5에 의하여 $m > n$일 때

$$C^\infty(I) \subsetneq C^m(I) \subsetneq C^n(I)$$

임을 알 수 있다. ('임의의 횟수로 미분 가능하다'보다 더 강한 조건으로 '해석적'이라는 조건을 생각할 수 있다. 이와 관련하여 참고 8.5.4를 보기 바란다.) □

5.2 미분의 계산

극한의 성질을 이용하면 유용한 미분 공식을 유도할 수 있다.

정리 5.2.1 함수의 사칙계산과 미분의 관계

두 함수 f, g가 미분 가능하고 $\alpha \in \mathbb{R}$ 라고 하자. 그러면 $f+g$, αf, fg도 미분 가능하다. 또한 $g \neq 0$인 점에서 f/g도 미분 가능하다. 더욱이 다음이 성립한다.

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (합 법칙)

(ii) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ (동차 법칙)

(iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (곱 법칙)

(iv) $(f/g)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (몫 법칙)

증명 미분의 정의와 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x), \\
(\alpha f)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} = \alpha \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f'(x), \\
(fg)'(x) &= \lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] \\
&= \left[\lim_{h \to 0} f(x+h) \right] \left[\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] + \left[\lim_{h \to 0} g(x) \right] \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).
\end{aligned}
$$

또한 $g(x) \neq 0$일 때 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
(f/g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{\left[\lim_{h \to 0} g(x) \right] \left[\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] - \left[\lim_{h \to 0} f(x) \right] \left[\lim_{h \to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \right]}{\left[\lim_{h \to 0} g(x+h) \right] \left[\lim_{h \to 0} g(x) \right]} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}
$$

■

참고 5.2.2 정리 5.2.1과 정리 4.3.6에 의하면 집합 E와 자연수 n에 대하여 $D^n(E)$, $C^n(E)$는 각각 벡터 공간이다. 또한 함수 f, g와 실수 α에 대하여

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g), \quad \frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{d}{dx}(f)$$

가 성립하므로 미분은 $D^n(E)$와 $C^n(E)$ 위에서의 선형사상이다. □

참고 5.2.3 미분의 곱 법칙을 n계도함수로 확장하면 다음 공식을 얻는다.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, f^{(k)} g^{(n-k)},\ \ n \in \mathbb{N}$$

이 공식을 **라이프니츠의 법칙**(Leibniz's rule)이라고 부른다. 이 공식은 n에 대한 수학적 귀납법과 이항계수의 성질을 이용하면 증명된다. □

보기 5.2.4 n이 2 이상인 자연수이고 $f(x)=x^n$이면 f는 미분 가능하고 $f'(x)=nx^{n-1}$이다.

증명 수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $n=2$일 때 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x^1$$

이제 k가 2 이상인 자연수이고 $n=k$일 때 x^k의 도함수가 kx^{k-1}이 된다고 가정하자.
$f(x)=x^{k+1}$이라고 하면 정리 5.2.1-(iii)에 의하여

$$f'(x)=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot x'=kx^{k-1}\cdot x+x^k=(k+1)x^k$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 정리의 등식이 성립한다. 따라서 2 이상인 임의의 자연수 n에 대하여 정리의 등식이 성립한다. □

위 보기에서 $n\ge 2$라고 제한한 이유는 $n=1$이면 $x=0$일 때 우변에 0^0이 나타나기 때문이다. 만약 $0^0=1$이라고 하면 n이 자연수이고 x가 실수이며 $f(x)=x^n$일 때 $f'(x)=nx^{n-1}$이라고 할 수 있다.

정리 5.2.5 | 연쇄 법칙(chain rule)

함수 $f:A\to B$와 $g:B\to C$가 주어졌다고 하자. 만약 f가 $a\in A$에서 미분 가능하고 $b=f(a)$이며 g가 b에서 미분 가능하면 합성함수 $g\circ f$는 a에서 미분 가능하고 $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$가 성립한다.

증명 함수 g가 b에서 미분 가능하므로 함수 η를 다음과 같이 정의하면 η는 연속함수이다.

$$\eta(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}-g'(b) & \text{if } y\neq b \\ 0 & \text{if } y=b \end{cases}$$

$y=f(x)$라고 하면

$$(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)=g(f(x))-g(f(a))=g(y)-g(b)=g'(b)(y-b)+(y-b)\eta(y)$$

를 얻는다. 그런데 η는 b에서 연속이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\left[g'(f(a))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\eta(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\\ &=g'(f(a))\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\eta(b)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &=g'(f(a))f'(a).\end{aligned}$$

■

참고 5.2.6 $y=f(x)$, $z=g(y)$일 때 라이프니츠 표기법에 따라 연쇄 법칙을 나타내면

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

이다. 그러나 이 등식이 연쇄 법칙의 직접적인 증명이 되는 것은 아니다. 왜냐하면 f가 상수함수인 경우 $dy\equiv 0$이 되는데, 이 경우 위 식에서 분수식의 분모가 0이 되기 때문이다. 따라서 위와 같은 표현은 단지 표현 형태로서만 의미를 가진다. □

정리 5.2.7 역함수의 미분

함수 f가 $I=(a,\ b)$에서 연속이고 미분 가능하며 순증가한다고 하자. 그리고 g를 f의 역함수라고 하자. 만약 $c\in I$에 대하여 $f'(c)\neq 0$이면 g는 $f(c)$에서 미분 가능하고

$$g'(f(c))=\frac{1}{f'(c)}$$

이 성립한다. f가 I에서 순감소하는 경우에도 마찬가지로 성립한다.

증명 수열 $\{y_n\}$이 $f(c)$에 수렴하고 $y_n\neq f(c)$이며 $y_n\in f(I)$인 임의의 수열이라고 하자. f는 I에서 일대일대응이므로 각 n에 대하여 $y_n=f(x_n)$인 점 $x_n\in I$가 유일하게 존재한다. g가 연속이므로 $\{x_n\}$은 c에 수렴한다. 이때 극한의 수열 판정법에 의하여 다음을 얻는다.

$$g'(f(c))=\lim_{n\to\infty}\frac{g(y_n)-g(f(c))}{y_n-c}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-c}{f(x_n)-f(c)}=\frac{1}{f'(c)} \qquad ■$$

보기 5.2.8 m이 음의 정수이고 $f(x)=x^m$이면 f는 미분 가능하고 $f'(x)=mx^{m-1}$이다.

증명 $n=-m$이라고 하면 n은 자연수이므로 보기 5.2.4에 의하여 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^m=\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}=mx^{m-1}. \qquad □$$

보기 5.2.9 r가 0이 아닌 유리수이고 $f(x)=x^r$이면 f는 $(0,\ \infty)$에서 미분 가능하고 $f'(x)=rx^{r-1}$이다.

증명 정수 m, n에 대하여 $r=m/n$이고 $n>0$이라고 하자. 또한 $h(x)=x^n$, $g(x)=x^m$이라고 하자. 그러면 $(0,\ \infty)$에서 h는 증가함수이므로 정리 5.2.7에 의하여 역함수 h^{-1}는 $(0,\ \infty)$에서 미분 가능하다. 또한 $f=g\circ h^{-1}$이므로 f도 $(0,\ \infty)$에서 미분 가능하다.

등식 $f(x)=x^{m/n}$의 양변을 n제곱하면

$$(f(x))^n=x^m$$

이며, 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 연쇄 법칙과 보기 5.2.8에 의하여

$$n(f(x))^{n-1}f'(x)=mx^{m-1}$$

을 얻는다. 이 등식을 $f'(x)$에 대하여 풀면 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\frac{mx^{m-1}}{n(f(x))^{n-1}}=\frac{mx^{m-1}}{n(x^{m/n})^{n-1}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1} \qquad □$$

5.3 평균값 정리

미분계수는 기하학적으로는 그래프에 접하는 직선의 기울기이다. 따라서 미분을 이용하면 함수의 그래프와 관련된 여러 가지 성질을 알아낼 수 있다.

정의 5.3.1 | 함수의 극값

함수 f의 정의역이 D이고 $c \in D$라고 하자.

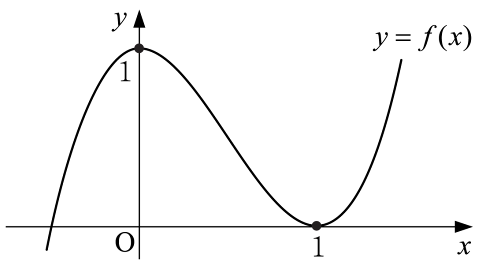
(i) 만약 c의 열린근방 U가 존재하여 $x \in U \cap D$일 때마다 $f(x) \le f(c)$가 성립하면 'f는 **c에서 극댓값 $f(c)$를 가진다**'라고 말한다.

(ii) 만약 c의 열린근방 U가 존재하여 $x \in U \cap D$일 때마다 $f(x) \ge f(c)$가 성립하면 'f는 **c에서 극솟값 $f(c)$를 가진다**'라고 말한다.

(iii) 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 부른다.

정의에 의하면 최댓값은 극댓값이고 최솟값은 극솟값이다.

보기 5.3.2 $f(x) \coloneqq 2x^3 - 3x^2 + 1$로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 그래프는 다음과 같다.



이때 f는 $\mathbb{R}$에서 최댓값이나 최솟값을 갖지 않는다. 그러나 열린구간 $(-1, 1)$에서는 최댓값 1을 가진다. 즉 f는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=1$을 가진다. 또한 f는 $(0, 2)$에서 최솟값 0을 가진다. 즉 f는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=0$을 가진다. □

보조정리 5.3.3 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 $c \in (a, b)$에서 극값을 가지며 미분 가능하면 $f'(c) = 0$이다.

증명 일반성을 잃지 않고 f가 c에서 극댓값을 가진다고 하자. 그러면 양수 δ가 존재하여 $x \in B_\delta(c)$일 때마다 $f(x) \le f(c)$가 성립한다. 즉 $|h| < \delta$이고 $c+h \in (a, b)$일 때마다 $f(c+h) - f(c) \le 0$이 성립한다. 따라서

$$0 < h < \delta \text{일 때 } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0 \text{이고, } -\delta < h < 0 \text{일 때 } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$$

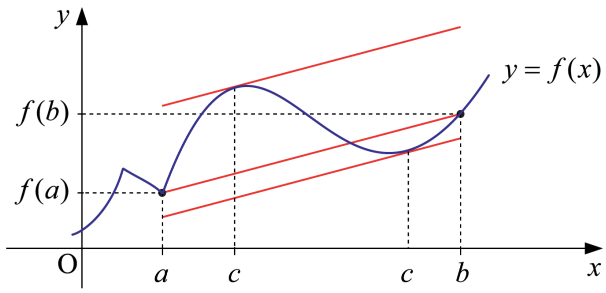
이므로

$$f_r'(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0 \quad \text{그리고} \quad f_l'(c) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$$

이다. 그런데 f는 c에서 미분 가능하므로 $f'(c) = f_l'(c) = f_r'(c)$이다. 따라서 $f'(c) = 0$이다. ■

참고 5.3.4 정리 5.3.3의 역은 성립하지 않는다. 즉 $f'(c)=0$일지라도 f는 c에서 극값을 갖지 않을 수도 있다. 예를 들어 $f(x) := x^3$으로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여 $f'(0)=0$이지만 f는 0에서 극값을 갖지 않는다. 또한 $g(x)=|x|$로 정의된 함수 g는 0에서 미분 가능하지 않지만 극솟값을 가진다. □

함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자. 그리고 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ f(b))$를 잇는 선분을 생각하자. 이 선분을 위쪽과 아래쪽으로 움직이다 보면 f의 그래프와 접할 때가 생긴다.



그때 접하는 점 중 하나를 $(c,\ f(c))$라고 하면

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

가 된다. 특히 c는 $(a,\ b)$에 존재하게 된다. 이 사실을 증명해보자.

보조정리 5.3.5 함수 h가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $h(a)=h(b)$이면 $h'(c)=0$을 만족시키는 점 $c\in(a,\ b)$가 존재한다. 이 명제를 **롤**(Rolle)**의 정리**라고 부른다.

증명 h가 $[a,\ b]$에서 상수함수인 경우는 자명하다. 이제 h가 상수함수가 아니라고 하자. 그리고 $[a,\ b]$에서 h의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하자. 그러면 $M>h(a)$이거나 $m<h(a)$ 중 하나 이상이 성립한다. $M>h(a)$인 경우 $f(c)=M$인 $c\in(a,\ b)$가 존재하는데 이때 h는 c에서 극댓값을 가지므로 보조정리 5.3.3에 의하여 $h'(c)=0$이 된다. $m<h(a)$인 경우 $h(c)=m$인 $c\in(a,\ b)$가 존재하는데 이때 h는 c에서 극솟값을 가지므로 $h'(c)=0$이 된다. ■

정리 5.3.6 | 평균값 정리

함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이며 $a<b$라고 하자.

(i) $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$인 점 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

(ii) 만약 함수 g가 $(a,\ b)$에서 미분 가능하고 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$g'(c)(f(b)-f(a))=f'(c)(g(b)-g(a))$$

인 점 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

증명 (ii) $h(x) := f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$라고 하자. 그러면

$$h'(x)=f'(x)(g(b)-g(a))-g'(x)(f(b)-f(a))$$

이므로 h는 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며 $h(a)=h(b)$이다. 따라서 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$인 점 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

(i) $g(x) := x$라고 하고 (ii)를 이용하면 된다. ■

정리 5.3.6의 (ii)를 **일반화된 평균값 정리** 또는 **코시**(Cauchy)**의 평균값 정리**라고 부르기도 한다. 코시의 평균값 정리는 주로 도함수를 이용하여 두 함수의 차를 비교할 때 사용된다.

정리 5.3.7 | 도함수와 그래프의 기울기

함수 f가 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분 가능하다고 하자.

(i) 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 $f'(x) \geq 0$이면 f는 $[a, b]$에서 증가한다.

(ii) 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 $f'(x) \leq 0$이면 f는 $[a, b]$에서 감소한다.

(iii) 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 $f'(x) > 0$이면 f는 $[a, b]$에서 순증가한다.

(iv) 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 $f'(x) < 0$이면 f는 $[a, b]$에서 순감소한다.

증명 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$라고 하자. f가 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

를 만족시키는 점 $c \in (x_1, x_2)$가 존재한다.

(i) $f'(c) \geq 0$이면 $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$이므로 f는 증가한다.

(ii) $f'(c) \leq 0$이면 $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$이므로 f는 감소한다.

(iii) $f'(c) > 0$이면 $f(x_2) - f(x_1) > 0$이므로 f는 순증가한다.

(iv) $f'(c) < 0$이면 $f(x_2) - f(x_1) < 0$이므로 f는 순감소한다. ■

따름정리 5.3.8 함수 f가 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분 가능하며 $f' = 0$이면 f는 $[a, b]$에서 상수 함수이다.

증명 $x \in (a, b]$라고 하자. $f' \geq 0$이므로 정리 5.3.7에 의하여 $f(x) - f(a) \geq 0$이다. 또한 $f' \leq 0$이므로 정리 5.3.7에 의하여 $f(x) - f(a) \leq 0$이다. 따라서 $f(x) - f(a) = 0$이다. x는 $(a, b]$의 임의의 점이므로 f는 $[a, b]$에서 상수이다. ■

따름정리 5.3.9 두 함수 f, g가 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분 가능하며 $f' = g'$이면 상수 c가 존재하여 임의의 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) = g(x) + c$를 만족시킨다.

증명 $h \coloneqq f - g$라고 하면 h는 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분 가능하며 $h' = 0$이다. 따라서 따름정리 5.3.8에 의하여 h는 $[a, b]$에서 상수함수이다. $h(a) \eqqcolon c$라고 하면 $f(x) = g(x) + c$를 얻는다. ■

따름정리 5.3.10 함수 f가 (a, b)에서 C^1급이고 $c \in (a, b)$이며 $f'(c) \neq 0$이라고 하자. 그러면 c의 열린근방 U가 존재하여 f는 U에서 일대일대응이 되고 역함수 g를 가지며 g는 $f(U)$에서 C^1급이고

$$g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

이 성립한다. 이 정리를 **역함수 정리**(inverse function theorem)라고 부른다.

증명 $f'(c) > 0$인 경우를 증명하자. $\epsilon \coloneqq f'(c)/2$라고 하면 $\epsilon > 0$이므로 양수 δ가 존재하여 $|x - c| < \delta$일 때마다 $|f'(x) - f'(c)| < \epsilon$이 성립한다. 이 식에 $\epsilon = f'(c)/2$를 대입하여 변형하면 $f'(x) > 0$을 얻는다. 즉 f는 $U \coloneqq B_\delta(c)$에서 순증가하므로 일대일대응이다. 따라서 f는 U에서 역함수 g를 가지며, 정리 5.2.7에 의하여 g는 $f(c)$에서 미분 가능하고 정리의 등식이 성립한다. 특히 f'과 f^{-1}이 연속함수이고 $g'(y) = 1/(f'(f^{-1}(y)))$이므로 g'도 연속이다. ■

예제 5.3.11 임의의 양수 x에 대하여 $1+x<e^x$임을 보여라.

풀이 $f(x) \coloneqq e^x - x$라고 하면 $f'(x)=e^x-1$이다. $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 정리 5.3.7에 의하여 f는 $(0,\ \infty)$에서 순증가한다. 따라서 $x>0$일 때 $e^x-x=f(x)>f(0)=1$이 성립한다. □

예제 2.3.5에서 살펴보았던 베르누이 부등식을 지수가 실수인 경우로 확장할 수 있다.

정리 5.3.12 | 베르누이 부등식

$\alpha>0,\ x\geq -1$이라고 하자.

(i) $0<\alpha\leq 1$이면 $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$가 성립한다.

(ii) $\alpha\geq 1$이면 $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$가 성립한다.

풀이 (i) $f(t)\coloneqq t^\alpha,\ t\in[-1,\ \infty)$라고 하자. 그러면 $f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}$이므로 $a=1,\ b=1+x$이라고 두고 평균값 정리를 이용하면 1과 $1+x$ 사이에 c가 존재하여

$$f(1+x)-f(1)=\alpha x c^{\alpha-1} \tag{5}$$

을 만족시킴을 알 수 있다.

만약 $x>0$이면 $c>1$이다. 그런데 $\alpha-1\leq 0$이므로 $c^{\alpha-1}\leq 1$이고 $xc^{\alpha-1}\leq x$이다. 따라서 (5)에 의하여

$$(1+x)^\alpha = f(1+x) = f(1)+\alpha x c^{\alpha-1} \leq f(1)+\alpha x = 1+\alpha x \tag{6}$$

를 얻는다.

만약 $-1\leq x\leq 0$이면 $c\leq 1$이므로 $c^{\alpha-1}\geq 1$이다. 그런데 $x\leq 0$이므로 $xc^{\alpha-1}\leq x$이다. 따라서 같은 방법으로 (6)을 얻는다.

(ii)는 (i)과 같은 방법으로 증명된다. 꼭 직접 증명해보기 바란다. ■

참고 5.3.13 함수 f가 미분 가능한 경우 f'은 항상 **사잇값 성질**을 가진다. 즉 f가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 $f'(a)\neq f'(b)$이며 y_0이 $f'(a)$와 $f'(b)$ 사이의 실수이면 $f'(x_0)=y_0$을 만족시키는 $x_0\in(a,\ b)$가 존재한다. 이 명제를 **다르부**(Darboux)**의 정리**라고 부른다.

증명 일반성을 잃지 않고 $f'(a)<y_0<f'(b)$라고 하자. 그리고 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $F(x)\coloneqq f(x)-y_0 x$라고 하자. 그러면 F는 $[a,\ b]$에서 미분 가능하다. $F'(a)=f'(a)-y_0<0$이므로 F는 a의 근방에서 감소한다. 즉 충분히 작은 양수 h에 대하여 $F(a+h)-F(a)<0$이 성립한다. 따라서 F는 a에서 극솟값을 갖지 않는다. 같은 방법으로 F가 b에서도 극솟값을 갖지 않음을 알 수 있다.

F는 $[a,\ b]$에서 연속이므로 극솟값을 가진다. F가 x_0에서 극솟값을 가진다고 하자. 그러면 $x_0\neq a$, $x_0\neq b$이므로 $x_0\in(a,\ b)$이다. 이때 롤의 정리에 의하여 $F'(x_0)=0$이 성립한다. ■

5.4 테일러의 정리

함수 f가 구간 $(a,\ b)$에서 임의의 횟수로 미분 가능하고 $x_0 \in (a,\ b)$라고 하자. 이때

$$P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

은 점 $(x_0,\ f(x_0))$을 지나고 $y = f(x)$의 그래프에 접하는 직선을 그래프로 갖는 함수가 된다. 이러한 함수를 x_0에서 f의 **일차근사함수**(linear approximation)라고 부른다. x가 x_0에 가까울 때에는 $P_1(x)$와 $f(x)$의 차이가 크지 않지만 x가 x_0으로부터 멀어지면 $P_1(x)$와 $f(x)$의 차이는 커진다.

이번에는 f에 더 근접한 다항함수를 만들어보자. P_1의 경우에는 x_0에서 f와 함숫값이 같고 미분계수도 같다. 이것을 발전시켜 x_0에서 f와 함숫값이 같고 1계, 2계 미분계수가 같은 다항함수 P_2를 만들어보자.

$$P_2(x) = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0$$

이라고 하자. 그러면 $a_0 = P_2(x_0) = f(x_0)$이므로 $a_0 = f(x_0)$을 얻는다. 그리고 $a_1 = P_2{}'(x_0) = f'(x_0)$이므로 $a_1 = f'(x_0)$을 얻는다. 다음으로 $P_2{}''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$이므로 $a_2 = f''(x_0)/2$를 얻는다. 즉

$$P_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

이다. 이 다항함수를 x_0에서 f의 **이차근사함수**라고 부른다.

같은 방법으로 n이 자연수일 때, x_0에서 f와 P_n의 함숫값이 같고 $k \le n$인 임의의 k에 대하여 P_n의 k계 미분계수가 f의 k계 미분계수와 동일한 n차 근사함수 P_n을 만들 수 있다. 즉

$$P_n(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0$$

이라고 하자. $0 \le k \le n$인 정수 k에 대하여 P_n의 k계 도함수 $P_n^{(k)}$에 x_0을 대입하면

$$P_n^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

이다. 이 값은 $f^{(k)}(x_0)$과 같아야 하므로

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

이 성립한다. 즉

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

를 얻는다. 이 다항함수를 x_0에서 f의 **n차 근사함수** 또는 **n차 테일러 다항식**이라고 부른다. x_0과 f를 강조하기 위하여 위 함수를 $P_n^{f,\,x_0}$으로 나타내기도 한다.

테일러의 정리는 n이 클수록 $P_n^{f,\,x_0}$과 f의 차이가 작아진다는 것을 설명한다. 또한 주어진 범위에서 $P_n^{f,\,x_0}$과 f의 차이가 얼마큼인지 가늠할 수 있게 해준다.

정리 5.4.1 테일러의 정리

n이 자연수이고 a, b가 $\widetilde{\mathbb{R}}$의 원소이며 $a<b$이고 $f\in D^{n+1}(a,\ b)$라고 하자. 그러면 $(a,\ b)$의 임의의 두 점 x, x_0에 대하여 이들 두 점 사이의 점 c가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{7}$$

증명 일반성을 잃지 않고 $x_0<x$라고 하자. 각 $t\in(a,\ b)$에 대하여

$$F(t):=\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!},\quad G(t):=f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \tag{8}$$

이라고 하자. 이제 x, x_0 사이에 점 c가 존재하여

$$G(x_0)=F(x_0)f^{(n+1)}(c) \tag{9}$$

를 만족시킴을 보여야 한다.

일반화된 평균값 정리(5.3.6)를 이용하여 증명하자. 각 $t\in(a,\ b)$와 $k\in\mathbb{N}$에 대하여

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)=\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

이므로 이것을 (8)에 대입하면

$$G'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

을 얻는다. 또한 (8)의 F를 미분하면 $t\in\mathbb{R}$에 대하여

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}$$

을 얻는다. 이로써 F와 G는 구간 $(x_0,\ x)$에서 미분 가능하고 $[x_0,\ x]$에서 연속이며 $t\neq x$일 때

$$\frac{G'(t)}{F'(t)}=f^{(n+1)}(t) \tag{10}$$

이다. 따라서 일반화된 평균값 정리에 의하여 $c\in(x_0,\ x)$가 존재하여

$$(F(x)-F(x_0))G'(c)=(G(x)-G(x_0))F'(c) \tag{11}$$

를 만족시킨다. $F(x)=G(x)=0$이고 $x\neq c$이므로 $-F(x_0)G'(c)=-G(x_0)F'(c)$, 즉

$$G(x_0)=F(x_0)\frac{G'(c)}{F'(c)}$$

가 성립한다. 이 등식을 (10)과 결합하면 (9)를 얻는다. ■

참고 5.4.2 테일러의 정리는 $f\in C^{\infty}(a,\ b)$, $x_0\in(a,\ b)$일 때 임의의 $x\in(a,\ b)$에 대하여 x와 x_0 사이의 점 c가 존재하여 다음 부등식을 만족시킨다는 것을 의미한다.

$$\left|f(x)-P_n^{f,x_0}(x)\right|\leq\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

여기서 n의 값이 클수록 분모 $(n+1)!$의 값도 커지므로 $f(x)$와 $P_n^{f,x_0}(x)$의 차이는 작아진다. □

예제 5.4.3 테일러의 정리를 이용하여 $100 < x < 102$의 범위에서 부등식

$$\left| P(x) - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10000}$$

을 만족시키는 다항식 $P(x)$를 구하여라.

풀이 $f(x) \coloneqq 1/x$, $x_0 = 101$이라고 하자. 임의의 $t \in (100,\ 102)$에 대하여

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\,t^{-(n+2)}}{(n+1)!} = (-1)^{n+1}t^{-(n+2)}$$

이므로

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \right| = |t|^{-(n+2)} < \frac{1}{100^{n+2}}$$

을 얻는다. 그런데 $x \in (100,\ 102)$일 때 $|x - 101|^{n+1} \le 1$이므로 $n = 1$일 때 테일러의 정리에 의하여 $c \in (100,\ 102)$가 존재하여

$$|f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(c)}{(1+1)!}(x-101)^{1+1} \right| = \left| \frac{f^{(2)}(c)}{(1+1)!} \right| |x - 101|^2 < \frac{1}{100^3} = \frac{1}{1000000}$$

이다. 즉 $100 < x < 102$인 범위에서 $f(x)$와 $P_1(x)$의 차이는 10^{-6} 미만이다. 따라서 구하는 다항식은

$$P(x) = P_1(x) = f(101) + \frac{f'(101)}{1!}(x - 101) = \frac{2}{101} - \frac{x}{101^2}$$

이다. □

예제 5.4.4 테일러의 정리를 이용하여 자연상수 e의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하여라.

풀이 $f(x) \coloneqq e^x$, $x_0 = 0$이라고 하자. $x \in (0,\ 1]$과 $c \in (0,\ x)$에 대하여 $e^c \le 3$이므로

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!}(x - x_0) \right| \le \frac{3}{(n+1)!}$$

이다. 따라서 $n \ge 7$이고 $x \in (0,\ 1]$이면 $c \in (0,\ x)$가 존재하여

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right| \le \frac{1}{13440} < \frac{5}{10000}$$

를 만족시킨다.

$$P_7(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

이므로 $x = 1$을 대입하면

$$e \fallingdotseq P_7(1) = 2.71825396\cdots \fallingdotseq 2.718$$

을 얻는다. □

5.5 로피탈의 법칙

두 함수 f, g가 a에서 각각 0이 아닌 값에 수렴할 때 f/g의 극한은

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

로 계산할 수 있다. 그러나 f와 g의 극한이 0이거나 두 극한이 모두 무한대로 발산할 때에는 위와 같은 공식을 사용할 수 없다.

분수식으로 정의된 함수의 분모와 분자가 모두 0에 수렴하거나 모두 무한대로 발산하는 경우 그러한 함수의 극한을 **부정형**이라고 부른다. 부정형의 극한은 수렴할 수도 있으며 수렴하지 않을 수도 있다. 그러나 분모와 분자가 미분 가능하고 적절한 조건을 만족시키면 부정형의 극한을 쉽게 계산할 수 있다.

정리 5.5.1 로피탈(l'Hôpital)의 법칙

$a\in\widetilde{\mathbb{R}}$ 이고 I가 a를 원소로 가지거나 a를 끝점으로 하는 열린구간이며 두 함수 f, g가 $I\setminus\{a\}$에서 미분 가능하고 임의의 $x\in I\setminus\{a\}$에 대하여 $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$이라고 하자. 또한

$$A \coloneqq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} g(x)$$

이고, A의 값은 0이거나 ∞라고 하자. 만약

$$B\coloneqq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

에 대하여 $B\in\widetilde{\mathbb{R}}$ 이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

증명* (i) $B\in\mathbb{R}$ 인 경우를 증명하자. 임의의 $x\in I$에 대하여 $g'(x)\neq 0$이므로 평균값 정리에 의하여 모두 a 이상이거나 모두 a 이하인 서로 다른 두 점 x, $y\in I$에 대하여 $g(x)-g(y)\neq 0$이다.

모든 k에 대하여 $x_k\in I$이고 $x_k\to a$이며, '모든 $k\in\mathbb{N}$에 대하여 $x_k<a$'이거나 '모든 $k\in\mathbb{N}$에 대하여 $x_k>a$'를 만족시키는 수열 $\{x_k\}$가 임의로 주어졌다고 하자. 이제 $f(x_k)/g(x_k)\to B$임을 보여야 한다.

$A=0$, $a\in\mathbb{R}$ 인 경우를 살펴보자. $f(a)\coloneqq 0$, $g(a)\coloneqq 0$이라고 하면 f, g는 $I\cup\{a\}$에서 연속이고 $I\setminus\{a\}$에서 미분 가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 x_k와 $y\coloneqq a$ 사이의 점 c_k가 존재하여

$$\frac{f(x_k)-f(y)}{g(x_k)-g(y)}=\frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \tag{12}$$

를 만족시킨다. 여기서 $f(y)=g(y)=0$이므로 다음 등식을 얻는다.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)}=\frac{f(x_k)-f(y)}{g(x_k)-g(y)}=\frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \tag{13}$$

여기에서 c_k는 x_k와 a 사이에 있으므로 $k \to \infty$일 때 $c_k \to a$이다. 따라서 (13)에 의하여

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to B$$

를 얻는다.

다음으로 $A = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$인 경우를 살펴보자. 일반성을 잃지 않고 $A = +\infty$라고 하자. 각 k, $n \in \mathbb{N}$에 대하여 평균값 정리에 의하여 x_k와 x_n 사이의 점 $c_{k,n}$이 존재하여

$$\frac{f(x_k) - f(x_n)}{g(x_k) - g(x_n)} = \frac{f'(c_{k,n})}{g'(c_{k,n})}$$

을 만족시킨다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(x_k)}{g(x_n)} &= \frac{f(x_n) - f(x_k)}{g(x_n)} = \frac{1}{g(x_n)} \cdot (g(x_n) - g(x_k)) \cdot \frac{f'(c_{k,n})}{g'(c_{k,n})} \\ &= \left(1 - \frac{g(x_k)}{g(x_n)}\right)\frac{f'(c_{k,n})}{g'(c_{k,n})}\end{aligned}$$

즉

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_k)}{g(x_n)} - \frac{g(x_k)}{g(x_n)} \cdot \frac{f'(c_{k,n})}{g'(c_{k,n})} + \frac{f'(c_{k,n})}{g'(c_{k,n})} \tag{14}$$

이 성립한다. $A = \infty$이므로 $n \to \infty$일 때 $1/g(x_n) \to 0$이다. 그리고 $c_{k,n}$은 x_k와 x_n 사이에 있기 때문에 $k, n \to \infty$일 때 $c_{k,n} \to a$이다. 따라서 (14)에 의하여 $f(x_n)/g(x_n) \to B$이다. 즉 1보다 작은 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 자연수 N_0이 존재하여 $n \ge N_0$일 때마다

$$\left|\frac{f'(c_{N_0, n})}{g'(c_{N_0, n})} - B\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다. $g(x_n) \to \infty$이므로 N_1이 존재하여 $n \ge N_1$일 때마다

$$\left|\frac{f(x_{N_0})}{g(x_n)}\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{그리고} \quad \left|\frac{g(x_{N_0})}{g(x_n)}\right| \cdot \left|\frac{f'(c_{N_0, a})}{g'(c_{N_0, a})}\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다. $N = \max\{N_0, N_1\}$이라고 하자. 그러면 $n \ge N$일 때마다

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - B\right| \le \left|\frac{f(x_{N_0})}{g(x_n)}\right| + \left|\frac{g(x_{N_0})}{g(x_n)}\,\frac{f'(c_{N_0, n})}{g'(c_{N_0, n})}\right| + \left|\frac{f'(c_{N_0, n})}{g'(c_{N_0, n})} - B\right| < \epsilon$$

이 성립한다. 따라서

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to B$$

를 얻는다.

다음으로 $a = \pm\infty$인 경우를 살펴보자. 일반성을 잃지 않고 $a = +\infty$라고 하자. $I \supseteq (c, \infty)$인 양수 c를 택하자. 각 $y \in (0, 1/c)$에 대하여 $\phi(y) \coloneqq f(1/y)$, $\psi(y) \coloneqq g(1/y)$라고 하자.

연쇄 법칙에 의하여

$$\frac{\phi'(y)}{\psi'(y)}=\frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)}=\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)}$$

를 얻는다. 여기서 $x=1/y\in(c,\ \infty)$이므로 $f'(x)/g'(x)=\phi'(y)/\psi'(y)$이다. 그리고 $x\to\infty$일 필요충분조건은 $y=1/x\to 0+$인 것이므로, $a=0$과 $I=(0,\ 1/c)$에 대하여 ϕ와 ψ는 앞의 두 경우의 조건을 만족시키는 함수가 된다. 즉

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{y\to 0+}\frac{\phi'(y)}{\psi'(y)}=\lim_{y\to 0+}\frac{\phi(y)}{\psi(y)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

가 성립한다.

(ii) $B=\pm\infty$인 경우를 증명하자. 일반성을 잃지 않고 $B=+\infty$라고 하자. 가정에 의하여 f, g는 $I\setminus\{a\}$에서 미분 가능하고 g/f의 극한은 $0/0$ 또는 ∞/∞ 꼴이며, g'/f'의 극한은 0이다. 더욱이 충분히 큰 모든 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이다. 만약 $A=0$이면 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)\neq 0$이 성립하고, 만약 $A=\infty$이면 충분히 큰 모든 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이다. 따라서 a를 원소로 가지거나 a를 끝점으로 갖는 구간 $J\subseteq I$가 존재하여 임의의 $x\in J$에 대하여 $f(x)\neq 0$, $f'(x)\neq 0$을 만족시킨다. 이로써 f와 g의 역할을 바꾸었을 때 (i)의 조건이 모두 만족되므로

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$$

이 성립한다. 그런데 $B=\infty$이므로 충분히 큰 모든 x에 대하여 $f(x)/g(x)>0$이다. 특히 $x\to a$일 때 $f(x)/g(x)\to\infty=B$를 얻는다. ■

로피탈의 법칙은 두 함수의 증가율을 비교할 때에 사용된다. 예를 들어 $x\to\infty$일 때 e^x는 x^2보다 더 빨리 커진다.

예제 5.5.2 $x\to\infty$일 때 $x^2/e^x\to 0$임을 보여라.

풀이 x^2/e^x와 x/e^x의 극한이 모두 부정형이므로 로피탈의 법칙에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$ □

로피탈의 법칙을 반복하여 사용할 때에는 매번 로피탈의 법칙의 조건이 만족되는지 살펴야 한다. 예를 들어

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x+\cos x}=0$$

이지만, 두 번째 극한의 분자와 분모를 각각 미분하여 극한을 취하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{2-\sin x}=1$$

이다.

예제 5.5.3 $\lim_{x \to 0+} x \ln x$의 값을 구하여라.

풀이 $x = 1/(1/x)$이므로 $x \ln x = (\ln x)/(1/x)$로서 주어진 극한은 ∞/∞ 꼴의 부정형이 된다. 따라서 로피탈의 법칙을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{1/x^2} = 0 \qquad \square$$

로피탈의 법칙과 로그함수의 성질을 이용하면 1^{∞} 꼴의 극한과 0^0 꼴의 극한을 계산할 수 있다.

예제 5.5.4 $\lim_{x \to 0+} (1 + 3x)^{1/x}$의 값을 구하여라.

풀이 주어진 극한을 L이라고 하자. 만약 이 극한이 수렴하면 $\ln L = \lim_{x \to 0+} (\ln(1 + 3x))/x$가 성립한다. 로피탈의 법칙과 연쇄 법칙을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\ln L = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{3/(1+3x)}{1} = 3$$

여기서 ln은 연속함수이므로 문제의 극한은 수렴하고 $L = e^{\ln L} = e^3$을 얻는다. $\square$

예제 5.5.5 $\lim_{x \to 1} (\ln x)^{1-x}$의 값을 구하여라.

풀이 주어진 극한을 L이라고 하자. 이 극한이 수렴하고 $L > 0$이라면

$$\ln L = \lim_{x \to 1} (1-x) \ln(\ln x)$$

가 성립한다. 로피탈의 법칙과 연쇄 법칙을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\ln L = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(\ln x)}{1/(1-x)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/(x \ln x)}{1/(1-x)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{-2(1-x)}{1 + \ln x} = 0$$

여기서 ln은 연속함수이므로 문제의 극한은 수렴하고 $L = e^0 = 1$을 얻는다.

만약 문제의 극한이 수렴하고 $L < 0$이라면

$$\ln(-L) = \lim_{x \to 1} (1-x) \ln(-\ln x)$$

가 성립한다. 그런데 이 경우에는 $L = 1$이 되어 모순이다. 따라서 L은 음수가 아니다.

만약 문제의 극한이 수렴하고 $L = 0$이라면 $x \to 1+$일 때에도 문제의 극한은 수렴한다. 그런데 $x > 0$일 때 $(\ln x)^{1-x} > 0$이므로

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \ln(\ln x) = -\infty$$

가 되어야 한다. 로피탈의 법칙과 연쇄 법칙을 이용하면 위 극한은 0이므로 $L = e^0 = 1$이 되어 모순이다. 따라서 $L \neq 0$이다. $\square$

5.6 볼록함수*

우리는 중학교에서 함수의 그래프의 볼록성에 따른 함수의 성질을 배웠다. 예를 들어 그래프가 아래로 볼록한 이차함수는 최솟값을 갖고 위로 볼록한 이차함수는 최댓값을 가진다.

이 절에서는 함수의 볼록성을 논리적으로 정의하고 그와 관련된 성질들을 살펴보자.

정의 5.6.1 | 볼록함수

I가 공집합이 아닌 구간이고 f가 I에서 정의된 함수라고 하자.

(i) 만약 $0 \le \alpha \le 1$인 임의의 α와 I의 임의의 점 x, y에 대하여

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

가 성립하면 'f는 I에서 아래로 볼록하다' 또는 간단히 'f는 I에서 **볼록하다**(convex)'라고 말한다. 그리고 f를 I 위에서의 **볼록함수**라고 부른다.

(ii) 만약 $-f$가 I에서 볼록하면 'f는 I에서 위로 볼록하다' 또는 'f는 I에서 **오목하다**(concave)'라고 말한다. 그리고 f를 I 위에서의 **오목함수**라고 부른다.

정의에 의하면 f가 I에서 볼록할 필요충분조건은 f가 I의 임의의 부분구간에서 볼록한 것이다. 또한 모든 일차함수는 I에서 볼록함수인 동시에 오목함수가 된다. [책에 따라서는 '오목'이라는 용어를 사용하지 않는 경우도 있다.]

참고 5.6.2 f가 I에서 볼록할 필요충분조건은 I의 임의의 부분구간 $[c, d]$에 대하여 $\mathbb{R}^2$에서 $(c, f(c))$, $(d, f(d))$를 이은 선분의 양 끝점을 제외한 모든 점이 $y = f(x)$의 그래프의 위쪽에 놓이는 것이다.

증명 f가 I에서 볼록하고 $x_0 \in [c, d]$라고 하자. $x_0 = \alpha c + (1-\alpha)d$인 $\alpha \in [0, 1]$을 택하자. 그러면 두 점 $(c, f(c))$, $(d, f(d))$를 잇는 선분의 기울기는 $(f(d) - f(c))/(d-c)$이다. 따라서 (x_0, y_0)이 선분 위의 점이면 $y_0 = \alpha f(c) + (1-\alpha) f(d)$를 만족시킨다. f가 볼록함수이므로 $f(x_0) \le y_0$이 성립한다. 역도 비슷한 방법으로 증명된다. ■

참고 5.6.3 함수 f가 공집합이 아닌 열린구간 (a, b)에서 볼록할 필요충분조건은 (a, b)에서 f의 그래프의 기울기가 증가하는 것이다. 즉

$$a < c < x < d < b\text{일 때마다 } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(d) - f(x)}{d - x}$$

가 성립하는 것이다.

증명 $a < c < x < d < b$라고 하자. 그리고 두 점 $(c, f(c))$, $(d, f(d))$를 잇는 선분을 그래프로 갖는 일차함수를 $\lambda(x)$라고 하자. f가 볼록하면 $f(x) \le \lambda(x)$이므로

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{\lambda(x) - \lambda(c)}{x - c} = \frac{\lambda(d) - \lambda(x)}{d - x} \le \frac{f(d) - f(x)}{d - x}$$

가 성립한다. 역으로 f가 볼록함수가 아니면 적당한 $x \in (c, d)$에 대하여 $\lambda(x) < f(x)$이다. 따라서

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{\lambda(x) - \lambda(c)}{x - c} = \frac{\lambda(d) - \lambda(x)}{d - x} > \frac{f(d) - f(x)}{d - x}$$

가 성립한다. 따라서 (a, b)에서 f의 그래프의 기울기가 증가하지 않는 부분이 존재한다. ■

정리 5.6.4 볼록함수의 도함수 판정법

f가 공집합이 아닌 열린구간 I에서 미분 가능하다고 하자. 이때 f가 I에서 볼록함수일 필요충분조건은 I에서 f'이 증가함수인 것이다.

증명 f가 $I=(a,\ b)$에서 볼록하다고 가정하자. 그리고 $(a,\ b)$의 두 점 $c,\ d$에 대하여 $c<d$라고 하자. 그러면 충분히 작은 $h>0$가 존재하여 $c+h<d,\ d+h<b$를 만족시킨다. 따라서 참고 5.6.3에 의하여

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \frac{f(d+h)-f(d)}{h}$$

가 성립한다. 양변에 $h \to 0$인 극한을 취하면 $f'(c) \le f'(d)$를 얻는다.

역으로 f'이 $(a,\ b)$에서 증가한다고 가정하자. 그리고 $a<c<x<d<b$라고 하자. 그러면 평균값 정리에 의하여 c와 x 사이에 x_0이 존재하고, x와 d 사이에 x_1이 존재하여

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(x_0) \quad \text{그리고} \quad \frac{f(d)-f(x)}{d-x}=f'(x_1)$$

을 만족시킨다. 여기서 $x_0<x_1$이므로 $f'(x_0) \le f'(x_1)$이 성립한다. 따라서 참고 5.6.3에 의하여 f는 $(a,\ b)$에서 볼록하다. ■

따름정리 5.6.5 f가 공집합이 아닌 열린구간 I에서 두 번 미분 가능하다고 하자. 이때 f가 I에서 볼록함수일 필요충분조건은 I에서 $f'' \ge 0$인 것이다. 이 명제를 볼록함수의 **이계도함수 판정법**이라고 부른다.

증명 정리 5.3.7에 의하면 $f''(x) \ge 0$일 필요충분조건은 f'이 I에서 증가하는 것이다. 따라서 정리 5.6.4에 의하여 결론을 얻는다. ■

다음으로 함수의 볼록성과 연속성의 관계를 살펴보자.

정리 5.6.6 볼록함수의 연속성

함수 f가 공집합이 아닌 열린구간 I에서 볼록하면 f는 I에서 연속이다.

증명 $x_0 \in I=(a,\ b)$라고 하자. x_0에서 f의 우극한이 $f(x_0)$에 수렴함을 보이자. $a<c<x_0<x<d<b$라고 하자. $(c,\ f(c)),\ (x_0,\ f(x_0))$을 잇는 선분을 그래프로 갖는 일차함수를 g라고 하고, $(x_0,\ f(x_0)),\ (d,\ f(d))$를 잇는 선분을 그래프로 갖는 일차함수를 h라고 하자. f가 볼록함수이므로 참고 5.6.2에 의하여 $f(x) \le h(x)$가 성립한다. $(x_0,\ f(x_0))$은 $(c,\ f(c)),\ (x,\ f(x))$를 잇는 선분 위 또는 그 아래쪽에 있으므로 $g(x) \le f(x)$가 성립한다. 따라서 임의의 $x \in (x_0,\ d)$에 대하여

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

가 성립한다. 그런데 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 그래프가 점 $(x_0,\ f(x_0))$을 지나므로 $x \to x_0+$일 때 $g(x) \to g(x_0),\ h(x) \to f(x_0)$이 성립한다. 따라서 조임 정리에 의하여 $f(x) \to f(x_0)$을 얻는다. 같은 방법으로 x_0에서 f의 좌극한도 $f(x_0)$에 수렴함을 보일 수 있다. 따라서 f는 x_0에서 연속이다.

x_0이 I의 임의의 점이므로 f는 I에서 연속이다. ■

참고 5.6.7 I가 열린구간이 아니면 정리 5.6.6은 성립하지 않을 수도 있다. 예를 들어 $[0,\ 1]$에서

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

로 정의된 함수 f는 $[0,\ 1]$에서 볼록하지만 연속이 아니다. □

함수 f가 x_0의 근방에서 정의되었다고 하자. 만약 양수 δ가 존재하여 $x \in B_\delta'(x_0)$일 때마다 $f(x) < f(x_0)$이 성립하면 'f는 x_0에서 **고유극댓값**(proper maximum)을 가진다'라고 말한다. 만약 이 부등식이 반대로 성립하면 'f는 x_0에서 **고유극솟값**(proper minimum)을 가진다'라고 말한다.

정리 5.6.8 볼록함수의 고유극값

(i) 함수 f가 공집합이 아닌 열린구간 $(a,\ b)$에서 볼록하면 f는 $(a,\ b)$에서 고유극댓값을 갖지 않는다.
(ii) f가 $[0,\ \infty)$에서 볼록하고 고유극솟값을 가지면 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이다.

증명 (i) 결론에 반하여 f가 $x_0 \in (a,\ b)$에서 고유극댓값을 가진다고 가정하자. 그러면 $c < x_0 < d$인 $c,\ d$가 존재하여 $c < x < d$일 때마다 $f(x) < f(x_0)$을 만족시킨다. 특히 $(c,\ f(c))$, $(d,\ f(d))$를 잇는 선분 위의 점은 $f(x_0)$의 아래쪽에 놓이게 된다. 이것은 모순이므로 f는 $(a,\ b)$에서 고유극댓값을 갖지 않는다.

(ii) f가 $x_0 \in (a,\ b)$에서 고유극솟값을 가진다고 하자. $x_1 > x_0$인 점 x_1이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $(x_0,\ f(x_0))$, $(x_1,\ f(x_1))$을 잇는 직선의 방정식을 $y = g(x)$라고 하자. f가 x_0에서 고유극솟값을 가지므로 $f(x_1) > f(x_0)$, $x_1 > x_0$인 점 x_1이 존재한다. 따라서 g의 그래프의 기울기는 양수이다. 더욱이 정리 5.6.6에 의하여 임의의 $x \in (x_1,\ \infty)$에 대하여 $g(x) \le f(x)$이다. 그런데 $x \to \infty$일 때 $g(x) \to \infty$이므로 $f(x) \to \infty$를 얻는다. ■

끝으로 함수의 볼록성과 미분가능성의 관계를 살펴보자.

정리 5.6.9 볼록함수의 한방향 미분 가능성

함수 f가 공집합이 아닌 열린구간 $(a,\ b)$에서 볼록하면 $(a,\ b)$의 모든 점에서 f의 좌미분계수와 우미분계수가 존재하며 그들은 각각 $(a,\ b)$에서 유한값을 갖고 증가하는 함수이다.

증명 $h < 0$이면 $(x,\ f(x))$, $(x+h,\ f(x+h))$를 잇는 선분의 기울이기는 $(f(x+h) - f(x))/h$이다. 참고 5.6.3에 의하여 음수 h가 0에 가까워질수록 이 분수식의 값은 증가한다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $h \to 0-$일 때 이 분수식은 유한값에 수렴한다. 비슷한 방법으로 $h \to 0+$일 때에도 이 분수식은 유한값에 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $D_L f(x) \le D_R f(x)$를 얻는다.

이제 $D_R f(x)$가 $(a,\ b)$에서 증가함을 보이자. $(a,\ b)$의 점 $x_1,\ u,\ t,\ x_2$에 대하여 $x_1 < u < t < x_2$라고 하자. 그러면

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t}$$

가 성립한다. $u \to x_1+$, $t \to x_2-$인 극한을 취하면 $D_R f(x_1) \le D_L f(x_2) \le D_R f(x_2)$를 얻는다. 즉 $D_R f(x)$는 $(a,\ b)$에서 증가한다. 같은 방법으로 $D_L f(x)$도 $(a,\ b)$에서 증가함을 보일 수 있다. ■

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 미분에 관한 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 연속이면 f는 $(a,\ b)$에서 미분 가능하다.

(2) 함수 f가 $(a,\ b)$에서 미분 가능할 때 f의 도함수는 $(a,\ b)$에서 연속이다.

(3) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 미분 가능할 때 f의 도함수는 $[a,\ b]$에서 사잇값 성질을 가진다.

(4) 닫힌구간의 끝점에서도 미분계수가 정의된다.

(5) 두 함수 f와 g가 $(a,\ b)$에서 각각 미분 가능하면 f/g도 $(a,\ b)$에서 미분 가능하다.

(6) 모든 다항함수는 $\mathbb{R}$ 에서 미분 가능하다.

(7) 도함수가 0인 함수는 상수함수이다.

2. 함수 f의 n계도함수를 $\dfrac{d^n}{d^n x}f$로 나타내지 않고 $\dfrac{d^n}{(dx)^n}f$로 나타내는 이유가 무엇인지 설명하여라.

3. 함수의 정의역과 그 도함수의 정의역은 어떠한 관계가 있는지 설명하여라.

4. 최대정수함수는 다른 함수의 도함수가 될 수 있는지 자신의 의견을 서술하여라.

5. 두 함수 $f,\ g$를 $f(x)=\dfrac{-x}{x+1},\ g(x)=\dfrac{1}{x+1}$이라고 정의하면 $f\neq g$이지만 $f'=g'$이다. 이러한 일이 발생한 이유를 설명하여라.

6. 다음과 같이 정의된 함수 f의 도함수와 이계도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=x^2+x+8$

(2) $f(t)=5t^3-3t^2$

(3) $f(t)=\dfrac{x^3+7}{x}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

7. 함수 $y=2x^2-13x+5$의 그래프 위의 점 $(1,\ -6)$에서의 접선의 방정식과 법선의 방정식을 각각 구하여라.

8. 함수 f가 a에서 미분 가능하고 $\alpha,\ \beta$가 0이 아닌 실수일 때 다음을 계산하여라.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+\alpha h)-f(a+\beta h)}{h}$$

9. 다음과 같이 정의된 함수 f의 도함수가 $\mathbb{R}$ 에서 연속인지 판별하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{if } x\leq 1 \\ 3x-2 & \text{if } x>1 \end{cases}$$

10. 다음과 같이 정의된 함수 f가 연속인 도함수를 갖도록 $a,\ b$의 값을 정하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\leq 2 \\ ax+b & \text{if } x>2 \end{cases}$$

11. 함수 $f:[0,\ 2]\to\mathbb{R}$ 가 다음과 같이 정의되었다.

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{if } x=0 \\ -x^2+3x+a & \text{if } 0<x<1 \\ mx+b & \text{if } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

이때 구간 $[0,\ 2]$에서 f가 평균값 정리의 가정을 만족시키도록 $a,\ b,\ m$의 값을 정하여라.

12. 함수 f가 $f(x)=x^3+x^2-8x+5$로 주어졌을 때 $\mathbb{R}$에서 f의 극값을 모두 구하여라.

13. 평균값 정리를 이용하여 다음 부등식을 증명하여라.

(1) 임의의 실수 x, y에 대하여 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$이다.

(2) 임의의 실수 x에 대하여 $e^x\ge 1+x$이다.

14. 타원 $x^2+9y^2=1$에 접하고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

개념 응용하기

15. 함수 f가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고 미분 가능하며 f의 도함수가 $(a,\ b)$에서 유계라고 하자. 이때 f가 $(a,\ b)$에서 균등연속임을 증명하여라.

16. 다음 극한을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{x\ln(1+x)}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x+a}{x-a}\right)$ (단, $a\ne 0$)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\left(\ln\frac{x}{2}\ln(2-x)\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}x^x$

17. 등식 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x=4$가 성립되도록 하는 n의 값을 구하여라.

18. 실수 a를 원소로 갖는 열린구간 I에서 f'이 연속이고 $f''(a)$가 존재할 때 다음을 구하여라.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}$$

19. $f(x)=|x|$로 정의된 함수 f는 0에서 연속이지만 미분 불가능함을 증명하여라.

20. 함수 $y=f(x)$가 다음 등식을 만족시킬 때 y'을 구하여라.

(1) $x^{2/3}+y^{2/3}=2$

(2) $\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$

(3) $x^2y+y^2x+\sqrt{xy}=1$

(4) $e^{xy}+y\ln x=\cos(x^2+y^2)$

21. 함수 f가 다음과 같이 주어졌을 때 $f_l'(0)$과 $f_r'(0)$을 구하여라.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{if } x\ne 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

22. 함수 f가 다음과 같이 주어졌을 때 f'과 f''을 구하여라.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x\le 0\end{cases}$$

23. 함수 f가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\ne 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

이때 f는 모든 점에서 미분 가능하지만 f'은 0에서 연속이 아님을 증명하여라.

24. 함수 f가 다음과 같이 주어졌을 때 f는 오직 한 점에서만 미분 가능함을 증명하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

25. 함수 $f:\mathbb{R}\to(0,\ \infty)$가 모든 점에서 미분 가능하고 $f'=f$를 만족시킨다고 하자.

(1) f가 $\mathbb{R}$에서 증가함수임을 증명하여라.

(2) f의 역함수의 도함수를 구하여라.

26. 함수 f가 양의 길이를 갖는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며 $f(a)f(b)<0$을 만족시키고 임의의 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이라고 하자. 이때 방정식 $f(x)=0$의 해가 $(a,\ b)$에 유일하게 존재함을 증명하여라.

27. 두 함수 f와 g가 $\mathbb{R}$에서 미분 가능하고 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$을 만족시킨다고 하자. 또한 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 개의 근 $\alpha,\ \beta$만을 가진다고 하자. 이때 방정식 $g(x)=0$의 근이 α와 β 사이에 유일하게 존재함을 증명하여라.

28. 함수 f가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 음이 아니고 f의 삼계 도함수가 존재하며 $(0,\ 1)$의 서로 다른 두 점 c, d가 존재하여 $f(c)=f(d)=0$을 만족시킨다고 하자. 이때 $f^{(3)}(x)=0$인 점 x가 $(0,\ 1)$에 존재함을 증명하여라.

29. 함수 f가 $(a,\ b)$에서 두 번 이상 미분 가능하다고 하자. 만약 f가 $(a,\ b)$의 점 c에서 극솟값을 가지면 $f''(c)\geq 0$임을 증명하여라. 만약 f가 $(a,\ b)$의 점 d에서 극댓값을 가지면 $f''(d)\leq 0$임을 증명하여라.

30. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 우함수이고 미분 가능할 때 f'은 기함수임을 증명하여라. 또한 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 기함수이고 미분 가능할 때 g'은 우함수임을 증명하여라.

31. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 예를 들어라.

(1) f는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 정의되었다.

(2) f는 0에서 미분 가능하고 $f'(0)>0$이다.

(3) f는 0을 원소로 갖는 어떠한 구간에서도 증가함수가 되지 못한다.

실력 다지기

32. n이 2 이상인 자연수이고 함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$가 $f(x)=(x^2-x)^n$으로 정의되었다고 하자. 이때 방정식 $f^{(n)}(x)=0$은 0과 1 사이에 n개의 서로 다른 실근을 가짐을 보여라.

33. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 예를 들어라.

(1) f는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 정의되었고 이 구간에서 연속이다.

(2) f는 0에서 미분 가능하고 $f'(0)>0$이다.

(3) f는 0을 원소로 갖는 어떠한 구간에서도 증가함수가 되지 못한다.

34. 함수 f가 구간 I에서 미분 가능하고 a가 I의 내점이라고 하자. 이때 모든 항이 I에 속하고 a에 수렴하는 단조수열 $\{x_n\}$이 존재하여 $f'(x_n)\to f'(a)$를 만족시킴을 증명하여라. 또한 이때 a에서 f'의 극한이 존재하면 f'은 a에서 연속임을 증명하여라.

35. 함수 f가 $\mathbb{R}$ 에서 미분 가능하고 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A$ 이면 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ 임을 증명하여라.

36. 함수 f가 $[0,\ 2]$에서 두 번 미분 가능하고 임의의 $x\in[0,\ 2]$에 대하여 $|f(x)|\le 1$이며 $|f''(x)|<1$이라고 하자. 이때 임의의 $x\in[0,\ 2]$에 대하여 $|f'(x)|\le 2$임을 증명하여라.

37. 함수 f가 $(0,\ \infty)$에서 미분 가능하고 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$이면 $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$임을 증명하여라.

38. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하며 연속인 도함수를 가진다고 하자. 이때 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0<|t-x|<\delta$, $a\le x\le b$, $a\le t\le b$일 때마다

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\epsilon$$

이 성립함을 증명하여라.

39. 함수 f가 $(0,\ \infty)$에서 두 번 미분 가능하고 f''이 $(0,\ \infty)$에서 유계이며 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$이라고 하자. 이때 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$임을 증명하여라.

40. 함수 f가 $(0,\ \infty)$에서 정의되었고 1에서 미분 가능하며 $f(1)=0$이고 임의의 양수 x, y에 대하여

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

가 성립한다고 하자. 이때 임의의 양수 x에 대하여 $f'(x)=f'(1)x^{-1}$임을 증명하여라.

41. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x\ne 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

이때 f는 $\mathbb{R}$ 에서 임의 횟수로 미분 가능하고 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$임을 증명하여라.

42. 함수 f가 $(a,\ b)$에서 연속이고 $(a,\ b)$의 임의의 점 x, y에 대하여

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

를 만족시키면 f는 $(a,\ b)$에서 볼록함수임을 증명하여라.

43. 함수 f가 $(a,\ b)$에서 볼록하면 $(a,\ b)$에서 f가 미분 불가능한 점은 많아야 가산임을 증명하여라.

44. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분 가능하다고 하자. 또한 $f'(x)<0$인 점 x가 $(a,\ b)$에 많아야 가산 개 존재한다고 하자. 이때 f는 $[a,\ b]$에서 증가함수임을 증명하여라.

45. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며 $f'(x)\ne 0$인 점 x가 $(a,\ b)$에 많아야 가산 개 존재한다고 하자. 이때 f는 $[a,\ b]$에서 상수함수임을 증명하여라.

46. 함수 f가 $(0,\ 1)$에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{if } x=\dfrac{n}{m}\ :\ \text{irreducible},\ m\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

이때 f가 $(0,\ 1)$의 어떠한 점에서도 미분 가능하지 않음을 증명하여라. 이 함수를 **토마에 함수**(Thomae function)라고 부른다.

06 실함수의 리만 적분

적분은 함수의 그래프로 표현되는 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결해준다. 우리는 고등학교에서 구분구적법으로 넓이를 구하는 적분을 공부하였다. 적분 이론에는 구분구적법 이외에도 리만, 스틸체스, 르베그, 다니엘, 헨스톡-쿠르츠바일 등의 적분이 있다. 이들은 모두 기존 적분의 필수적 성질을 보존하면서 그 단점을 보완하기 위해 고안된 것들이다.

이 장에서는 구분구적법보다 일반화된 리만 적분에 대하여 살펴본다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 리만 적분의 개념을 설명하고 리만합을 이용하여 리만적분과 동치인 정의를 말할 수 있다.
- 함수의 적분 가능성을 증명할 수 있다.
- 적분의 대수적인 성질을 증명할 수 있다.
- 미적분학의 기본정리를 증명하고 이를 이용하여 함수의 적분값을 구할 수 있다.
- 특이적분의 수렴 여부를 판정하고, 수렴하는 특이적분의 값을 구할 수 있다.

6.1 리만 적분의 정의

직사각형의 넓이는 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 정의된다. 또한 삼각형의 넓이는 직사각형의 넓이를 이용하여 유도된다. 이렇게 다각형의 넓이를 정의하는 것은 쉽다. 하지만 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정의하는 것은 간단하지 않다.

고등학교에서는 함수의 그래프로 정의되는 도형의 넓이를 구하기 위하여 구분구적법을 사용한다. 즉 적분 구간을 n개의 구간으로 등분하고 분할된 각 구간에서 직사각형의 넓이를 축과 그래프 사이의 넓이에 근사시킨다. 그런데 구간을 일정한 간격으로 분할하지 않고 임의 간격으로 분할하면 더 다양한 함수의 적분을 논할 수 있게 된다.

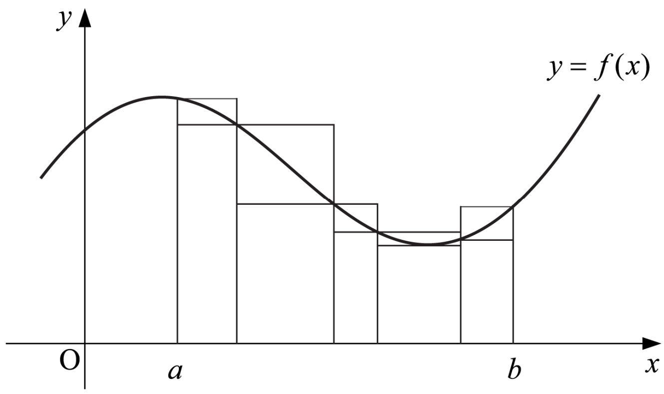
함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 $f > 0$이라고 하자. 그리고 구간 $[a,\ b]$에 속하는 점 x_i들이 다음을 만족시킨다고 하자.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

이 점들의 집합을 P라고 하자. P의 원소들에 의하여 분할된 성분구간 $I_i \coloneqq [x_{i-1},\ x_i]$의 길이는 $x_i - x_{i-1}$이다. 이 구간에서의 함숫값 중 가장 큰 값을 M_i라고 하자. 그러면

$$U(f,\ P) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

은 폭이 $x_i - x_{i-1}$이고 위쪽 변이 f의 그래프의 윗부분에 닿는 직사각형들의 넓이의 합이 된다.

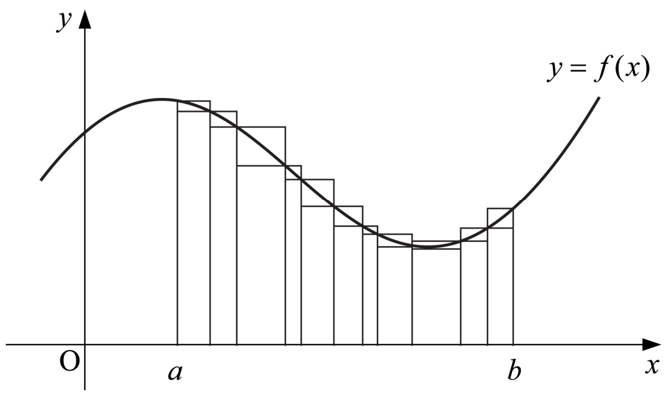


이번에는 I_i에서의 함숫값 중 가장 작은 값을 m_i라고 하자. 그러면

$$L(f,\ P) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

은 폭이 $x_i - x_{i-1}$이고 위쪽 변이 f의 그래프의 아랫부분에 닿는 직사각형들의 넓이의 합이 된다.

구간 $[a,\ b]$를 더 세밀하게 잘라보자.



그러면 그래프의 윗부분에 닿는 직사각형들은 높이가 처음보다 낮아진 것들이 생기며, 그래프의 아랫부분에 닿는 직사각형들은 높이가 처음보다 높아진 것들이 생긴다. 즉 $U(f,\ P)$의 값은 작아지고 $L(f,\ P)$의 값은 커진다. 따라서 두 넓이의 차 $U(f,\ P) - L(f,\ P)$는 작아진다. 구간 $[a,\ b]$를 더 조밀하게 자를수록 이 차이는 더 작아진다. 만약 임의로 원하는 만큼 $U(f,\ P) - L(f,\ P)$의 값을 충분히 작게 할 수 있다면 P를 변수로 했을 때 $U(f,\ P)$의 하한과 $L(f,\ P)$의 상한이 같아질 것이다.

위 그림에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축, 그리고 두 직선 $x = a,\ x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는 $U(f,\ P)$보다는 작고 $L(f,\ P)$보다는 크다. 그런데 $U(f,\ P)$의 하한과 $L(f,\ P)$의 상한이 같다면 그 값은 S와 같을 것이다. 이때 S의 값을 $[a,\ b]$에서 f의 리만 적분이라고 부른다.

이제 리만 적분을 체계적으로 정의하자.

정의 6.1.1 분할, 세련분할

구간 $[a, b]$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) P가 $[a, b]$의 유한부분집합이고 $a \in P$, $b \in P$이면 P를 $[a, b]$의 **분할**(partition)이라고 부른다. 편의상 $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$의 꼴로 쓸 때에는 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$가 성립하는 것으로 약속한다. 이때 $1 \le i \le n$인 자연수 i에 대하여 $[x_{i-1}, x_i]$를 P의 **성분구간**이라고 부른다.

(ii) P와 P_r가 $[a, b]$의 분할이고 $P \subseteq P_r$이면 P_r를 P의 **세련분할**(refinement)이라고 부른다.

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$와 구간 $[a, b]$의 분할 $P \coloneqq \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$에 대하여 다음과 같이 약속한다.

- 성분구간 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이 $x_i - x_{i-1}$을 Δx_i로 나타낸다.
- $[x_{i-1}, x_i]$에서 f의 상한을 M_i 또는 $M_i(f)$로 나타낸다.
- $[x_{i-1}, x_i]$에서 f의 하한을 m_i 또는 $m_i(f)$로 나타낸다.

참고 6.1.2 세련분할이란 직관적으로 구간을 더 세밀하게 잘랐다는 의미이다. 임의의 분할은 자기 자신의 세련분할이 된다. 또한 두 분할 P_1, P_2에 대하여 $P_3 = P_1 \cup P_2$라고 하면 P_3은 P_1의 세련분할이면서 동시에 P_2의 세련분할이 된다. 이렇게 $P_1 \cup P_2 \subseteq P_3$인 경우 P_3을 P_1과 P_2의 **공통세련분할**이라고 부른다. □

정의 6.1.3 상합, 하합

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$와 구간 $[a, b]$의 분할 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) 분할 P에 대한 f의 **상합**(upper sum) : $U(f, P) \coloneqq \sum_P M_i \Delta x_i \coloneqq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

(ii) 분할 P에 대한 f의 **하합**(lower sum) : $L(f, P) \coloneqq \sum_P m_i \Delta x_i \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

참고 6.1.4 분할을 세련할수록 상합은 작아지고 하합은 커진다. 즉 f가 $[a, b]$에서 유계인 실함수이고 P와 P_1이 $[a, b]$의 분할이며 $P \subseteq P_1$이면 $U(f, P) \ge U(f, P_1)$, $L(f, P) \le L(f, P_1)$이 성립한다.

증명 P와 P_1이 유한집합이고 $P \subseteq P_1$이므로 P_1은 P보다 m개의 원소를 더 가지고 있다고 할 수 있다. 이제 m에 수학적 귀납법을 적용하여 증명하자.

$m = 0$인 경우 $P = P_1$이므로 당연히 $U(f, P) \ge U(f, P_1)$이 성립한다.

이제 $m = k$인 경우 P_1이 P보다 k개의 원소를 더 가질 때마다 $U(f, P) \ge U(f, P_1)$이 성립한다고 가정하자. 그리고 P_1이 P보다 $k+1$개의 원소를 더 가지고 있다고 하자. $P_1 \setminus P$는 공집합이 아니므로 원소 하나를 택하여 p라고 하자. 그러면 $P_2 \coloneqq P_1 \setminus \{p\}$는 P보다 k개의 원소를 더 가진 분할이므로 귀납적 가정에 의하여 $U(f, P) \ge U(f, P_2)$가 성립한다. $P_2 = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라고 하자. 그러면 $x_{j-1} < p < x_j$인 $x_j \in P_2$가 존재한다. 이때 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sup f([x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}) &= \sup f([x_{j-1}, x_j])(p - x_{j-1}) + \sup f([x_{j-1}, x_j])(x_j - p) \\ &\ge \sup f([x_{j-1}, p])(p - x_{j-1}) + \sup f([p, x_j])(x_j - p) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
U(f,\ P_2) &= \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sup f([x_{j-1},\ x_j])(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{j-1} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} \sup f([x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sup f([x_{j-1},\ p])(p - x_{j-1}) + \sup f([p,\ x_j])(x_j - p) \\
&= U(f,\ P_1)
\end{aligned}$$

이 성립한다. 즉 $U(f,\ P) \geq U(f,\ P_2) \geq U(f,\ P_1)$이다. ■

참고 6.1.5 한 분할에 의한 상합이 아무리 작더라도 그것은 다른 분할에 의한 하합보다 작아질 수 없다.

증명 구간 $[a,\ b]$의 두 분할 $P_1,\ P_2$가 주어졌을 때 이들의 공통세련분할 P_3에 대하여

$$L(f,\ P_1) \leq L(f,\ P_3) \leq U(f,\ P_3) \leq U(f,\ P_2)$$

이므로 $L(f,\ P_1) \leq U(f,\ P_2)$이다. ■

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이면 상합 $U(f,\ P)$들의 모임은 아래로 유계이며 하합 $L(f,\ P)$들의 모임은 위로 유계이다. 즉 상합들의 모임은 하한을 가지며 하합들의 모임은 상한을 가진다. 따라서 $[a,\ b]$에서 f의 상적분과 하적분을 다음과 같이 정의한다.

정의 6.1.6 | 상적분과 하적분

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고, $\wp$를 $[a,\ b]$의 분할들의 모임이라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) **리만 상적분**(upper integral) : $\overline{\int_a^b} f(x)dx \coloneqq (U)\int_a^b f(x)dx \coloneqq \inf\{U(f,\ P) \mid P \in \wp\}$

(ii) **리만 하적분**(lower integral) : $\underline{\int_a^b} f(x)dx \coloneqq (L)\int_a^b f(x)dx \coloneqq \sup\{L(f,\ P) \mid P \in \wp\}$

참고 6.1.7 $[a,\ b]$의 임의의 분할 $P_1,\ P_2$에 대하여 $L(f,\ P_1) \leq U(f,\ P_2)$이므로 다음이 성립한다.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

또한 $M \coloneqq \sup f([a,\ b]),\ m \coloneqq \inf f([a,\ b])$에 대하여 다음이 성립한다.

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a)$$ □

구간 $[a, b]$에서 f의 상합과 하합의 차를 원하는 대로 작게 만들 수 있다면 상적분과 하적분의 차는 0이 된다. 따라서 리만 적분을 다음과 같이 정의한다.

정의 6.1.8 | 리만 적분(Riemann integral)

함수 f가 길이가 양수인 구간 $[a, b]$에서 유계이고 상적분과 하적분이 같으면 'f는 $[a, b]$에서 **리만 적분 가능하다**'라고 말한다. 이때 $[a, b]$에서 f의 **리만 적분**을

$$\int_a^b f(x)dx := \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

로 정의한다. 여기서 f를 **피적분함수**라고 부르고 x를 **적분변수**라고 부른다. $[a, b]$에서 리만 적분 가능한 함수들의 모임을 $\mathfrak{R}[a, b]$로 나타낸다. 혼동할 염려가 없는 경우에는 $\mathfrak{R}[a, b]$를 $\mathfrak{R}$로 나타낸다.

참고 6.1.9 리만 적분에서 적분변수가 다른 것으로 바뀌어도 의미는 변함이 없다. 예컨대 다음은 모두 동일한 적분을 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^b f(\xi)d\xi$$

즉 리만 적분에서 적분변수는 실제 변수가 아니며 적분구간과 피적분함수가 실제 변수이다. □

이제 두 가지 의문이 발생한다. 하나는 주어진 함수가 리만 적분 가능한지 여부를 판별하는 방법이며, 다른 하나는 리만 적분 가능한 함수의 적분을 계산하는 방법이다.

리만 적분 가능성을 판별하는 방법은 리만 적분의 정의와 동치 명제인 리만 판정법과 리만 합을 이용하는 방법이 있으며, 불연속점의 개수를 이용하여 판별하는 르베그의 정리가 있다. 또한 리만 적분을 계산하는 방법은 미적분학의 기본정리와 부분적분법, 치환적분법 등이 있다.

정리 6.1.10 | 리만 판정법

함수 f가 $[a, b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $[a, b]$의 분할 P가 존재하여 $U(f, P)-L(f, P)<\epsilon$을 만족시키는 것이다.

증명 먼저 f가 $[a, b]$에서 적분 가능하다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 상한과 하한의 정의에 의하여 분할 P_1, P_2가 존재하여

$$U(f, P_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}, \quad L(f, P_2) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. 이때 P_1과 P_2의 공통세련분할 P에 대하여

$$U(f, P)-L(f, P) < \left(\int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

이 성립한다. 이제 역을 증명하자. 임의의 양수 ϵ에 대하여 $U(f, P)-L(f, P)<\epsilon$을 만족시키는 분할 P가 존재한다고 하자. 이 부등식으로부터 다음을 얻는다.

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f, P)-L(f, P) < \epsilon$$

여기서 ϵ은 임의의 양수이므로

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

을 얻는다. 따라서 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. ■

리만 적분의 정의에는 구간을 아주 작은 간격으로 자른다는 개념이 포함되어 있다. 따라서 구간을 얼마나 작은 간격으로 분할했는지에 대한 척도가 필요하다. 고등학교에서 배운 구분구적법은 구간을 등간격으로 분할하기 때문에 성분구간의 길이가 일정하지만 리만 적분에서는 그렇지 않기 때문에 다른 척도가 필요하다.

정의 6.1.11 | 분할의 노름

구간 $[a,\ b]$의 분할 $P=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$의 **노름**(norm)을 다음과 같이 정의한다.

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i \mid 1 \le i \le n\}$$

참고 6.1.12 주어진 구간에 대하여 노름이 얼마든지 작은 분할을 택할 수 있다. 즉 구간 $[a,\ b]$와 임의의 양수 δ에 대하여 $\|P\| < \delta$인 $[a,\ b]$의 분할 P가 존재한다. 왜냐하면 $b-a < n\delta$인 자연수 n에 대하여

$$P = \left\{a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+\frac{2(b-a)}{n},\ a+\frac{3(b-a)}{n},\ \cdots,\ b\right\}$$

라고 하면 P의 모든 성분구간의 길이는 δ보다 작기 때문이다. □

리만 판정법과 분할의 노름을 이용하여 함수의 적분 가능성을 증명하는 예를 살펴보자. 리만 적분의 정의에서는 임의의 분할 P를 생각해야 하지만, 리만 판정법에서는 부등식 $U(f,\ P)-L(f,\ P) < \epsilon$을 만족시키는 분할 P를 하나만 정해도 되므로 리만 판정법을 이용하여 적분 가능성을 증명하는 것은 매우 편리하다.

예제 6.1.13 함수 f가 $[a,\ b]$에서 단조이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보여라.

풀이 일반성을 잃지 않고 f가 $[a,\ b]$에서 증가한다고 하자. 만약 f가 상수함수이면 f는 당연히 적분 가능하다. 따라서 $f(a) < f(b)$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$$\|P\| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$$

인 $[a,\ b]$의 분할 $P=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$을 택하자. P의 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 f는 증가함수이므로 $M_i(f)=f(x_i)$, $m_i(f)=f(x_{i-1})$이다. 따라서

$$\begin{aligned} U(f,\ P)-L(f,\ P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))\|P\| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\|P\| = (f(x_n)-f(x_0))\|P\| \\ &= (f(b)-f(a))\|P\| < \epsilon \end{aligned}$$

이므로 리만 판정법에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. □

예제 6.1.14 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f는 $[a,\ b]$에서 균등연속이므로 양수 δ가 존재하여 $[a,\ b]$의 두 점 $s,\ t$에 대하여

$$|s-t|<\delta \text{일 때마다 } |f(s)-f(t)|<\frac{\epsilon}{b-a} \tag{1}$$

을 만족시킨다. $\|P\|<\delta$인 $[a,\ b]$의 분할 $P := \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$을 택하자. 그러면 P의 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$는 닫힌집합이고 f는 이 성분구간에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉 이 성분구간의 두 점 s_i와 t_i가 존재하여

$$f(s_i)=\sup f([x_{i-1},\ x_i])=M_i(f), \quad f(t_i)=\inf f([x_{i-1},\ x_i])=m_i(f)$$

를 만족시킨다. 그런데 $|s_i-t_i|<\delta$이므로 (1)에 의하여

$$|M_i(f)-m_i(f)|=|f(s_i)-f(t_i)|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

이 성립한다. 따라서

$$U(f,\ P)-L(f,\ P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))\Delta x_i<\frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon$$

이므로 리만 판정법에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. □

리만 판정법은 주어진 함수가 적분 불가능함을 증명할 때에도 사용된다. 즉 f가 $[a,\ b]$에서 적분 불가능함을 보일 때에는 다음 명제를 이용한다.

양수 ϵ이 존재하여 $[a,\ b]$의 임의의 분할 P에 대하여 $U(f,\ P)-L(f,\ P)\geq\epsilon$이다.

예제 6.1.15 유리수 집합의 특성함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $[0,\ 1]$에서 적분 불가능함을 보여라.

풀이 $\epsilon := 1$이라고 하자. 그리고 $P := \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 임의로 주어진 $[0,\ 1]$의 분할이라고 하자. P의 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에 유리수 q_i와 무리수 r_i가 존재하여

$$M_i(f)=\sup\chi_{\mathbb{Q}}([x_{i-1},\ x_i])\geq\chi_{\mathbb{Q}}(q_i)=1,$$
$$m_i(f)=\inf\chi_{\mathbb{Q}}([x_{i-1},\ x_i])\leq\chi_{\mathbb{Q}}(r_i)=0$$

이다. 따라서

$$U(f,\ P)-L(f,\ P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))\Delta x_i\geq\sum_{i=1}^{n}1\Delta x_i=1=\epsilon$$

을 얻는다. 즉 $[0,\ 1]$의 어떠한 분할도 $\chi_{\mathbb{Q}}$의 상합과 하합의 차를 1보다 작아지도록 하지 못하므로 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $[a,\ b]$에서 적분 불가능하다. □

6.2 리만 적분의 성질

이 절에서는 사칙계산, 부등호, 함수의 합성과 관련된 리만 적분의 성질을 살펴보자.

정리 6.2.1 적분의 선형성 1

함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 α가 실수이면 αf는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

증명 $\alpha = 0$인 경우 αf는 상수함수가 되어 당연히 적분 가능하다.

$\alpha > 0$인 경우를 증명하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 $P \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 존재하여

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) < \frac{\epsilon}{\alpha} \tag{2}$$

을 만족시킨다. 이때 각 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

$$\begin{aligned} \sup\{\alpha f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &= \alpha \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \\ \inf\{\alpha f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &= \alpha \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \end{aligned}$$

이므로 (2)에 의하여

$$U(\alpha f,\ P) - L(\alpha f,\ P) = \alpha(U(f,\ P) - L(f,\ P)) < \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon$$

을 얻는다. 따라서 리만 판정법에 의하여 αf는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 또한

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(x)dx &= \overline{\int_a^b} \alpha f(x)dx \\ &= \inf\{U(\alpha f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\} \\ &= \inf\{\alpha U(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\} \\ &= \alpha \inf\{U(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\} \\ &= \alpha \overline{\int_a^b} f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

가 성립한다.

$\alpha < 0$인 경우도 비슷한 방법으로 증명된다. 생략하지 않을 테니 걱정하지 말기 바란다. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 $P \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 존재하여

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) < -\frac{\epsilon}{\alpha}$$

을 만족시킨다.

이때 각 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

$$\begin{aligned}\sup\{\alpha f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &= \alpha \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},\\ \inf\{\alpha f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &= \alpha \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}U(\alpha f,\ P) - L(\alpha f,\ P) &= \alpha L(f,\ P) - \alpha U(f,\ P)\\ &= -\alpha(U(f,\ P) - L(f,\ P)) < -\alpha \cdot \left(-\frac{\epsilon}{\alpha}\right) = \epsilon\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 리만 판정법에 의하여 αf는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 또한

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x)dx &= \overline{\int_a^b} \alpha f(x)dx\\ &= \inf\{U(\alpha f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}\\ &= \inf\{\alpha L(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}\\ &= \alpha \sup\{L(f,\ P) \mid P \text{ is a partition of } [a,\ b]\}\\ &= \alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

가 성립한다. ■

정리 6.2.2 | 적분의 선형성 2

두 함수 $f,\ g$가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 $f+g$도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

증명 함수 $f,\ g$가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 P_f와 P_g가 존재하여

$$U(f,\ P_f) - L(f,\ P_f) < \frac{\epsilon}{2},\quad U(g,\ P_g) - L(g,\ P_g) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

을 만족시킨다. $P \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$을 P_f와 P_g의 공통세련분할이라고 하자. 각 i에 대하여

$$\begin{aligned}\sup\{f(x)+g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &\le \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} + \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},\\ \inf\{f(x)+g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} &\ge \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} + \inf\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}\end{aligned}$$

이므로

$$U(f+g,\ P) \le U(f,\ P) + U(g,\ P), \tag{4}$$
$$L(f+g,\ P) \ge L(f,\ P) + L(g,\ P) \tag{5}$$

가 성립한다. 두 부등식을 결합하고 (3)을 이용하면

$$\begin{aligned}U(f+g,\ P) - L(f+g,\ P) &\le U(f,\ P) + U(g,\ P) - L(f,\ P) - L(g,\ P)\\ &\le (U(f,\ P) - L(f,\ P)) + (U(g,\ P) - L(g,\ P))\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 리만 판정법에 의하여 $f+g$는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

한편 (3), (4), (5)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+g(x)dx &= \overline{\int_a^b} f(x)+g(x)dx \\ &\leq U(f+g,\ P) \leq U(f,\ P)+U(g,\ P) \\ &< L(f,\ P)+L(g,\ P)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \underline{\int_a^b} f(x)dx+\underline{\int_a^b} g(x)dx+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ &= \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+\epsilon\end{aligned}$$

이 성립하고, 같은 방법으로

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx > \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\epsilon$$

이 성립하므로 두 부등식을 결합하여

$$-\epsilon < \int_a^b f(x)+g(x)dx-\left(\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\right) < \epsilon$$

을 얻는다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

를 얻는다. ■

참고 6.2.3 정의역이 $\Re[a,\ b]$인 함수 I를

$$I(f) \coloneqq \int_a^b f(x)dx$$

로 정의하면 $\Re[a,\ b]$의 두 원소 $f,\ g$와 실수 α에 대하여

$$I(f+g)=\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=I(f)+I(g),$$

$$I(\alpha f)=\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx=\alpha I(f)$$

가 성립한다. 따라서 리만 적분은 $\Re[a,\ b]$에서의 선형범함수이다. □

따름정리 6.2.4 두 함수 $f,\ g$가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 $f-g$도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)-g(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

증명 g가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 정리 6.2.1에 의하여 $-g$도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 따라서 정리 6.2.2에 의하여 $f-g$도 적분 가능하다. 또한 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)-g(x)dx=\int_a^b f(x)+(-g(x))dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx.$$ ■

이제 적분과 부등호의 관계를 살펴보자.

보조정리 6.2.5 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \geq 0$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

증명 구간 $[a,\ b]$의 임의의 분할 $P \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$에 대하여

$$L(f,\ P) = \sum_{i=1}^{n} (\inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}) \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} 0 \Delta x_i = 0$$

이 성립한다. $[a,\ b]$에서 f의 적분은 $L(f,\ P)$ 이상이므로 정리의 부등식을 얻는다. ■

정리 6.2.6 | 적분과 부등호의 관계

두 함수 $f,\ g$가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \leq g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

증명 함수 $g-f$가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $g(x) - f(x) \geq 0$이므로 보조정리 6.2.5에 의하여 다음을 얻는다.

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) - f(x)dx \geq 0$$ ■

참고 6.2.7 집합 $\Re[a,\ b]$의 두 원소 $f,\ g$에 대하여

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad [\forall x \in [a,\ b] : f(x) \leq g(x)]$$

로 정의하면 $\leq$는 $\Re[a,\ b]$의 순서관계가 된다. 이때

$$I(f) \coloneqq \int_a^b f(x)dx$$

로 정의된 함수 I는 $\Re[a,\ b]$로부터 $\mathbb{R}$로의 순서보존사상이 된다. 즉 적분은 순서를 보존하는 선형범함수이다. □

정리 6.2.8 | 적분 구간에 대한 가법성

$a < c < b$이고 함수 f가 $[a,\ c]$와 $[c,\ b]$에서 적분 가능하면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f는 $[a,\ c]$에서 적분 가능하므로 $[a,\ c]$의 분할 P_a가 존재하여

$$U(f,\ P_a) - L(f,\ P_a) < \frac{\epsilon}{2} \tag{6}$$

을 만족시킨다.

마찬가지로 $[c,\ b]$의 분할 P_b가 존재하여

$$U(f,\ P_b) - L(f,\ P_b) < \frac{\epsilon}{2} \tag{7}$$

을 만족시킨다. $P = P_a \cup P_b$라고 하면 P는 $[a,\ b]$의 분할이고

$$\begin{aligned} U(f,\ P) - L(f,\ P) &= (U(f,\ P_a) + U(f,\ P_b)) - (L(f,\ P_a) + L(f,\ P_b)) \\ &= (U(f,\ P_a) - L(f,\ P_a)) + (U(f,\ P_b) - L(f,\ P_b)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

이므로 리만 판정법에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 또한 (6), (7)에 의하여

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \le U(f,\ P) = U(f,\ P_a) + U(f,\ P_b) \\ &\qquad < L(f,\ P_a) + L(f,\ P_b) + \epsilon \le \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \epsilon \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \ge L(f,\ P) = L(f,\ P_a) + L(f,\ P_b) \\ &\qquad > U(f,\ P_a) + U(f,\ P_b) - \epsilon \ge \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \epsilon \end{aligned}$$

이므로 두 부등식을 결합하면

$$-\epsilon < \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right) < \epsilon$$

을 얻는다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

를 얻는다. ■

정리 6.2.9 | 부분구간에서의 적분 가능성

함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 $a < c < d < b$이면 f는 $[c,\ d]$에서 적분 가능하다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 $[a,\ b]$의 분할 P_1이 존재하여

$$U(f,\ P_1) - L(f,\ P_1) < \epsilon$$

을 만족시킨다. $P_2 \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\} = P_1 \cup \{c,\ d\}$라고 하면 P_2는 P_1의 세련분할이므로

$$U(f,\ P_2) - L(f,\ P_2) < \epsilon$$

이 성립한다. $P \coloneqq P_2 \cap [c,\ d]$라고 하자. 그러면 P는 $[c,\ d]$의 분할이다. 또한 $c = x_r$, $d = x_s$인 두 점 x_r, x_s가 존재한다. 이때

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) = \sum_{i=r+1}^{s}(M_i - m_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = U(f,\ P_2) - L(f,\ P_2) < \epsilon$$

이므로 리만 판정법에 의하여 f는 $[c,\ d]$에서 적분 가능하다. ■

적분 구간에 대한 가법성은 더욱 일반화될 수 있다.

정의 6.2.10 | 다양한 구간에서의 리만 적분

함수 f가 $[a, b]$에서 적분 가능하고 c가 f의 정의역의 한 점일 때 다음과 같이 정의한다.

$$\int_b^a f(x)dx \coloneqq -\int_a^b f(x)dx, \quad \int_c^c f(x)dx \coloneqq 0$$

따름정리 6.2.11 함수 f가 구간 $[d, e]$에서 적분 가능하고 a, b, c가 $[d, e]$의 원소일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

증명 $a < c < b$인 경우는 정리 6.2.8에서 증명하였다.

$a = c$이거나 $a = b$ 또는 $b = c$인 경우는 정의 6.2.10에 의하여 정리의 등식이 성립한다.

$a < b < c$인 경우에는

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

가 성립한다. $b < a < c$인 경우에는

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\left(\int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

가 성립한다. $b < c < a$ 또는 $c < a < b$ 또는 $c < b < a$인 경우에도 비슷한 방법으로 정리의 등식을 유도할 수 있다. ■

적분 가능한 두 함수의 합성이 항상 적분 가능한 것은 아니다. 그러나 적분 가능한 함수와 연속함수의 합성은 적분 가능하다.

정리 6.2.12 | 합성함수의 적분 가능성

함수 f가 $[a, b]$에서 적분 가능하고 g가 $[c, d]$에서 연속이며 $f([a, b]) \subseteq [c, d]$이면 $g \circ f$는 $[a, b]$에서 적분 가능하다.

증명 $h = g \circ f$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. g는 $[c, d]$에서 균등연속이므로 양수 δ_1이 존재하여 $|s-t| < \delta_1$일 때마다 $|g(s) - g(t)| < \epsilon$이 성립한다. $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \epsilon\}$이라고 하자. f가 $[a, b]$에서 적분 가능하므로 $[a, b]$의 분할 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이 존재하여

$$U(f, P) - L(f, P) < \delta^2 \tag{8}$$

을 만족시킨다.

$$A \coloneqq \{i \in \mathbb{N} \mid i \le n, \ M_i(f) - m_i(f) < \delta\}, \ B \coloneqq \{i \in \mathbb{N} \mid i \le n, \ M_i(f) - m_i(f) \ge \delta\}$$

라고 하자. 만약 $i \in A$이면 δ의 정의에 의하여 $M_i(h) - m_i(h) \le \epsilon$이 성립한다.

구간 $[a,\ b]$에서 f의 상한을 M, 하한을 m이라고 하자. 그리고

$$K \coloneqq \sup\{|g(t)| \mid m \le t \le M\}$$

이라고 하자. 만약 $i \in B$이면 $M_i(h) - m_i(h) \le 2K$가 성립한다. 그런데 (8)에 의하여

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \le \sum_{i \in B} (M_i(f) - m_i(f)) \Delta x_i < \delta^2$$

이므로 $\sum_{i \in B} \Delta x_i < \delta$를 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} U(h,\ P) - L(h,\ P) &= \sum_{i \in A} (M_i(h) - m_i(h)) \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i(h) - m_i(h)) \Delta x_i \\ &< \epsilon(b-a) + 2K\delta \le \epsilon(b - a + 2K) \end{aligned}$$

가 성립한다. 여기서 ϵ은 임의의 양수이므로 $\epsilon(b-a+2K)$도 얼마든지 작은 양수가 될 수 있다. 따라서 리만 판정법에 의하여 h는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. ■

따름정리 6.2.13 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 $|f|$도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \le \int_a^b |f(x)| \, dx$$

증명 $[a,\ b]$에서 f의 상한을 M, 하한을 m이라고 하자. $g(x) = |x|$라고 하면 g는 $[m,\ M]$에서 연속이다. 따라서 정리 6.2.12에 의하여 $|f| = g \circ f$는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 또한 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$이며 이 식의 각 변을 적분하면 다음 부등식을 얻는다.

$$-\int_a^b |f(x)| dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b |f(x)| dx$$

이 부등식은 우리가 얻고자 하는 부등식과 동치이다. ■

따름정리 6.2.14 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 n이 자연수이면 f^n도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

증명 $g(x) = x^n$이라고 하면 g는 연속함수이고 $f^n = g \circ f$이다. 따라서 정리 6.2.12에 의하여 f^n도 적분 가능하다. ■

따름정리 6.2.15 두 함수 $f,\ g$가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 fg도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

증명 f와 g가 각각 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 따름정리 6.2.14에 의하여 f^2과 g^2도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. 또한

$$fg = \frac{1}{2}\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\}$$

이고 정리 6.2.1, 정리 6.2.2, 따름정리 6.2.4, 따름정리 6.2.14에 의하여 우변이 적분 가능하므로 좌변도 적분 가능하다. ■

6.3 리만 합

상합과 하합 대신 리만 합을 이용하여 리만 적분을 정의할 수 있다. 리만 합을 이용하여 리만 적분을 정의하는 방법은 두 가지가 있는데 이들은 모두 상합과 하합을 이용하여 정의한 리만 적분과 동치이다.

정의 6.3.1 리만 합

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고, $P := \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 $[a,\ b]$의 분할이라고 하자. P의 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 점 $t_i \in [x_{i-1},\ x_i]$를 하나씩 택하여 만든 유한수열 $t := \{t_i\}$에 대하여

$$S(f,\ P,\ t) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

를 P와 t에 대한 f의 **리만 합**(Riemann sum)이라고 부른다. 이때 t를 P의 **표집수열**이라고 부른다.

예제 6.3.2 $f(x) = x^2$이고 $[0,\ 1]$을 n등분한 분할이

$$P_n := \left\{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}\right\}$$

으로 주어졌다고 하자. P_n의 표집수열 t를 변수로 했을 때 $S(f,\ P,\ t)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 각 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i] := [(i-1)/n,\ i/n]$에서 f가 증가하므로 f는 성분구간의 오른쪽 끝점에서 최댓값을 가지며 왼쪽 끝점에서 최솟값을 가진다. 따라서 $t_i = i/n$일 때

$$S(f,\ P_n,\ t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

이 리만 합의 최댓값이며, $t_i = (i-1)/n$일 때

$$S(f,\ P_n,\ t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

이 리만 합의 최솟값이다. □

위 예제에서 리만 합의 최댓값은 상합과 같으며 리만 합의 최솟값은 하합과 같다. 일반적으로 주어진 함수가 적분 가능한 경우 분할이 세련될수록 상합과 하합의 차는 작아지므로 리만 합의 최댓값과 최솟값의 차도 작아진다. 즉 분할이 세련될수록 리만 합의 크기는 표집수열에 상관없이 리만 적분의 값에 가까워진다. 따라서 리만 합의 수렴을 다음과 같이 정의한다.

정의 6.3.3 리만 합의 수렴

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 I가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $[a,\ b]$의 분할 P_ϵ이 존재하여 P_ϵ의 임의의 세련분할 P와 P의 표집수열 t에 대하여 $|S(f,\ P,\ t) - I| < \epsilon$이 성립하면 $[a,\ b]$에서 'f의 **리만 합이 I에 수렴한다**'라고 말하며 $\lim_{\|P\| \to 0} S(f,\ P,\ t) = I$로 나타낸다.

예제 6.3.4 $f(x) \coloneqq x^2$일 때 $[0, 1]$에서 f의 리만 합이 수렴함을 증명하여라.

풀이 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f는 $[0, 1]$에서 리만 적분 가능하고, 적분값이 $1/3$이므로 $[0, 1]$의 분할 P_ϵ이 존재하여

$$\frac{1}{3} - \epsilon < L(f, P_\epsilon) \quad \text{그리고} \quad U(f, P_\epsilon) < \frac{1}{3} + \epsilon$$

을 만족시킨다. 이때 P가 P_ϵ의 세련분할이고 t가 P의 표집수열이면

$$\frac{1}{3} - \epsilon < L(f, P_\epsilon) \le L(f, P) \le S(f, P, t) \le U(f, P) \le U(f, P_\epsilon) < \frac{1}{3} + \epsilon$$

이 성립한다. 즉

$$\left| S(f, P, t) - \frac{1}{3} \right| < \epsilon$$

이므로 $[0, 1]$에서 f의 리만 합은 $1/3$에 수렴한다. □

위 예제의 내용을 일반화하면 다음을 얻는다.

정리 6.3.5 리만 합을 이용한 리만 적분의 정의

함수 f가 $[a, b]$에서 유계이고 $a < b$라고 하자. 이때 f가 $[a, b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 $[a, b]$에서 f의 리만 합이 수렴하는 것이다. f가 $[a, b]$에서 적분 가능할 때 $[a, b]$에서 f의 리만 합의 극한은 $[a, b]$에서 f의 적분값과 동일하다.

증명 $[\Rightarrow]$ f가 $[a, b]$에서 적분 가능하다고 하자. $[a, b]$에서 f의 적분값을 I라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 리만 판정법에 의하여 $[a, b]$의 분할 P_ϵ이 존재하여

$$I - \epsilon < L(f, P_\epsilon) \quad \text{그리고} \quad U(f, P_\epsilon) < I + \epsilon$$

을 만족시킨다. P가 P_ϵ의 세련분할이고 t가 P의 표집수열이면

$$I - \epsilon < L(f, P_\epsilon) \le L(f, P) \le S(f, P, t) \le U(f, P) \le U(f, P_\epsilon) < I + \epsilon$$

이므로 $|S(f, P, t) - I| < \epsilon$이다. 따라서 $[a, b]$에서 f의 리만 합은 I에 수렴한다.

$[\Leftarrow]$ $[a, b]$에서 f의 리만 합이 I에 수렴한다고 하자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 리만 합의 극한의 정의에 의하여 $[a, b]$의 분할 P가 존재하여 P의 임의의 표집수열 t에 대하여

$$|S(f, P, t) - I| < \frac{\epsilon}{3} \tag{9}$$

이 성립한다. $P \coloneqq \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라고 하자. f는 $[a, b]$에서 유계이므로 성분구간 $[x_{i-1}, x_i]$에 점 t_i, u_i가 존재하여

$$f(t_i) - f(u_i) > M_i(f) - m_i(f) - \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

을 만족시킨다.

따라서 (9)에 의하여

$$
\begin{aligned}
U(f,\ P)-L(f,\ P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i \\
&< \sum_{i=1}^{n}(f(t_i)-f(u_i))\Delta x_i+\frac{\epsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x_i-I\right|+\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\Delta x_i\right|+\frac{\epsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\
&< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon
\end{aligned}
$$

이므로 리만 판정법에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. ■

정의 6.3.3을 수정하여 다음과 같은 동치 조건을 얻을 수 있다.

정리 6.3.6 | 리만 적분의 고전적 정의

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 $a<b$라고 하자. 이때 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 실수 I가 존재하여 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $[a,\ b]$의 분할 P가 $\|P\|<\delta$를 만족시킬 때마다 P의 표집수열 t에 대하여 $|S(f,\ P,\ t)-I|<\epsilon$이 성립하는 것이다. 이 경우 $[a,\ b]$에서 f의 리만 적분값은 I가 된다.

증명* $[\Rightarrow]$ f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하고 적분값을 I라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 리만 판정법에 의하여 $[a,\ b]$의 분할 $P_1 \coloneqq \{y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_m\}$이 존재하여

$$I-\frac{\epsilon}{4}<L(f,\ P_1)\le I\le U(f,\ P_1)<I+\frac{\epsilon}{4}$$

을 만족시킨다. $[a,\ b]$에서 $|f|$의 상한을 M이라고 하자. 일반성을 잃지 않고 $M>0$이고 $m\ge 2$라고 하자. 그리고

$$\delta<\min\left\{\frac{\epsilon}{2M(m-1)},\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \cdots,\ \Delta y_m\right\}$$

을 만족시키는 양수 δ를 택하자.

이제 $P\coloneqq\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 $[a,\ b]$의 분할이고 $\|P\|<\delta$를 만족시킨다고 하자. 그리고 t가 P의 표집수열이라고 하자. P의 성분구간 $[x_{i-1},\ x_i]$가 임의로 주어졌다고 하자.

만약 $[x_{i-1},\ x_i]\subseteq[y_{j-1},\ y_j]$라면, 즉 $[x_{i-1},\ x_i]$가 P_1의 한 성분구간에 포함된다면 $m_j=\inf f(x)$, $M_j=\sup f(x)$, $x\in[y_{j-1},\ y_j]$, $t_i\in[x_{i-1},\ x_i]$에 대하여 $m_j\le f(t_i)\le M_j$가 성립한다.

그렇지 않고 $[x_{i-1},\ x_i]$가 P_1의 한 성분구간에 포함되지 않는다면 $[x_{i-1},\ x_i]$는 P_1의 두 개의 성분구간에 포함된다. δ가 충분히 작으므로 $[x_{i-1},\ x_i]$는 P_1의 세 개의 성분구간에 걸쳐있지는 않는다. 즉

$$y_{j-1}<x_{i-1}<y_j<x_i<y_{j+1}$$

이다. 이러한 상황은 많아야 $m-1$번 발생한다. 한편

$$f(t_i)(x_i-x_{i-1})=f(t_i)(x_i-y_j)+f(t_i)(y_j-x_{i-1})$$

이므로 $t_i \in [x_{i-1},\ y_j]$이면 $m_j \le f(t_i) \le M_j$이고, $t_i \in [y_j,\ x_i]$이면

$$f(t_i)(x_i - y_j) < f(t_i)\delta < \frac{f(t_i)\epsilon}{2M(m-1)} \le \frac{\epsilon}{2(m-1)}$$

이 성립하는데, 이것은 많아야 $(m-1)$번 발생한다. 따라서 이러한 차이들의 합은 $\epsilon/2$보다 작다. 이로써

$$|S(f,\ P,\ t) - I| \le (U(f,\ P_1) - L(f,\ P_1)) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이므로 정리의 결론을 얻는다.

[$\Leftarrow$] 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 정리의 조건을 만족시키는 양수 δ가 주어졌다고 하자. $\|P_\epsilon\| < \delta$를 만족시키는 $[a,\ b]$의 한 분할 P_ϵ을 택하자. 그러면 $[a,\ b]$의 분할 P가 P_ϵ의 세련분할일 때마다 $\|P\| < \delta$이므로 정리의 조건에 의하여 $|S(f,\ P,\ t) - I| < \epsilon$이 성립한다. 즉 $[a,\ b]$에서 f의 리만 합이 I에 수렴하므로 정리 6.3.5에 의하여 $[a,\ b]$에서 f는 적분 가능하며 적분값은 I이다. ■

리만이 처음 제시한 리만 적분의 정의는 정리 6.3.6의 명제였다. 그 후 다르부(Darboux)가 제시한 동치인 정의가 정의 6.1.8이다. 정의 6.3.3의 방법은 정리 6.3.6의 명제를 더 편리하게 수정한 것이다. 이들은 모두 동치이므로 오늘날에는 이들을 모두 리만 적분이라고 부른다.

함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능한 경우 고등학교에서 배운 구분구적법으로 적분값을 계산할 수 있다.

따름정리 6.3.8 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

이와 같은 극한으로 적분값을 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 부른다.

증명 $[a,\ b]$에서 f의 적분값을 I라고 하자. 그리고 $[a,\ b]$를 n등분한 분할을 P_n이라고 하자. 그러면

$$P_n = \left\{a,\ a + \frac{b-a}{n},\ a + \frac{2(b-a)}{n},\ a + \frac{3(b-a)}{n},\ \cdots,\ b\right\}$$

이다. P_n의 각 성분구간의 오른쪽 끝점

$$t_{n,i} \coloneqq a + \frac{b-a}{n} i$$

를 택하여 만든 표집수열을 $t_n \coloneqq \{t_{n,i}\}$라고 하자.

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 정리 6.3.6에 의하여 양수 δ가 존재하여 $\|P\| < \delta$일 때마다 P의 임의의 표집수열 t에 대하여 $|S(f,\ P,\ t) - I| < \epsilon$이 성립한다. $b - a < N\delta$인 자연수 N을 택하면 $\|P_N\| = (b-a)/N < \delta$이므로 $|S(f,\ P_N,\ t_N) - I| < \epsilon$을 얻는다. $n > N$이라고 하면 $\|P_n\| < \delta$이고

$$S(f,\ P_n,\ t_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

이므로

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) - I \right| < \epsilon$$

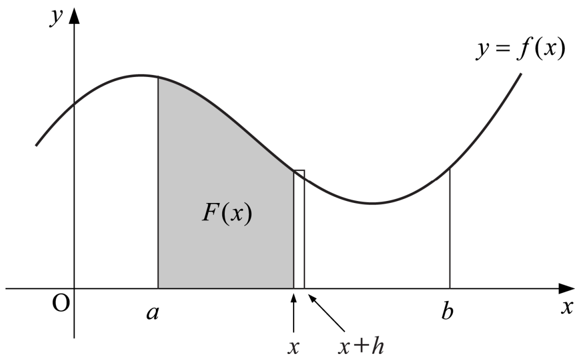
이 성립한다. ■

6.4 미적분학의 기본정리

함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) > 0$이라고 하자. 그리고

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,\ b]$$

라고 하자. 그러면 $F(x)$는 $[a,\ x]$에서 f의 그래프와 x축 사이의 넓이를 나타내는 함수가 된다. 이제 작은 양수 h가 주어졌다고 하자.



위 그림에서 보는 바와 같이 가로가 h이고 세로가 $f(x)$인 직사각형의 넓이는 $F(x+h)-F(x)$의 값에 가깝다. h가 충분히 작으면 직사각형의 넓이가 작아지므로 $F(x+h)-F(x)$의 값도 작아진다. 따라서 F는 x에서 연속이 될 것이라고 추론할 수 있다.

특히 그림에서 직사각형의 세로가 길수록 x에서 F의 변화율은 크고 직사각형의 세로가 짧을수록 x에서 F의 변화율은 작아진다. 이때 x에서 직사각형의 세로의 길이는 $f(x)$와 같으므로 $F'(x) = f(x)$가 된다는 것도 추론할 수 있다.

정리 6.4.1 | 적분으로 정의된 함수

함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. 이때

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,\ b] \tag{10}$$

라고 하면 F는 $[a,\ b]$에서 연속이다. 만약 f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 F는 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $F'(x) = f(x)$가 성립한다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $[a,\ b]$에서 $|f| < M$인 양수 M을 택하자. 그러면 $\delta \coloneqq \epsilon / M$도 양수이다. 이제 $|r-s| < \delta,\ a \le r < s \le b$일 때마다

$$\begin{aligned} |F(r)-F(s)| &= \left| \int_a^r f(t)dt - \int_a^s f(t)dt \right| = \left| \int_s^r f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_r^s f(t)dt \right| \le \int_r^s |f(t)|dt \le \int_r^s M dt \\ &= M(s-r) = M|s-r| < M\delta = \epsilon \end{aligned}$$

이므로 F는 $[a,\ b]$에서 균등연속이다.

다음으로 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $c\in(a,\ b)$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 연속의 정의에 의하여 양수 δ가 존재하여 $|x-c|<\delta,\ x\in(a,\ b)$일 때마다 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$이 성립한다. 따라서 $0<|x-c|<\delta$인 임의의 $x\in(a,\ b)$에 대하여

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right| &= \left|\frac{1}{x-c}\left(\int_a^x f(t)dt-\int_a^c f(t)dt\right)-f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt-f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt-\frac{1}{x-c}\int_c^x f(c)dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-c}\right|\left|\int_c^x f(t)-f(c)dt\right| \\ &\le \left|\frac{1}{x-c}\right|\left|\int_c^x |f(t)-f(c)|dt\right| \\ &< \frac{1}{|x-c|}\epsilon|x-c|=\epsilon\end{aligned}$$

이므로 $F'(c)=f(c)$이다. ■

함수 f에 대하여 (10)으로 정의된 함수 F는 $F'=f$를 만족시킨다. 이러한 함수를 부정적분이라고 부른다.

정의 6.4.2 부정적분

함수 f에 대하여 $F'=f$를 만족시키는 함수 F를 f의 **역도함수**라고 부른다. 특히 f가 적분 가능한 경우 f의 역도함수를 **부정적분**(indefinite integral)이라고 부르고

$$\int f(x)dx$$

로 나타낸다. 부정적분과 구분하기 위하여 구간에서 f의 리만 적분을 **정적분**(definite integral)이라고 부르기도 한다.

함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 F가 f의 한 부정적분이라고 하자. 그리고 $x\in[a,\ b]$에 대하여

$$G(x):=\int_a^x f(t)dt$$

라고 하자. 그러면 $G'=f=F'$이다. 도함수가 동일한 두 함수의 차이는 상수이므로 $G(x)\equiv F(x)+k$인 상수 k가 존재한다. 그런데 $F(a)+k=G(a)=0$이므로 $k=-F(a)$이다. 즉

$$G(x)=F(x)-F(a)$$

이다. 여기에 $x=b$를 대입하면 다음 등식을 얻는다.

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)=F(b)-F(a)$$

여기서 t를 x로 바꾸어도 동일한 적분이므로 다음을 얻는다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

정리 6.4.3 미적분학의 기본정리

함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 F가 f의 한 부정적분이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

위 정리에서 $F(b)-F(a)$를 다음과 같이 나타낸다.

$$F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

이 기호를 이용하여 미적분학의 기본정리를 나타내면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

부정적분은 미분의 역연산을 의미하며 정적분은 함수의 그래프로 표현되는 영역의 넓이를 나타내므로 본래는 서로 무관한 개념이다. 이렇게 서로 무관한 개념이 실제 계산에서 밀접한 연관을 가지고 있다는 것은 매우 놀라운 일이다.

예제 6.4.4 구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$으로 정의된 함수 f를 적분하여라.

풀이 $F(x) := x^3 + x^2 + 3x$라고 하면 $F' = f$이므로 F는 f의 부정적분이다. 따라서 미적분학의 기본정리에 의하여

$$\int_1^2 f(x)dx = F(x)\Big|_1^2 = (x^3 + x^2 + 3x)\Big|_1^2 = 18 - 5 = 13$$

이다. 한편 $G(x) := x^3 + x^2 + 3x + 1$이라고 하면 G도 f의 부정적분이다. 이때

$$\int_1^2 f(x)dx = G(x)\Big|_1^2 = (x^3 + x^2 + 3x + 1)\Big|_1^2 = 19 - 6 = 13$$

이므로 부정적분 F를 사용하여 계산했을 때와 동일한 값을 얻는다. □

예제 6.4.5 포물선 $y = x^2 - 1$과 x축, y축으로 둘러싸이고 제 4 사분면에 있는 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 함수 $y = x^2 - 1$의 그래프는 x축과 $(1,\ 0)$에서 만나고 y축과 $(0,\ -1)$에서 만난다. 따라서 $[0,\ 1]$에서 $|x^2 - 1|$의 적분을 계산하면 구하는 도형의 넓이가 된다. 그런데 $[0,\ 1]$에서 $x^2 - 1$은 0 이하의 값을 가진다. 따라서 구하는 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^1 |x^2 - 1|\,dx = \int_0^1 -(x^2 - 1)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$ □

미적분학의 기본정리에 의하여 미분 가능한 함수 f에 대하여

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{11}$$

가 성립할 것처럼 보이지만, 일반적으로 이것은 성립하지 않는다.

보기 6.4.6 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$일 때에는

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right] = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

이고 $x = 0$일 때에는

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(h \sin\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

이므로 f는 $\mathbb{R}$ 에서 미분 가능하다. 그러나

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

이라고 하면 $x_n \to 0$이고 $x_n \neq 0$이지만

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} f'(x_n) &= \lim_{n \to \infty}\left[2x_n \sin\frac{1}{x_n^2} - \frac{2}{x_n}\cos\frac{1}{x_n^2}\right] \\ &= \lim_{n \to \infty}\left[\frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi\right] \\ &= \lim_{n \to \infty}\left(-2\sqrt{2n\pi}\right) = -\infty \end{aligned}$$

이므로 f'은 0의 임의의 근방에서 유계가 아니다. 따라서 f'은 0을 원소로 갖는 구간에서 적분 불가능하다. □

그러나 만약 f'이 적분 가능하다는 조건이 추가되면 (11)이 성립한다.

정리 6.4.7 도함수의 정적분

함수 f가 $[a, b]$에서 미분 가능하고 f'이 $[a, b]$에서 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f'이 적분 가능하므로 $[a, b]$의 분할 $P := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이 존재하여 P의 임의의 표집수열 $t := \{t_i\}$에 대하여

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f'(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f'(x)dx\right| < \epsilon \tag{12}$$

을 만족시킨다. 평균값 정리에 의하여 각 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)\Delta x_i \tag{13}$$

를 만족시키는 점 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$가 존재한다. 따라서 (12), (13)에 의하여 다음 부등식을 얻는다.

$$\left|(f(b) - f(a)) - \int_a^b f'(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) - \int_a^b f'(x)dx\right| < \epsilon \quad ■$$

두 함수 f, g가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하면 $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

가 성립한다. 만약 f'과 g'이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 위 등식에 의하여 $(fg)'$도 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 정리 6.4.7에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

이로써 다음 정리를 얻는다.

정리 6.4.8 | 부분적분법

두 함수 f, g가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 f', g'이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

예제 6.4.9 $[1,\ 2]$에서 $\ln x$를 적분하여라.

풀이 $f(x) \coloneqq x$, $g(x) \coloneqq \ln x$라고 하면 $f'(x) = 1$, $g'(x) = 1/x$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\ dx &= \int_1^2 f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)g'(x)dx \\ &= x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1\,dx = (2\ln 2 - 0) - 1 = 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

□

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 $g(x) \geq 0$일 때

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

를 **밀도함수 g에 대한 f의 가중평균**이라고 부른다. x축 위에 f의 그래프와 같은 모양의 물체가 놓여 있고 각 점 x 위에서 물체의 밀도가 $g(x)$와 같을 때 g에 대한 f의 가중평균은 물체의 **질량중심**이 된다. 물체의 질량중심에 실을 연결하여 매달아 놓으면 물체는 한쪽으로 기울지 않고 균형을 잡는다.

정리 6.4.10 | 적분의 제 1 평균값 정리

두 함수 f, g가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $g(x) \geq 0$이라고 하자. $[a,\ b]$에서 f의 하한이 m이고 상한이 M이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$$

를 만족시키는 점 $c \in [m,\ M]$이 존재한다. 만약 f가 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$$

를 만족시키는 점 $x_0 \in [a,\ b]$가 존재한다.

증명 $[a,\ b]$에서 $g \ge 0$이므로

$$m\int_a^b g(x)dx \ \le\ \int_a^b f(x)g(x)dx \ \le\ M\int_a^b g(x)dx$$

가 성립한다. 만약 $[a,\ b]$에서 g의 적분값이 0이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

이므로 자명하게 정리의 결론을 얻는다. 만약 $[a,\ b]$에서 g의 적분값이 양수이면

$$c = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}$$

는 $[m,\ M]$에 속하는 점이다. 더욱이 만약 f가 연속함수이면 사잇값 정리에 의하여 $f(x_0) = c$인 점 $x_0 \in [a,\ b]$가 존재한다. ■

정리 6.4.11 | 적분의 제 2 평균값 정리

두 함수 $f,\ g$가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $g(x) \ge 0$이며 $m,\ M$이 실수이고 $m \le \inf f([a,\ b]),\ M \ge \sup f([a,\ b])$가 성립한다고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = m\int_a^c g(x)dx + M\int_c^b g(x)dx \tag{14}$$

를 만족시키는 점 $c \in [a,\ b]$가 존재한다. 만약 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \ge 0$이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = M\int_c^b g(x)dx \tag{15}$$

를 만족시키는 점 $c \in [a,\ b]$가 존재한다.

증명 $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$F(x) \coloneqq m\int_a^x g(t)dt + M\int_x^b g(t)dt$$

라고 하자. 그러면 정리 6.4.1에 의하여 F는 $[a,\ b]$에서 연속이다. $g \ge 0$이므로 임의의 $t \in [a,\ b]$에 대하여 $mg(t) \le f(t)g(t) \le Mg(t)$가 성립한다. 이 부등식의 각 식을 적분하면

$$F(b) = m\int_a^b g(t)dt \ \le\ \int_a^b f(t)g(t)dt \ \le\ M\int_a^b g(t)dt = F(a)$$

를 얻는다. F가 연속이므로 사잇값 정리에 의하여

$$F(c) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

를 만족시키는 점 $c \in [a,\ b]$가 존재한다. 즉 (14)가 성립한다. $f \ge 0$인 경우 (14)에서 $m = 0$이라고 하면 (15)를 얻는다. ■

6.5 변수변환

복잡한 함수를 적분할 때 변수를 변환하여 적분하기 쉬운 모양으로 바꾸는 방법을 살펴보자.

정리 6.5.1 적분의 변수변환 (치환적분법)

함수 ϕ가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 연속인 도함수를 가지며 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $\phi'(x) \neq 0$이라고 하자. 또한 함수 f가 $[c,\ d] := \phi([a,\ b])$에서 적분 가능하다고 하자. 이때 $f \circ \phi \cdot |\phi'|$은 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 다음 등식이 성립한다.

$$\int_c^d f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))|\phi'(x)|dx$$

증명* ϕ가 $[a,\ b]$에서 순증가한다고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 $[c,\ d]$에서 유계이므로 양수 M이 존재하여 $[c,\ d]$에서 $|f| \leq M$을 만족시킨다. ϕ'은 $[a,\ b]$에서 균등연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|s_j - c_j| < \delta$, $s_j \in [a,\ b]$, $c_j \in [a,\ b]$일 때마다

$$|\phi'(s_j) - \phi'(c_j)| < \frac{\epsilon}{2M(b-a)}$$

즉

$$|f(\phi(s_j))(\phi'(s_j) - \phi'(c_j))| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \tag{16}$$

을 만족시킨다.

다음으로 역함수 정리에 의하여 ϕ^{-1}는 $[c,\ d]$에서 미분 가능하며 연속인 도함수를 가진다. 따라서 양수 η가 존재하여 $|s-c| < \eta$, $s \in [c,\ d]$, $c \in [c,\ d]$일 때마다 $|\phi^{-1}(s) - \phi^{-1}(c)| < \delta$를 만족시킨다.

끝으로 f는 $[c,\ d] = [\phi(a),\ \phi(b)]$에서 적분 가능하므로 $[c,\ d]$의 분할 $P = \{t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_n\}$이 존재하여 $\|P\| < \eta$를 만족시키고, P의 임의의 표집수열 $u := \{u_j\}$에 대하여

$$\left| S(f,\ P,\ u) - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt \right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{17}$$

을 만족시킨다. $x_j = \phi^{-1}(t_j)$라고 하면 $\widetilde{P} := \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$은 $[a,\ b]$의 분할이고 $\|\widetilde{P}\| < \delta$를 만족시킨다.

$s_j \in [x_{j-1},\ x_j]$라고 하고 $u_j := \phi(s_j)$라고 하자. 그러면 평균값 정리에 의하여 $c_j \in [x_{j-1},\ x_j]$가 존재하여

$$\phi(x_j) - \phi(x_{j-1}) = \phi'(c_j)\Delta x_j$$

를 만족시킨다. 따라서 c_j, u_j, t의 조건에 의하여 $u_j \in [t_{j-1},\ t_j]$이고

$$f(\phi(s_j))\phi'(c_j)\Delta x_j = f(u_j)(\phi(x_j) - \phi(x_{j-1})) = f(u_j)(t_j - t_{j-1})$$

이 성립한다.

그러므로 (16), (17)에 의하여 다음을 얻는다.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\phi(s_j))\phi'(s_j)\Delta x_j - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n} f(\phi(s_j))(\phi'(s_j)-\phi'(c_j))\Delta x_j\right|$$
$$+\left|\sum_{j=1}^{n} f(u_j)(t_j-t_{j-1})-\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

이 부등식은 $\widetilde{P}$의 임의의 세련분할에 대하여 성립하므로 정리 6.3.5에 의하여 $(f\circ\phi)\cdot|\phi'|$은 $[a,\ b]$에서 적분 가능하고 정리의 등식을 얻는다.

ϕ가 $[a,\ b]$에서 순감소하는 경우에는 위의 방법에서 $\widetilde{P}:=\{\phi^{-1}(t_n),\ \cdots,\ \phi^{-1}(t_0)\}$, $|\phi'|=-\phi'$으로 둔다. 그 후 평균값 정리를 이용하여 등식

$$\phi(x_{j-1})-\phi(x_j)=\phi'(c_j)(x_{j-1}-x_j)=|\phi'(c_j)|\Delta x_j$$

를 얻는다. 그리하여 동일한 방법으로 동일한 부등식을 얻는다. ■

위 정리는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

ϕ가 $[a,\ b]$에서 C^1급이고 ϕ'이 $[a,\ b]$에서 0이 되지 않으며 f가 $\phi([a,\ b])$에서 적분 가능하면

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

f가 연속인 경우 위 정리의 증명은 다음과 같이 더 간단해진다.

정리 6.5.2 적분의 변수변환 (피적분함수가 연속인 경우)

ϕ가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 연속인 도함수를 가지며 f가 $\phi([a,\ b])$에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx$$

증명 함수 G, F를 다음과 같이 정의하자.

$$G(x):=\int_a^x f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt,\quad x\in[a,\ b],$$
$$F(u):=\int_{\phi(a)}^{u} f(t)dt,\quad u\in\phi([a,\ b]).$$

그러면 $m:=\inf\phi([a,\ b])$에 대하여

$$F(u)=\int_m^u f(t)dt-\int_m^{\phi(a)} f(t)dt$$

가 성립한다. 정리 6.4.1에 의하여 다음을 얻는다.

$$G'(x)=f(\phi(x))\,\phi'(x)\quad \text{그리고}\quad F'(u)=f(u).$$

연쇄 법칙에 의하여 임의의 $x \in [a, b]$에 대하여

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(\phi(x))) = 0$$

이 성립한다. 따라서 따름정리 5.3.8에 의하여 $G(x) - F(\phi(x))$는 $[a, b]$에서 상수이다. $x = a$를 대입하여 계산하면 임의의 $x \in [a, b]$에 대하여 $G(x) - F(\phi(x)) = 0$임을 알 수 있다. 그러므로 $[a, b]$에서 $G(x) = F(\phi(x))$가 성립하고, 이 등식에 $x = b$를 대입하면 정리의 등식을 얻는다. ■

예제 6.5.3 r가 양수일 때 반지름이 r인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = r^2$이다. 이 식을 이용하여 원의 넓이 구하는 공식을 유도하여라.

풀이 주어진 원의 방정식을 y에 대하여 풀면 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$이다. $0 \le x \le r$일 때 이 함수의 그래프는 반지름이 r이고 좌표평면의 제 1 사분면에 놓인 사분원이 된다. 따라서 $[0, r]$에서 이 함수의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한 뒤 4배를 하면 원의 넓이가 된다.

$$f(x) \coloneqq \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \phi(\theta) \coloneqq r\cos\theta$$

라고 하자. 정리 6.5.2의 x를 θ로 바꾸고 t를 x로 바꾸어 적용하면

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{\phi(\pi/2)}^{\phi(0)} f(x)dx = \int_{\pi/2}^0 f(\phi(\theta))\phi'(\theta)d\theta = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\theta}\,(-r\sin\theta)d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^0 r^2\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)d\theta = -r^2\int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\,d\theta \\
&= -r^2\int_{\pi/2}^0 \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = -r^2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=0} = \frac{\pi}{4}r^2
\end{aligned}$$

을 얻는다. 이 값은 사분원의 넓이이므로 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2이다. □

적분의 변수변환 공식은 '$u = \phi(x)$일 때 $du = \phi'(x)dx$이다'로 기억하면 편리하다.

예제 6.5.4 f가 $[2, 5]$에서 음이 아니고 연속이며

$$\int_2^5 f(x)dx = 3$$

을 만족시키는 임의의 함수라고 하자. 이때

$$I_f \coloneqq \int_1^2 f(x^2+1)dx$$

의 상계를 하나 구하여라.

풀이 $u = x^2 + 1$이라고 하자. 그러면 $du = 2x\,dx$이다. 피적분함수가 du를 포함하고 있었더라면 이 문제는 훨씬 쉬웠을 것이다. 그러나 피적분함수가 du를 포함하지 않으므로 약간의 변형을 해야 한다. x가 구간 $[1, 2]$의 값이므로 $x \ge 1$이다. 또한 f가 이 구간에서 음이 아니므로 $f(x^2+1) \le 2xf(x^2+1)/2$를 얻는다. 따라서 다음 부등식을 얻는다.

$$I_f = \int_1^2 f(x^2+1)dx \le \frac{1}{2}\int_1^2 2xf(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_2^5 f(u)du = \frac{3}{2}.$$ □

6.6 연속이 아닌 함수의 적분

앞서 예제 6.1.14에서 연속인 함수가 적분 가능함을 보였다. 그러나 수학의 다양한 응용 분야에서 마주치는 함수는 연속인 것보다 불연속인 것이 더 많다. 따라서 불연속 함수의 적분 가능성에 대하여 논의하는 것은 의미가 있다.

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이고 $c \in (a,\ b)$에서만 불연속이라고 하자. 이제 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보일 것이다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $[a,\ b]$에서 $|f|$의 상한을 M이라고 하자. 그러면 충분히 작은 양수 δ에 대하여 $12M\delta < \epsilon$이 성립한다. 더욱이 δ는 $[c-\delta,\ c+\delta] \subseteq (a,\ b)$가 성립할 정도로 작은 것이라고 할 수 있다.

함수 f는 $[a,\ c-\delta]$에서 연속이므로 $[a,\ c-\delta]$의 분할 $P_1 \coloneqq \{x_0,\ \cdots,\ x_p\}$가 존재하여

$$U(f,\ P_1) - L(f,\ P_1) < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다. 또한 f는 $[c+\delta,\ b]$에서 연속이므로 $[c+\delta,\ b]$의 분할 $P_2 \coloneqq \{x_{p+1},\ \cdots,\ x_n\}$이 존재하여

$$U(f,\ P_2) - L(f,\ P_2) < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다.

$$P \coloneqq P_1 \cup P_2 = \{x_0,\ \cdots,\ x_p,\ x_{p+1},\ \cdots,\ x_n\}$$

이라고 하면 P는 $[a,\ b]$의 분할이고 $x_p = c-\delta,\ x_{p+1} = c+\delta$이므로

$$\begin{aligned} U(f,\ P) - L(f,\ P) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{p}(M_k - m_k)\Delta x_k + (M_{p+1} - m_{p+1})\Delta x_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \\ &< \frac{\epsilon}{3} + 2M \cdot 2\delta + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 리만 판정법에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

수학적 귀납법을 이용하면 위와 같은 논법으로 $[a,\ b]$에서 f의 불연속점의 개수가 유한인 경우 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능함이 증명된다.

구간 $[a,\ b]$에서 f의 불연속점의 개수가 유한이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

이것을 더욱 일반화할 수 있다. 먼저 측도가 0인 집합의 개념을 도입한다.

정의 6.6.1 측도 0 (masure zero)

집합 E의 **측도**가 **0**이라는 것이라는 것은 임의의 양수 ϵ에 대하여 열린구간들의 가산집합 $\{I_j\}$가 존재하여 구간 I_j들의 길이의 합이 ϵ보다 작으면서 $\{I_j\}$가 E의 덮개가 되는 것이다.

직관적으로 측도가 0이라는 것은 무시할 수 있을 정도로 작은 크기라는 것을 의미한다.

참고 6.6.2 측도가 0인 집합의 부분집합의 측도는 0이다.

증명 E가 측도 0인 집합이고 $F \subseteq E$라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. E가 측도 0인 집합이므로 E를 덮으면서 길이의 합이 ϵ 미만인 구간들의 가산집합 $\{I_j\}$가 존재한다. 이때 $\{I_j\}$는 F도 덮으므로 F는 측도가 0인 집합이다. ■

참고 6.6.3 가산집합은 측도가 0인 집합이다.

증명 E가 가부번집합이라고 하자. 즉 $E = \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $I_j := \left(x_j - 2^{-j-2}\epsilon,\ x_j + 2^{-j-2}\epsilon\right)$이라고 하면 I_j의 길이는 $2^{-j-1}\epsilon$이므로 I_j들의 길이의 합은 $\epsilon/2$이다. 또한 $x_j \in I_j$이다. 따라서 $\{I_j\}$는 E를 덮으면서 길이의 합이 ϵ 미만인 구간들의 가산집합이다. 즉 E의 측도는 0이다. 한편 유한집합은 가부번집합의 부분집합이므로 측도가 0인 집합이다. ■

참고 6.6.4 $\{E_k \mid k \in \mathbb{N}\}$가 측도가 0인 집합의 모임이면 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$의 측도도 0이다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 각 k에 대하여 길이의 합이 $2^{-k-1}\epsilon$ 미만이면서 E_k를 덮는 구간들의 모임 $\{I_{k,j}\}$가 존재한다. 이때 $\{I_{k,j} \mid k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}\}$은 길이의 합이 $\epsilon/2$ 이하이고 E를 덮는 구간들의 모임이므로 E는 측도가 0인 집합이다. ■

이제 불연속점의 개수와 리만 적분 가능성의 관계를 설명하는 다음 정리를 살펴보자.

정리 6.6.5 리만 적분 가능성에 대한 르베그의 정리

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계라고 하자. 이때 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능할 필요충분조건은 $[a,\ b]$에서 f가 불연속점인 점들의 집합의 측도가 0인 것이다.

르베그의 정리를 이용하면 함수의 적분 가능성을 매우 쉽게 판별할 수 있다.

보기 6.6.6 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $[0,\ 1]$에서 적분 불가능하다. 왜냐하면 $\chi_{\mathbb{Q}}$는 $[0,\ 1]$의 모든 점에서 불연속인데, $[0,\ 1]$은 측도가 0인 집합이 아니기 때문이다. □

보기 6.6.7 $D = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, $I = [0,\ 1]$이라고 하자. 그리고 함수 $f : I \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D \\ 0 & \text{if } x \notin D \end{cases}$$

로 정의하자. 그러면 f는 $D \cup \{0\}$의 점에서만 불연속이다. 그런데 $D \cup \{0\}$은 가산집합으로서 측도가 0인 집합이므로 f는 I에서 적분 가능하다. □

이제 르베그의 정리를 증명하자. 먼저 진동의 개념을 도입하고 보조정리 세 개를 증명한 뒤 르베그의 정리를 증명하겠다.

정의 6.6.8 | 진동

함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계라고 하자.

(i) 구간 J와 $[a,\ b]$가 서로소가 아닐 때, J에서 f의 **진동**(oscillation)을 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega_f(J) := \sup\{f(x)-f(y) \mid x \in J\cap[a,\ b],\ y\in J\cap[a,\ b]\}$$

(ii) 점 $t\in[a,\ b]$에서 f의 **진동**을 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_f(t) := \lim_{h\to 0+} \Omega_f((t-h,\ t+h))$$

직관적으로 구간에서 함수의 진동이란 구간에서 함숫값의 최대 변화량이며, 점에서 함수의 진동이란 x가 주어진 점을 지나는 순간 $f(x)$의 변화량이다. [즉 a에서 f의 진동이란 a에서 f의 상극한과 하극한의 차이다.]

참고 6.6.9 함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이면 $[a,\ b]$의 임의의 점 t에서 f의 진동 $\omega_f(t)$가 음이 아닌 유한값으로서 존재한다.

증명 $t\in[a,\ b]$라고 하자. 그리고 구간 J에 대하여

$$M_J := \sup\{f(x) \mid x\in J\cap[a,\ b]\},\ m_J := \inf\{f(x)\mid x\in J\cap[a,\ b]\}$$

라고 하자. $\sup(-f(x)) = -\inf f(x)$이므로 다음을 얻는다.

$$\Omega_f(J) = M_j - m_j \ge 0 \tag{18}$$

일반성을 잃지 않고 $t\in(a,\ b)$라고 하고, $(t-h_0,\ t+h_0)\subseteq(a,\ b)$인 양수 h_0을 택하자. $h<h_0$인 양수 h에 대하여 $\phi(h) := \Omega_f((t-h,\ t+h))$라고 하자. 그러면 $\phi(h)$는 $(0,\ h_0)$에서 증가하므로 0에서 우극한을 가진다. 그런데 (18)에 의하여 $\phi(h)\ge 0$이다. 따라서 $\omega_f(t)$는 음이 아닌 유한값으로 존재한다. ■

보조정리 6.6.10* 함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계라고 하자. 이때 임의의 양수 ϵ에 대하여

$$H = \{t\in[a,\ b] \mid \omega_f(t)\ge\epsilon\}$$

은 콤팩트집합이다.

증명 정의에 의하여 H는 유계이다. 이제 결론에 반하여 H가 콤팩트집합이 아니라고 가정하자. 그러면 하이네-보렐 정리에 의하여 H는 닫힌집합이 아니다. 즉 모든 항이 H에 속하지만 H 밖의 점 t에 수렴하는 수열 $\{t_n\}$이 존재한다. $\omega_f(t)<\epsilon$이므로 양수 h_0이 존재하여 다음 부등식을 만족시킨다.

$$\Omega_f((t-h_0,\ t+h_0))<\epsilon \tag{19}$$

$t_n \to t$이므로 자연수 N이 존재하여

$$\left(t_N-\frac{h_0}{2},\ t_N+\frac{h_0}{2}\right)\subseteq(t-h_0,\ t+h_0)$$

을 만족시킨다. 그러면 (19)에 의하여 $\Omega_f((t_N-h_0/2,\ t_N+h_0/2))<\epsilon$이 성립한다. 즉 $\omega_f(t_N)<\epsilon$인데 이것은 $t_N\in H$라는 사실에 모순이다. ■

보조정리 6.6.11* I가 유계인 닫힌구간이고 함수 f가 I에서 유계이며 ϵ이 양수라고 하자. 만약 임의의 $t \in I$에 대하여 $\omega_f(t) < \epsilon$이면 양수 δ가 존재하여 길이가 δ 미만이고 I에 포함되는 임의의 닫힌구간 J에 대하여 $\Omega_f(J) < \epsilon$이 성립한다.

증명 각 $t \in I$에 대하여 양수 δ_t가 존재하여

$$\Omega_f((t-\delta_t,\ t+\delta_t)) < \epsilon \tag{20}$$

을 만족시킨다. $\delta_t/2 > 0$이므로 하이네-보렐 정리에 의하여 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_N$이 존재하여

$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \left(t_j - \frac{\delta_{t_j}}{2},\ t_j + \frac{\delta_{t_j}}{2}\right)$$

를 만족시킨다.

$$\delta \coloneqq \frac{1}{2}\min\left\{\delta_{t_j} \,\middle|\, 1 \le j \le N\right\}$$

이라고 하자. 만약 $J \subseteq I$이면 적당한 $j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$에 대하여

$$J \cap \left(t_j - \frac{\delta_{t_j}}{2},\ t_j + \frac{\delta_{t_j}}{2}\right) \neq \varnothing$$

이 성립한다. 더욱이 만약 J의 길이가 δ 미만이면 $J \subseteq (t_j - \delta_{t_j},\ t_j + \delta_{t_j})$가 성립한다. 특히 (20)에 의하여 $\Omega_f(J) \le \Omega_f((t_j - \delta_{t_j},\ t_j + \delta_{t_j})) < \epsilon$이 성립한다. ■

보조정리 6.6.12 함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계라고 하자. $[a,\ b]$에서 f의 불연속점들의 모임을 E라고 하면

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty}\left\{t \in [a,\ b] \,\middle|\, \omega_f(t) \ge \frac{1}{j}\right\}$$

이다.

증명 함수 f가 $t \in [a,\ b]$에서 연속일 필요충분조건은 $\omega_f(t) = 0$인 것이다. 따라서 $t \in E$일 필요충분조건은 $\omega_f(t) > 0$이다. ■

정리 6.6.5의 증명* $[a,\ b]$에서 f의 불연속점들의 모임을 E라고 하자. f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하지만 E의 측도가 0이 아니라고 가정하자. 그러면 보조정리 6.6.12에 의하여 $j_0 \in \mathbb{N}$이 존재하여 집합

$$H \coloneqq \left\{t \in [a,\ b] \,\middle|\, \omega_f(t) \ge \frac{1}{j_0}\right\}$$

의 측도가 0이 아니다. 특히 양수 ϵ_0이 존재하여 각 원소가 구간인 H의 임의의 덮개 $\{I_k\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \ge \epsilon_0 \tag{21}$$

을 만족시킨다. $P \coloneqq \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이 $[a,\ b]$의 분할이라고 하자. 만약 $(x_{k-1},\ x_k) \cap H \neq \varnothing$이면 H의 정의에 의하여 $M_k(f) - m_k(f) \ge 1/j_0$이 성립한다. 따라서 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} U(f,\ P) - L(f,\ P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \ge \sum_{(x_{k-1},\, x_k) \cap H \neq \varnothing} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \\ &\ge \frac{1}{j_0} \sum_{(x_{k-1},\, x_k) \cap H \neq \varnothing} \Delta x_k \end{aligned}$$

그런데 $\{[x_{k-1},\ x_k]\mid(x_{k-1},\ x_k)\cap H\neq\varnothing\}$은 H를 덮는 구간들의 모임이므로 (21)에 의하여

$$U(f,\ P)-L(f,\ P)\geq\frac{\epsilon_0}{j_0}>0$$

을 얻는다. 이것은 f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다는 데에 모순이다. 따라서 E의 측도는 0이다.

다음으로 역을 증명하자. E가 측도 0인 집합이라고 가정하자. $[a,\ b]$에서 f의 상한을 M, 하한을 m이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $(M-m+b-a)<j_0\epsilon$인 자연수 j_0을 택하자. E가 측도 0인 집합이므로

$$H:=\left\{t\in[a,\ b]\,\middle|\,\omega_f(t)\geq\frac{1}{j_0}\right\}$$

도 측도 0인 집합이다. 따라서 H를 덮으면서 길이의 합이 $1/j_0$ 미만인 열린구간들의 모임 $\{I_\nu\}$가 존재한다. 보조정리 6.6.10에 의하여 자연수 N이 존재하여 $\{I_1,\ I_2,\ \cdots,\ I_N\}$이 H를 덮으면서

$$\sum_{\nu=1}^{N}|I_\nu|<\frac{1}{j_0}\tag{22}$$

이 성립한다. 이제 $U(f,\ P)-L(f,\ P)<\epsilon$을 만족시키는 분할 P를 찾아야 한다. I_ν들의 끝점들의 모임이 그러한 분할의 원소가 된다. 그러나 그러한 점들만 모으면 충분하지 않으며 I_ν에 의해 덮이지 않는 $[a,\ b]$의 부분을 분할하여 점을 더 구해야 한다. 즉

$$\tilde{I}\subseteq[a,\ b]\setminus\cup I_\nu:=[a,\ b]\setminus(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_N)$$

이라고 하자. I_ν들이 H를 덮으므로 임의의 $t\in\tilde{I}$에 대하여 $\omega_f(t)<1/j_0$이 성립한다. 따라서 보조정리 6.6.11에 의하여 양수 δ가 존재하여 $J\subseteq\tilde{I}$, $|J|<\delta$일 때마다 $\Omega_f(J)<1/j_0$이 성립한다.

$[a,\ b]\setminus\cup I_\nu$를 길이가 δ 미만인 구간들 $J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_s$로 분할하자. 그러면 각 p에 대하여

$$\Omega_f(J_p)<\frac{1}{j_0}\tag{23}$$

이 성립한다. I_ν의 끝점들과 I_p들의 끝점들을 모아서 만든 분할을 $P:=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$이라고 하자. 만약 $(x_{k-1},\ x_k)\cap H\neq\varnothing$이면 x_{k-1}과 x_k는 적당한 I_ν의 끝점이므로 (22)에 의하여

$$\sum_{(x_{k-1},\,x_k)\cap H\neq\varnothing}(M_k(f)-m_k(f))\Delta x_k\leq\frac{M-m}{j_0}\tag{24}$$

이 성립한다. 만약 $(x_{k-1},\ x_k)\cap H=\varnothing$이면 x_{k-1}과 x_k는 적당한 J_p의 끝점이므로 (23)에 의하여

$$\sum_{(x_{k-1},\,x_k)\cap H=\varnothing}(M_k(g)-m_k(f))\Delta x_k\leq\frac{1}{j_0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{b-a}{j_0}\tag{25}$$

가 성립한다. 이로써 (24)와 (25)를 결합하면

$$U(f,\ P)-L(f,\ P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k(f)-m_k(f))\Delta x_k\leq\frac{M-m+b-a}{j_0}<\epsilon$$

이므로 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다. ■

6.7 특이적분

지금까지 살펴본 리만 적분은 유계인 닫힌구간에서 유계인 함수에 대해서만 정의된다. 이 절에서는 적분 구간이 유계가 아니거나 피적분함수가 유계가 아닌 경우의 적분을 살펴보자.

참고 6.7.1 f가 $[a, b]$에서 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}\int_c^d f(x)dx\right)$$

증명 $x\in[a, b]$에 대하여

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

라고 하면 F는 $[a, b]$에서 연속이다. 따라서

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = \lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}(F(d)-F(c))\right) = \lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}\int_c^d f(x)dx\right)$$

가 성립한다. ■

위와 같은 내용을 바탕으로 적분 구간이 유계가 아니거나 피적분함수가 유계가 아닌 경우의 적분을 다음과 같이 정의한다.

정의 6.7.2 | 특이적분(improper integral)

구간 (a, b)가 공집합이 아니고 a, b가 확장실수이며 f가 (a, b)에서의 실함수라고 하자.

(i) f가 (a, b)에서 **국소적으로 적분 가능하다**는 것은 (a, b)에 포함되는 임의의 유계인 닫힌구간 I에서 f가 적분 가능한 것을 의미한다.

(ii) f가 (a, b)에서 **특이적분 가능하다**는 것은 f가 (a, b)에서 국소적으로 적분 가능하고

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}\int_c^d f(x)dx\right) \tag{26}$$

가 유한값으로서 존재한다는 것을 의미한다. 이때 위 적분을 (a, b)에서 f의 **특이적분**이라고 부른다. 특이적분 가능하다는 것을 **특이적분이 수렴한다**고 말하기도 한다.

(iii) 만약 (26)이 발산하면 (a, b)에서 f의 **특이적분이 발산한다**고 말한다.

참고 6.7.3 (26)의 우변에서 극한의 순서를 바꾸어도 극한값은 바뀌지 않는다. 즉 $x_0\in(a, b)$에 대하여

$$\lim_{c\to a+}\left(\lim_{d\to b-}\int_c^d f(x)dx\right) = \lim_{c\to a+}\left(\int_c^{x_0} f(x)dx + \lim_{d\to b-}\int_{x_0}^d f(x)dx\right)$$

$$= \lim_{c\to a+}\int_c^{x_0} f(x)dx + \lim_{d\to b-}\int_{x_0}^d f(x)dx = \lim_{d\to b-}\left(\lim_{c\to a+}\int_c^d f(x)dx\right)$$

가 성립한다. □

따라서 (26)에서 극한의 순서를 고려할 필요가 없으므로 (26)의 우변을 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{\substack{c \to a+ \\ d \to b-}} \int_c^d f(x)dx$$

만약 적분구간의 두 끝점 중 하나가 특이점이 아닌 경우, 예를 들어 $a < c < b$이고 f가 $[c,\ b]$에서 적분 가능하면 (26)의 두 극한 중 하나를 없애고 간단히

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$$

로 나타낸다.

예제 6.7.4 $f(x) = 1/\sqrt{x}$로 정의된 함수 f가 $(0,\ 1]$에서 특이적분 가능함을 보여라.

풀이 특이적분의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a \to 0+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$ □

예제 6.7.5 $f(x) = x^{-2}$으로 정의된 함수 f가 $[1,\ \infty)$에서 특이적분 가능함을 보여라.

풀이 특이적분의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{d \to \infty} \int_1^d \frac{1}{x^2}dx = \lim_{d \to \infty}\left(1 - \frac{1}{d}\right) = 1.$$ □

예제 6.7.6 $f(x) = x^{-1}$으로 정의된 함수 f가 $[1,\ \infty)$에서 특이적분 불가능함을 보여라.

풀이 주어진 함수는 $[1,\ \infty)$에서 국소적으로 적분 가능하다. 그러나

$$\lim_{d \to \infty} \int_1^d \frac{1}{x}dx = \lim_{d \to \infty} \ln d = \infty$$

이므로 f는 $[1,\ \infty)$에서 특이적분 불가능하다. □

특이적분은 리만 적분에 극한을 취한 것이므로, 특이적분의 여러 가지 성질은 리만 적분과 비슷하다.

정리 6.7.7 | 특이적분의 선형성

두 함수 f, g가 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하고 $\alpha \in \mathbb{R}$ 이면 $\alpha f + g$는 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하고

$$\int_a^b (\alpha f(x) + g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

가 성립한다.

증명 리만 적분의 성질에 의하여 $a < c < d < b$인 임의의 실수 c, d에 대하여

$$\int_c^d (\alpha f(x) + g(x))dx = \alpha \int_c^d f(x)dx + \int_c^d g(x)dx$$

가 성립한다. 등식의 양변에 $c \to a+$, $d \to b-$인 극한을 취하면 정리의 등식을 얻는다. ■

특이적분은 극한으로 정의되므로 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다. 특이적분이 수렴하는지 여부를 판별하는 공식을 **판정법**(test)이라고 부른다.

정리 6.7.8 | 특이적분의 비교 판정법

두 함수 f, g가 $(a,\ b)$에서 국소적으로 적분 가능하고 $0 \leq f \leq g$라고 하자. 만약 g가 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하면 f도 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

증명 $c \in (a,\ b)$라고 하자. 그리고 $d \in (c,\ b)$에 대하여

$$F(d) := \int_c^d f(x)dx,\ G(d) := \int_c^d g(x)dx$$

라고 하자. 정리 6.2.6에 의하여 $F(d) \leq G(d)$를 얻는다. $f \geq 0$이므로 F는 $[c,\ b)$에서 증가하는 함수이다. 따라서 정리 4.1.15에 의하여 $F(b-)$가 존재한다. 이로써 f는 $(c,\ b)$에서 특이적분 가능하고

$$\int_c^b f(x)dx = F(b-) \leq G(b-) = \int_c^b g(x)dx$$

가 성립한다. 비슷한 방법으로 $c \to a+$인 극한을 취해도 동일한 부등식이 성립함을 알 수 있다. ■

예제 6.7.9 $f(x) := (\sin x)/\sqrt{x^3}$으로 주어진 함수 f가 $(0,\ 1]$에서 특이적분 가능함을 보여라.

풀이 f가 $(0,\ 1]$에서 연속이므로 f는 $(0,\ 1]$에서 국소적으로 적분 가능하다. 더욱이 f는 $(0,\ 1]$에서 음의 값을 갖지 않으므로 $(0,\ 1]$에서

$$0 \leq f(x) = \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right| \leq \frac{|x|}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

이 성립한다. 그런데 $1/\sqrt{x}$는 $(0,\ 1]$에서 특이적분 가능하므로 주어진 함수도 $(0,\ 1]$에서 특이적분 가능하다. □

적분 가능한 두 함수의 곱은 적분 가능하다. 그러나 특이적분 가능한 두 함수의 곱이 항상 특이적분 가능한 것은 아니다. 예를 들어 $(0,\ 1]$에서 $f(x) := 1/\sqrt{x}$는 특이적분 가능하지만 f^2은 $(0,\ 1]$에서 특이적분 불가능하다. 그러나 함수의 곱과 특이적분에 관하여 다음 정리가 성립한다.

따름정리 6.7.10 f가 $(a,\ b)$에서 유계이고 국소적으로 적분 가능하며 $|g|$가 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하면 $|fg|$도 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하다.

증명 $(a,\ b)$에서 $|f|$의 상한을 M이라고 하자. 그러면 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$$

가 성립한다. 따라서 정리 6.7.8에 의하여 $|fg|$도 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하다. ■

이제 f의 특이적분 가능성과 $|f|$의 특이적분 가능성의 관계를 살펴보자.

정의 6.7.11 특이적분의 절대수렴과 조건수렴

$a < b$이고 f가 $(a,\ b)$에서 정의된 함수라고 하자.

(i) 만약 f가 $(a,\ b)$에서 국소적으로 적분 가능하고 $|f|$가 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하면 '$(a,\ b)$에서 f의 특이적분이 **절대수렴**한다'라고 말한다.

(ii) 만약 $(a,\ b)$에서 $|f|$의 특이적분은 수렴하지 않지만 f의 특이적분은 수렴하면 '$(a,\ b)$에서 f의 특이적분이 **조건수렴**한다'라고 말한다.

따름정리 6.2.13에 의하여 다음 정리를 얻는다.

정리 6.7.12 특이적분의 절대수렴 판정법

구간 $(a,\ b)$에서 f의 특이적분이 절대수렴하면 f는 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하고 다음이 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

증명 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)|$이므로 $|f| + f$는 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하다. 따라서 $f = (|f| + f) - |f|$도 $(a,\ b)$에서 특이적분 가능하다. 더욱이 $a < c < d < b$인 임의의 점 $c,\ d$에 대하여

$$\left|\int_c^d f(x)dx\right| \le \int_c^d |f(x)|dx$$

가 성립한다. 이 부등식에 $c \to a+,\ d \to b-$인 극한을 취하면 정리의 등식을 얻는다. ■

정리 6.7.12의 역은 성립하지 않는다. 즉 특이적분 가능하지만 절대수렴하지 않는 경우가 존재한다.

예제 6.7.13 $[1,\ \infty)$에서 $(\sin x)/x$의 특이적분이 조건수렴함을 보여라.

증명 부분적분법을 이용하면 다음 등식을 얻는다.

$$\int_1^d \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^d - \int_1^d \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \frac{\cos d}{d} - \int_1^d \frac{\cos x}{x^2}dx$$

그런데 $1/x^2$은 $[1,\ \infty)$에서 특이적분 가능하므로 $[1,\ \infty)$에서 $(\cos x)/x^2$의 특이적분은 절대수렴한다. 따라서 $(\sin x)/x$는 $[1,\ \infty)$에서 특이적분 가능하고

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

가 성립한다. 한편 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

이 성립한다. 그런데 $n \to \infty$일 때 마지막 식은 양의 무한대로 발산하므로 $[1,\ \infty)$에서 $(\sin x)/x$의 특이적분은 절대수렴하지 않고 조건수렴한다. □

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 리만 적분과 관련된 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 유계이면 $[a,\ b]$에서 f의 상적분과 하적분이 존재한다.

(2) 구분구적법으로 적분 가능한 함수는 리만 적분 가능하다.

(3) f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하면 f는 $[a,\ b]$에서 연속이다.

(4) f가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하면 f'은 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하다.

(5) $[a,\ b]$의 분할 P와 함수 f에 대하여 상합 $U(f,\ P)$는 하합 $L(f,\ P)$보다 크다.

(6) 리만 적분 가능한 두 함수의 합성은 리만 적분 가능하다.

(7) 미적분학의 기본정리는 닫힌 구간에서 연속인 모든 함수의 적분에 대하여 성립한다.

(8) 임의의 다항함수는 유계인 닫힌구간에서 리만 적분 가능하다.

(9) $[a,\ b]$에서 f가 불연속인 점의 개수가 무한이면 f는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 불가능하다.

(10) 유계인 함수를 적분할 때에는 특이적분을 할 필요가 없다.

2. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f와 구간 $[a,\ b]$의 예를 들어라.

(1) f는 $[a,\ b]$에서 정의되었다.

(2) $[a,\ b]$에서 f의 상적분은 존재하지만 하적분은 존재하지 않는다.

3. 리만 적분에서의 구간의 분할과 집합의 분할이 어떠한 차이가 있는지 설명하여라. 또한 리만 적분의 정의에서 구간의 분할을 분할이라고 부르는 이유가 무엇인지 설명하여라.

4. 리만 적분과 리만 합이 어떠한 관계가 있는지 설명하여라.

5. 리만 적분과 구분구적법이 어떠한 관계가 있는지 설명하여라.

6. 정적분과 부정적분이 어떠한 관계가 있는지 설명하여라.

7. 두 함수 f와 g가 $[-a,\ a]$에서 적분 가능하고 f는 우함수이며 g는 기함수라고 하자. 이때 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$

8. 다음 극한을 리만 적분의 형태로 나타내어라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}\right)$

9. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int x+1\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int 2\cos t\,dt$

(4) $\displaystyle\int 1+\tan^2\theta\,d\theta$ (5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+1}dx$

10. 다음 극한을 계산하여라.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt\right)$$

11. 두 함수 f와 g가 $[1,\ 5]$에서 적분 가능하고 다음 등식을 모두 만족시킨다고 하자.

$$\int_1^2 f(x)dx = -4,\quad \int_1^5 f(x)dx = 6,\quad \int_1^5 g(x)dx = 8.$$

이때 다음 적분을 구하여라.

(1) $\int_2^5 f(x)dx$ (2) $\int_1^5 f(x) - g(x)dx$ (3) $\int_1^5 4f(x) - g(x)dx$

12. 다음 정적분의 계산 결과가 최대가 되도록 $a,\ b$의 값을 정하여라. (단, $a < b$)

$$\int_a^b x - x^2\,dx$$

13. 다음과 같이 주어진 함수 f의 진동 $\omega_f(0)$을 구하여라.

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

14. 다음 특이적분이 수렴하는지 판정하고, 수렴하는 경우 적분값을 구하여라.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ (2) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx$ (4) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

(5) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{e^{x^2}}dx$ (6) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$

(7) $\int_1^\infty \frac{1}{[x]!}dx$ (8) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

개념 응용하기

15. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ (2) $\int x^3 \ln x\,dx$

(3) $\int (\ln x)^3\,dx$ (4) $\int x^2 e^{3x}\,dx$

16. 다음과 같이 정의된 함수 f가 구간 $[-1,\ 1]$에서 적분 가능한지 리만 판정법을 이용하여 판별하여라.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

17. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속인 도함수를 가지면 f는 두 증가함수의 차로 표현될 수 있음을 증명하여라.

18. 함수 f가 $[0,\ 1]$에서 단조일 때 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{|f(1)-f(0)|}{n}$$

19. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 음이 아니며 $f(c) > 0$인 점 c가 $[a,\ b]$에 존재한다고 하자. 이때

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

임을 증명하여라.

20. 두 함수 f와 g가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하면

$$h(x) = \max\{f(x),\ g(x)\},\quad k(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$$

로 정의된 두 함수 h와 k도 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능함을 리만 판정법을 이용하여 증명하여라.

21. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고, $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능한 임의의 함수 ϕ에 대하여

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$$

을 만족시키면 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) = 0$임을 증명하여라.

22. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하고 양수 c가 존재하여 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \ge c$를 만족시키면 $1/f$는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능함을 리만 판정법을 이용하여 증명하여라.

23. 함수 f가 $[0,\ 1)$에서 정의되었고 증가함수이며 유계가 아니라고 하자. 만약 $[0,\ 1]$에서 f의 특이적분이 수렴하면 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

24. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 두 함수 u와 v가 $[a,\ b]$에서 미분 가능할 때 다음 등식이 성립함을 증명하여라. 이 공식을 **라이프니츠의 적분 공식**이라고 부른다.

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

25. 다음과 같이 주어진 함수 f의 도함수를 구하여라.

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^5}{1+t^4}dt$$

26. 다음 특이적분이 수렴하는지 판정하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ (8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^2\sin t\,dt$ (9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$

27. 정리 6.3.8의 역이 성립하지 않음을 증명하여라. 즉 f가 구간 $[a,\ b]$에서 유계이고 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

가 수렴하지만 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하지 않은 예를 들어라.

28. 함수 f, g, h가 모두 구간 $[a,\ b]$에서 유계이고 $f \le g \le h$라고 하자. 또한 f, h가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하고

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx$$

라고 하자. 이때 g는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하고 그 적분값은 f의 적분값과 동일함을 증명하여라.

29. 함수 f가 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$$\int_{-1}^{1} (2x+3)f(x)dx = 0$$

이면 $f(c)=0$을 만족시키는 점 c가 $[-1,\ 1]$에 존재함을 증명하여라.

실력 다지기

30. 리만 적분의 정의와 로그함수를 이용하여 다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$$

31. 구간 $[0,\ 1]$을 삼등분한 뒤 가운데 부분을 제외한 닫힌집합을 $E_1 = [0,\ 1/3] \cup [2/3,\ 1]$이라고 하자. 다시 E_1의 두 조각을 각각 삼등분한 뒤 가운데 부분을 제외한 닫힌집합을

$$E_2 = \left[0,\ \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\ \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\ \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

이라고 하자. 이러한 과정을 계속 반복하면 길이가 3^{-k}인 2^k개의 닫힌구간들의 합집합으로 나타나는 집합 E_k의 축소집합열 $\{E_k\}$를 얻는다. 이때 **칸토어 집합**(Cantor set)을

$$E \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

로 정의한다. 이제 점 $x \in [0,\ 1]$의 이진소수전개와 삼진소수전개를 생각하자. 즉 x에 대하여 0, 1의 값을 갖는 수열 $\{a_k\}$와 0, 1, 2의 값을 갖는 수열 $\{b_k\}$가 각각 유일하게 존재하여

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}$$

를 만족시킨다. 단, 유한소수는 순환소수로 나타내지 않는다. 다음 물음에 답하여라.

(1) E가 공집합이 아니고 콤팩트집합이며 측도가 0인 집합임을 증명하여라.

(2) $x \in [0,\ 1]$가 E에 속할 필요충분조건은 x의 삼진소수전개의 각 자리 숫자가 0 또는 2 뿐인 것임을 증명하여라.

(3) 함수 $f : E \to [0,\ 1]$을

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}$$

로 정의하자. 이때 f가 $E \setminus E_0$으로부터 $[0,\ 1]$에로의 일대일대응이 되도록 하는 E의 가산부분집합 E_0이 존재함을 증명하여라. 이를 이용하여 E가 비가산집합임을 증명하여라.

(4) 각 k에 대하여 집합 $E_{k-1} \setminus E_k$에서 f를 상수함수로 정의함으로써 f를 E로부터 $[0,\ 1]$에로의 단조증가인 연속함수가 되도록 확장할 수 있음을 보여라. $[0,\ 1]$에서 이와 같이 정의된 함수 f를 **칸토어의 삼진함수**(ternary function)라고 부른다.

32. 함수 f가 $(0,\ 1)$에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m} & \text{if } x=\dfrac{n}{m}\ :\ \text{irreducible},\ m\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

이때 리만 판정법과 특이적분의 정의를 이용하여 f가 $[0,\ 1]$에서 리만 적분 가능함을 증명하여라. 이 함수를 **토마에 함수**(Thomae function)라고 부른다.

33. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하고 $f([a,\ b])\subseteq[c,\ d]$이며 함수 g가 $[c,\ d]$에서 리만 적분 가능하지만 $g\circ f$는 $[a,\ b]$에서 리만 적분 불가능한 예를 들어라.

34. ϕ가 $[a,\ b]$에서 볼록함수이고 함수 $f:[0,\ 1]\to[a,\ b]$에 대하여 f와 $\phi\circ f$가 모두 $[0,\ 1]$에서 적분 가능할 때 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\le\int_0^1(\phi\circ f)(x)dx$$

이 부등식을 **젠센**(Jensen)**의 부등식**이라고 부른다.

도약하기

35. 미분을 이용하여 방정식의 근의 근삿값을 구하는 뉴턴의 방법(Newton's method)에 대하여 조사해보자.

36. 미분은 한자로 '微分'이고 영어로 'differentiation'이다. 이러한 용어의 유래를 조사해보자.

37. 도함수는 한자로 '導函數'이고 영어로 'derivative'이다. 두 용어 사이의 관계를 유추해보자.

38. 적분은 한자로 '積分'이고 영어로 'integration'이다. 이러한 용어의 유래를 조사해보자.

39. 접선의 개념은 중학교와 고등학교 교과서에 등장한다. 중학교 교과서에는 원의 접선의 정의가 나와 있고 고등학교 교과서에는 일반적인 곡선의 접선의 정의가 나와 있다. 이들 정의를 찾아보고 대학교 미적분학 교재에서의 접선의 정의와 비교해보자.

40. 무한소해석학(infinitesimal calculus)에 대하여 찾아보고 무한소해석학에서 롤의 정리와 평균값 정리를 어떻게 증명하는지 조사해보자.

41. 기원전 그리스에서 사용한 실진법(method of exhaustion)에 대하여 조사하고 구분구적법과 어떠한 관계가 있는지 살펴보아라. (실진법은 착출법이라고도 불린다.)

42. 아르키메데스가 원주율, 구의 부피, 원뿔의 부피를 구한 방법을 조사해 보아라.

43. 르베그 적분(Lebesgue integral), 헨스톡-쿠르츠바일 적분(Henstock-Kurzweil integral)에 대하여 조사해보자. (헨스톡-쿠르츠바일 적분은 일반화된 리만 적분 generalized Riemann integral 이라고도 불린다.)

44. 절대연속의 개념과 성질을 찾아보고 절대연속의 개념이 발생하게 된 역사적 배경을 조사해보자.

45. 코시 주치(Cauchy's principal value)에 대하여 조사하고 특이적분이 수렴하는 경우 그 값이 코시 주치와 동일함을 증명하여라.

46. 고등학교 수학 교과서에 미적분학의 기본정리가 어떻게 증명되어 있는지 찾아보고 해석학의 증명과 비교해보자.

극한은 실수계에서의 경우와 유클리드 거리공간에서의 경우에 그 정의가 크게 다르지 않다. 그러나 미분과 적분의 정의는 그렇지 않다.

D가 $\mathbb{R}^p$의 열린부분집합이고 $\mathbf{f}$가 D로부터 $\mathbb{R}^d$로의 함수라고 하자. 그리고 $\mathbf{f}$의 i번째 좌표를 f_i로 나타내자. 그러면 각 f_i는 p개의 변수를 하나의 실수에 대응시키는 함수이다. 또한 $\mathbf{f}$는 d개의 f_i들이 결합한 함수이다. 즉

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \cdots,\ f_d(\mathbf{x})),\ \ \mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$$

이다. 따라서 x_i가 f_j에 대응되는 관계의 경우의 수는 p와 d의 곱 pd이다. 즉 하나의 함수 $\mathbf{f}$에서 pd개의 실함수를 얻을 수 있다. 이때 $\mathbf{a} \in D$에서 변수 x_i에 대한 f_j의 **편미분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

여기서 $\mathbf{e}_i$는 i번째 좌표만 1이고 다른 좌표는 0인 벡터이다. 또한 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{f}$의 **전미분**을 다음과 같은 표현행렬을 갖는 선형사상으로 정의한다.

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})\right]_{d \times p} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_d}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_d}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

다음으로 중적분을 살펴보자. 각 i에 대하여 $a_i < b_i$이고 $D = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2] \times \cdots \times [a_p,\ b_p]$라고 하자. 그리고 f가 D로부터 $\mathbb{R}$로의 함수라고 하자. $P_i = \left\{x_0^{(i)},\ x_1^{(i)},\ \cdots,\ x_{\nu_i}^{(i)}\right\}$가 $[a_i,\ b_i]$의 분할일 때 각 P_i들의 성분구간을 하나씩 택하여 곱한 집합은 D에 포함되는 직사각형 집합이 된다. 이러한 직사각형 집합들이 모임 G를 D의 **그물선**이라고 부른다. R의 체적(부피)을 $|R|$로 나타내자. 이때 P에 대한 f의 **상합**과 **하합**을 각각

$$U(f,\ G) = \sum_{R \in G} \sup f(R)|R|,\ \ \ L(f,\ G) = \sum_{R \in G} \inf f(R)|R|$$

로 정의한다. 또한 D에서 f의 **상적분**과 **하적분**을 각각

$$\overline{\int_D} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \overline{\int_D} f\,dV := \inf_G U(f,\ G),\ \ \ \underline{\int_D} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \underline{\int_D} f\,dV := \sup_G L(f,\ G)$$

로 정의한다. f가 D에서 **적분 가능하다**는 것은 D에서 f의 상적분과 하적분이 모두 존재하고 그들의 값이 동일한 것으로 정의한다.

공역의 차원이 2 이상인 함수의 적분은 더 복잡하게 정의된다. 정의역의 차원이 1이고 공역의 차원이 2 이상인 함수의 적분은 **선적분**(line integral)으로 정의된다. 또한 정의역의 차원과 공역의 차원이 모두 2 이상인 함수의 적분은 **다양체**(manifold)와 **미분형식**(differential form)의 개념을 이용하여 정의된다.

유클리드 공간 사이에서 정의된 함수의 적분에 대해서도 미적분학의 기본정리와 비슷한 정리가 존재한다. 선적분의 경우에는 **선적분의 기본정리**라고 부르며 다양체 위에서 미분형식을 적분하는 경우에는 **스토크스의 정리**라고 부른다.

07
실수열의 무한급수

무한수열의 모든 항을 더한 것을 무한급수라고 부른다. 무한급수는 해석적 함수의 개념을 도입하는 데에 중요한 역할을 한다. 그러나 옛날에 무한급수는 수학자들을 당혹케 하는 문제 중 하나였다. 예를 들어 무한급수

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

은 모든 항이 양수인 수열의 합이기 때문에 계속 커진다. 그러나 발산하지 않고 2에 수렴한다. 반면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

과 같은 무한급수는 양의 무한대로 발산한다. 이와 같은 문제는 무한급수의 개념을 명확히 하고 수렴과 발산에 관한 성질을 이용하면 해결된다.

이 절에서는 무한급수의 개념과 수렴에 관한 다양한 성질을 살펴본다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 무한급수의 개념을 설명할 수 있다.
- 무한급수의 수렴과 발산을 판정할 수 있다.
- 조건수렴하는 무한급수의 성질을 설명할 수 있다.

7.1 무한급수의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 s_n으로 나타내자. 이때 수열 $\{s_n\}$의 극한

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots$$

을 $\{a_n\}$의 **무한급수** 또는 간단히 **급수**라고 부른다. 여기서 s_n을 위 급수의 **부분합**이라고 부른다.

무한급수는 보통 수열의 첫째항부터 더하지만 경우에 따라서는 두 번째 항이나 세 번째 항부터 더할 때도 있다. 이러한 관점에서 다음은 모두 무한급수이다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu, \quad \sum_{k=2}^{\infty} r_k$$

혼동할 염려가 없는 경우 합 기호의 첨자를 생략하여 나타내기도 한다. 즉 위 무한급수를

$$\sum a_n, \quad \sum b_\nu, \quad \sum r_k$$

로 나타내기도 한다. [유한 개의 항은 무한급수의 수렴과 발산에 영향을 미치지 않기 때문에 이러한 표기법이 허용된다.]

정의 7.1.1 | 무한급수의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$의 무한급수 $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$를 무한급수 S의 **부분합**(partial sum)이라고 부른다.

(ii) 부분합 수열 $\{s_n\}$이 실수 s에 수렴하면 '무한급수 S가 **수렴한다**'라고 말하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

로 나타낸다. 이때 s를 무한급수 S의 **합**(sum) 또는 무한급수 S의 **값**(value)이라고 부른다.

(iii) 부분합 수열 $\{s_n\}$이 발산하면 '무한급수 S가 **발산한다**'라고 말한다. $\{s_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 경우 '무한급수 S가 **양의 무한대로 발산한다**'라고 말하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

로 나타낸다. 음의 무한대로 발산하는 경우도 같은 방법으로 정의한다.

보기 7.1.2 실수 a, r에 대하여 $a_n = ar^{n-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수열 $\{a_n\}$을 등비수열이라고 부른다. 이때 r를 공비라고 부른다. 또한 등비수열의 급수를 **무한등비급수**라고 부른다. $a \neq 0$일 때 무한등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

가 수렴할 필요충분조건은 $|r| < 1$인 것이다.

증명 $r = 1$이면 주어진 무한급수는 명백히 발산한다. $r \neq 1$일 때 주어진 무한급수의 부분합을 구하면

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{1}$$

이다. 만약 $|r| < 1$이면

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

로서 수렴한다. $r = -1$이면 (1)은 유계이면서 진동하고, $r > 1$이면 (1)은 양의 무한대로 발산하며 $r < -1$이면 (1)은 유계가 아니면서 진동한다. ■

정리 7.1.3 | 무한급수의 일반항 판정법

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

증명 주어진 무한급수가 s에 수렴한다고 하자. 그리고 부분합을 s_n이라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

이므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다. ■

예제 7.1.4 $a_n := (-1)^n$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산함을 보여라.

풀이 $\{a_n\}$의 상극한이 1, 하극한이 -1이므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 정리 7.1.3에 의하여 주어진 급수는 수렴하지 않는다. □

참고 7.1.5 정리 7.1.3의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

이라고 하면 $a_n \to 0$이다. 그런데

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

이므로 $\{a_n\}$의 급수의 부분합은

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$$

이다. 즉 $\{a_n\}$의 급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

로서 발산한다. □

무한급수도 수열의 극한이므로 수렴에 관한 코시 조건을 사용할 수 있다.

정리 7.1.6 | 무한급수의 코시 조건

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $m \ge n > N$일 때마다 $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$이 성립하는 것이다.

증명 주어진 무한급수의 부분합 수열 $\{s_n\}$에 코시 조건을 적용하면 정리의 결론을 얻는다. 즉 코시 조건에 의하여 $\{s_n\}$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $p > q \ge N$일 때마다 $|s_p - s_q| < \epsilon$이 성립하는 것이다. $p = m$, $q = n-1$이라고 하면 정리의 결론을 얻는다. ■

정리 7.1.6에서 부등식 $m \geq n$을 $m > n$으로 바꾸어도 무방하다. 따라서 $p = m - n$이라고 하면 다음 정리를 얻는다.

따름정리 7.1.7 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ 일 때마다 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$이 성립하는 것이다.

정의 7.1.8 무한급수의 절대수렴과 조건수렴

수열 $\{a_n\}$의 무한급수 $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$이 수렴하면 '$S$는 **절대수렴**(absolute convergence)한다'라고 말한다.

(ii) S가 수렴하지만 절대수렴하지 않으면 'S는 **조건수렴**(conditional convergence)한다'라고 말한다.

특이적분에서와 마찬가지로 절대수렴은 수렴보다 더 강력한 조건이다.

정리 7.1.9 무한급수의 절대수렴 판정법

무한급수가 절대수렴하면 수렴한다.

증명 수열 $\{a_n\}$의 무한급수가 절대수렴한다고 가정하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 코시 조건에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ 일 때마다

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \right| < \epsilon$$

이 성립한다. 동일한 n, p에 대하여

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| = \left| \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \right| < \epsilon$$

이므로 코시 조건에 의하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

은 수렴한다. ■

참고 7.1.10 정리 7.1.9의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어 무한급수

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$$

은 수렴하지만 절대수렴하지 않는다. 즉 주어진 급수는 교대급수 판정법에 의하여 수렴하지만

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

은 p-급수 판정법에 의하여 발산한다. 자세한 내용은 예제 7.2.2와 정리 7.3.5에서 다룬다. □

7.2 양항급수

모든 항이 0 이상인 실수열을 **양항수열**(nonnegative sequence)이라고 부른다. 또한 양항수열의 무한급수를 **양항급수**라고 부른다. 양항급수의 부분합 수열은 단조증가인 수열이므로 다음 정리를 얻는다.

정리 7.2.1 양항급수의 유계 판정법

양항급수가 수렴할 필요충분조건은 부분합 수열이 유계인 것이다.

증명 수열 $\{a_n\}$이 양항수열이라고 하자. 그리고 $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합을 s_n이라고 하자. 그러면

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$$

이므로 $\{s_n\}$은 증가수열이다. 따라서 수열의 단조수렴 정리에 의하여 $\{s_n\}$이 수렴할 필요충분조건은 $\{s_n\}$이 유계인 것이다. ■

예제 7.2.2 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$의 수렴 여부를 판정하여라.

풀이 $s_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$라고 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

이므로 $\{s_n\}$의 부분수열 $\{s_{2^n}\}$은 유계가 아니다. 따라서 $\{s_n\}$도 유계가 아니다. 즉 주어진 무한급수는 발산한다. □

양항급수의 유계 판정법으로부터 여러 가지 유용한 판정법들을 유도할 수 있다.

정리 7.2.3 양항급수의 비교 판정법

두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 유한 개를 제외한 모든 n에 대하여 $a_n \leq b_n$을 만족시키고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다.

증명 정리의 조건에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $a_n \leq b_n$이 성립한다. 이때 $n > N$인 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$$

이므로 $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합은 유계이다. 따라서 양항급수의 유계 판정법에 의하여 $\{a_n\}$의 무한급수는 수렴한다. ■

정리 7.2.4 양항급수의 극한 비교 판정법

두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n) < \infty$이고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n) > 0$이고 $\sum a_n$이 수렴하면 $\sum b_n$도 수렴한다.

증명 (i) $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n)$이라고 하자. $\rho < \infty$이므로 정리 3.7.5에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다

$$\frac{a_n}{b_n} < \rho + 1$$

이 성립한다. 즉 $a_n < (\rho+1)b_n$이 성립한다. $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum(\rho+1)b_n$이 수렴하므로 양항급수의 비교 판정법에 의하여 $\sum a_n$도 수렴한다.

(ii) $\rho = \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n/b_n)$이라고 하자. $0 < \rho < \infty$인 경우 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다

$$\frac{a_n}{b_n} > \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}$$

가 성립한다. 즉 $b_n < 2\rho^{-1}a_n$이 성립한다. $\sum a_n$이 수렴하면 $\sum 2\rho^{-1}a_n$도 수렴하므로 양항급수의 비교 판정법에 의하여 $\sum b_n$도 수렴한다.

한편 $\rho = \infty$인 경우 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다

$$\frac{a_n}{b_n} > 1$$

이 성립한다. 즉 $b_n < a_n$이 성립한다. 따라서 양항급수의 비교 판정법에 의하여 $\sum b_n$도 수렴한다. ■

따름정리 7.2.5 두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\{a_n/b_n\}$이 수렴하고

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} < \infty$$

일 때, $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $\sum b_n$이 수렴하는 것이다.

증명 $\{a_n/b_n\}$의 상극한과 하극한이 모두 양의 실수이므로 정리 7.2.4에 의하여 결론을 얻는다. ■

예제 7.2.6 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$의 수렴 여부를 판정하여라.

풀이 $a_n \coloneqq n/3^n$, $b_n \coloneqq (2/3)^n$이라고 하자. 그러면 무한등비급수의 성질에 의하여 $\sum b_n$은 수렴한다. 한편

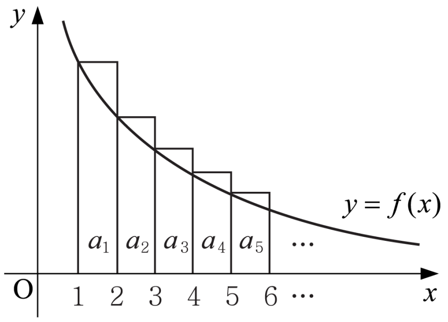
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$$

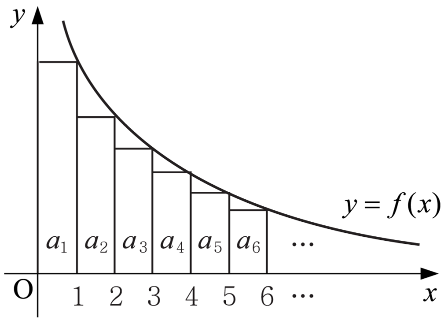
이므로 극한 비교 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 수렴한다. □

적분을 이용하여 양항급수의 수렴을 판정할 수 있다. f가 $[1, \infty)$에서 감소하는 함수이고 $f \geq 0$이라고 하자. 그리고 $a_n = f(n)$이라고 하자. 그러면 아래 두 그림을 통해

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{그리고} \quad \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^{n} f(x)dx$$

가 성립함을 알 수 있다.





따라서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 특이적분 $\int_1^{\infty} f(x)dx$도 수렴하고 무한급수 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$이 발산하면 특이적분 $\int_1^{\infty} f(x)dx$도 발산한다. 즉 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴과 특이적분 $\int_1^{\infty} f(x)dx$의 수렴은 서로 동치이다.

정리 7.2.7 | 양항급수의 적분 판정법

함수 f가 $[1, \infty)$에서 감소하고 $f \geq 0$이며 $a_n = f(n)$이라고 하자. 이때 무한급수 $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 특이적분 $\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴하는 것이다.

증명 자연수 k와 $k \leq x \leq k+1$인 실수 x에 대하여

$$a_k = f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) = a_{k+1}$$

이다. 따라서

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} a_k\,dx = a_k$$

가 성립한다. 여기서 각 변의 합을 구하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 단조수렴 정리(4.4.10)에 의하여 $\int_1^{\infty} f(x)dx$도 수렴한다. 또한 역으로 $\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴하면 양항급수의 유계 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다. ■

적분 판정법의 따름정리로서 다음 판정법을 얻는다.

정리 7.2.8 | p-급수 판정법

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$이 수렴할 필요충분조건은 $p>1$인 것이다.

증명 $p \le 0$인 경우에는 $\{n^{-p}\}$가 0에 수렴하지 않으므로 일반항 판정법에 의하여 $\sum n^{-p}$은 발산한다.

이제 $p>0$이라고 하자. $f(x) \coloneqq x^{-p}$이라고 하면 $[1, \infty)$에서 f는 감소하고 $f \ge 0$이다.
또한 $p \ne 1$일 때

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1}\frac{1}{b^{p-1}}$$

이고 $p=1$일 때

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln b$$

이므로 $[1, \infty)$에서 f의 특이적분이 수렴할 필요충분조건은 $p>1$이다. 따라서 적분 판정법에 의하여 무한급수 $\sum n^{-p}$가 수렴할 필요충분조건은 $p>1$이다. ■

p-급수 판정법은 a_n이 n에 대한 분수식일 때 $\sum a_n$의 수렴을 판정하는 데에 유용하게 사용된다. 즉 a_n의 분모의 차수를 p, 분자의 차수를 q라고 하자. 이때 $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $p-q>1$인 것이다.

정리 7.2.9 | 양항급수의 응집 판정법 (코시의 2^n 판정법)

$\{a_n\}$이 감소하는 양항수열이라고 하자. 이때 $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $\sum 2^n a_{2^n}$이 수렴하는 것이다.

증명 예제 7.2.2의 풀이 방법을 사용하여 증명하자.

[$\Rightarrow$] 무한급수 $\sum a_n$이 수렴한다고 가정하자. $\{a_n\}$이 감소수열이므로

$$\begin{aligned}
2a_4 &= a_4 + a_4 \le a_3 + a_4, \\
4a_8 &= a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \le a_5 + a_6 + a_7 + a_8, \\
8a_{16} &\le a_9 + a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{16}, \\
16a_{32} &\le a_{17} + a_{18} + a_{19} + \cdots + a_{32}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

이다. 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 k에 대하여

$$2^k a_{2^{k+1}} \le a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + a_{2^k+3} + \cdots + a_{2^{k+1}}$$

을 얻는다. $k=1$일 때부터 $k=n$일 때까지 이 부등식을 변마다 더하면

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \le \sum_{k=3}^{2^{n+1}} a_k$$

를 얻는다. 그런데 $n \to \infty$일 때 우변이 수렴하므로 단조수렴 정리에 의하여 좌변도 수렴한다.

[$\Leftarrow$] 무한급수 $\sum 2^n a_{2^n}$이 수렴한다고 가정하자. $\{a_n\}$이 감소수열이므로

$$\begin{aligned} 1a_1 &\geq a_1, \\ 2a_2 &= a_2 + a_2 \geq a_2 + a_3, \\ 4a_4 &= a_4 + a_4 + a_4 + a_4 \geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \\ 8a_8 &\geq a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

이다. 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 k에 대하여

$$2^k a_{2^k} \geq a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + a_{2^k+3} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$$

을 얻는다. $k=0$일 때부터 $k=n$일 때까지 이 부등식을 변마다 더하면

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \geq \sum_{k=2}^{2^{n+1}-1} a_k$$

를 얻는다. 그런데 $n \to \infty$일 때 좌변이 수렴하므로 우변도 수렴하고, 단조수렴 정리에 의하여 본래의 급수 $\sum a_n$도 수렴한다. ■

응집 판정법은 a_n의 일반항에 로그가 포함되어 있을 때 $\sum a_n$의 수렴을 판정하는 데에 유용하게 사용된다.

예제 7.2.10 다음 급수의 수렴 여부를 판정하여라.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-n+1}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2n+2}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

증명 (i) $n \geq 3$일 때

$$\frac{n+1}{n^3-n+1} \leq \frac{n+(n-2)}{n^3-3n^2+3n-1} = \frac{2(n-1)}{(n-1)^3} = \frac{2}{(n-1)^2}$$

가 성립한다. 그런데 p-급수 판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(n-1)^2}$가 수렴하므로 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-n+1}$도 수렴한다.

(ii) $n \geq 2$일 때

$$\frac{n^2+n}{n^3-2n+2} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3+n^3} = \frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n}$$

이 성립한다. 그런데 p-급수 판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n}$이 발산하므로 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2n+2}$도 발산한다.

(iii) $a_n = (n \ln n)^{-1}$이라고 하자. 그러면

$$\sum_{k=2}^{n} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

이다. 그런데 p-급수 판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산한다. 즉 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n}$이 발산하므로 응집 판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$도 발산한다. □

정리 7.2.11 | 양항급수의 비 판정법

수열 $\{a_n\}$이 임의의 n에 대하여 $a_n > 0$을 만족시킨다고 하자.

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n) < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n) > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

증명 (i) $\rho \coloneqq \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n)$이라고 하자. $\rho < 1$이므로 $\epsilon \coloneqq (1-\rho)/2$는 양수이다. 따라서 상극한의 성질에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$일 때

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon$$

이 성립한다. 부등식의 양변을 변변 곱하면 $n > N$일 때

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N < (\rho+\epsilon)^{n-N} a_N$$

을 얻는다. 따라서 $n > N$일 때

$$\sum_{k=N+1}^{n} a_k < \sum_{k=N+1}^{n} (\rho+\epsilon)^{k-N} a_N$$

이 성립한다. $\rho + \epsilon < 1$이므로 $n \to \infty$일 때 우변은 수렴한다. 따라서 좌변도 수렴한다.

(ii) $\rho \coloneqq \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1}/a_n)$이라고 하자. 그러면 $\rho > \rho' > 1$인 ρ'이 존재한다. $\epsilon \coloneqq (\rho'-1)/2$는 양수이므로 하극한의 성질에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$일 때

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho' - \epsilon$$

이 성립한다. 즉 $n \geq N$일 때 $a_{n+1} > (\rho' - \epsilon) a_n$이 성립한다. 그런데 $\rho' - \epsilon > 1$이므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum a_n$은 발산한다. ■

따름정리 7.2.12 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 $\{a_{n+1}/a_n\}$이 수렴하며

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

이라고 하자. 이때 $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴하고 $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

증명 $\{a_{n+1}/a_n\}$의 상극한과 하극한이 모두 ρ이므로 정리 7.2.11에 의하여 결론을 얻는다. ■

따름정리 7.2.13 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니고 $\{|a_{n+1}|/|a_n|\}$이 수렴하며

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

이라고 하자. 이때 $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 절대수렴하고 $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

증명 $\rho < 1$이면 따름정리 7.2.12에 의하여 $\sum |a_n|$이 수렴한다. $\rho > 1$이면 정리 7.2.11-(ii)의 증명 과정에서와 같이 $\{|a_n|\}$은 0에 수렴하지 않는다. 즉 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum a_n$은 발산한다. ■

정리 7.2.14 양항급수의 제곱근 판정법

양항수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$이라고 하자.

(i) $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.

(ii) $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

증명 (i) $\epsilon := (1-\rho)/2$는 양수이므로 상극한의 성질에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon$$

이 성립한다. 양변을 n제곱하면 $n > N$일 때

$$a_n < (\rho+\epsilon)^n$$

을 얻는다. 그런데 $0 < \rho + \epsilon < 1$이므로 $\sum (\rho+\epsilon)^n$이 수렴한다. 따라서 비교 판정법에 의하여 $\sum a_n$도 수렴한다.

(ii) $\rho > 1$이므로 상극한의 성질에 의하여 임의의 자연수 N에 대하여 $n > N$인 자연수 n이 존재하여

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

을 만족시킨다. 즉 $a_n > 1$인 항의 개수가 무한이므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 일반항 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 발산한다. ■

따름정리 7.2.15 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$이라고 하자. 이때 $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 절대수렴하고 $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

증명 $\rho < 1$이면 정리 7.2.14에 의하여 $\sum |a_n|$이 수렴한다. $\rho > 1$이면 정리 7.2.14-(ii)의 증명 과정에서와 같이 $\{|a_n|\}$은 0에 수렴하지 않는다. 즉 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 일반항 판정법에 의하여 $\sum a_n$은 발산한다. ■

참고 7.2.16 양항수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\{a_{n+1}/a_n\}$이 1에 수렴하는 경우에는 비 판정법으로 수렴 여부를 판정할 수 없다. 또한 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$이 1에 수렴하는 경우에는 근 판정법으로 수렴 여부를 판정할 수 없다. 예를 들어 $a_n = 1/n$이라고 하면 $a_{n+1}/a_n \to 1$, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$이고 $\sum a_n$은 발산한다. 반면 $a_n = 1/n^2$이라고 하면 $a_{n+1}/a_n \to 1$, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$이고 $\sum a_n$은 수렴한다. □

양항급수의 판정에서 다음 순서를 기억해두면 편리하다. (단, $p > 1$, $r > 1$)

$$\boxed{1 \ll n^p \ll r^n \ll n! \ll n^n}$$

예를 들어 다음 급수는 모두 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

7.3 여러 가지 무한급수

지금까지 양항급수의 판정법을 살펴보았다. 이 절에서는 양항이 아닌 무한급수의 판정법을 살펴보자. 먼저 두 수열을 곱한 수열의 무한급수의 부분합 공식을 살펴보자.

정리 7.3.1 아벨(Abel)의 부분합 공식

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 $n \geq m \geq 1$인 자연수 n, m에 대하여

$$A_{n,m} := \sum_{k=m}^{n} a_k$$

라고 하자. 이때 $n > m \geq 1$인 자연수 n, m에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k)$$

증명 $k > m$일 때 $A_{k,m} - A_{(k-1),m} = a_k$이고 $A_{m,m} = a_m$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} (A_{k,m} - A_{(k-1),m}) b_k \\
&= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} A_{k,m} b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m} b_{k+1} \\
&= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m} b_k + A_{n,m} b_n - \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m} b_{k+1} - A_{m,m} b_{m+1} \\
&= A_{n,m} b_n - A_{m,m}(b_{m+1} - b_m) - \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k) \\
&= A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k).
\end{aligned}$$

■

따름정리 7.3.2 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합 s_n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

증명 정리 7.3.1에서 $m = 1$로 두면 된다. ■

위 정리에 의하여 무한급수 $\sum a_n b_n$이 수렴할 충분조건은 $\sum s_n(b_n - b_{n+1})$과 $\{s_n b_{n+1}\}$이 모두 수렴하는 것이 된다.

따름정리 7.3.3 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합 s_n에 대하여, $\{s_n\}$이 유계이고 $b_n \to 0$이며 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 수렴한다.

증명 $\sum |b_n - b_{n+1}|$이 수렴하고 $\{s_n\}$이 유계이므로 $\sum s_n(b_n - b_{n+1})$은 절대수렴한다. 또한 $\{s_n\}$이 유계이고 $b_n \to 0$이므로 $s_n b_{n+1} \to 0$이다. 따라서 따름정리 7.3.2에 의하여 $\sum a_n b_n$은 수렴한다. ■

정리 7.3.4 디리끌레(Dirichlet) 판정법

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합 수열 $\{s_n\}$이 유계이고 $\{b_n\}$은 0에 수렴하는 감소수열이라고 하자. 이때 무한급수 $\sum a_n b_n$은 수렴한다.

증명 $\{b_n\}$이 감소수열이므로

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=2}^{n+1} b_k = b_1 - b_{n+1}$$

이 성립한다. 그런데 $b_{n+1} \to 0$이므로 $\sum |b_n - b_{n+1}|$은 b_1에 수렴한다. 따라서 따름정리 7.3.3에 의하여 $\sum a_n b_n$은 수렴한다. ■

양수인 항과 음수인 항이 번갈아가면서 교대로 나타나는 수열을 교대수열이라고 부른다. 즉 임의의 n에 대하여 $a_n a_{n+1} < 0$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$을 **교대수열**이라고 부른다. 또한 교대수열의 급수를 **교대급수**라고 부른다. [책에 따라서는 '교대수열'이라는 용어를 사용하지 않는 경우도 있다.] $\{a_n\}$이 교대수열이고 $a_1 > 0$이면

$$a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$$

으로 나타낼 수 있다. 한편 수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이면

$$(-1)^{n+1} b_n$$

은 첫째항이 양수인 교대수열이 된다.

정리 7.3.5 교대급수 판정법

수열 $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열이라고 하자. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

이 수렴할 필요충분조건은 $\{a_n\}$이 0에 수렴하는 것이다.

증명 주어진 무한급수가 수렴하면 일반항 판정법에 의하여 당연히 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다. 역으로 $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열이고 0에 수렴한다고 하자. $\sum (-1)^{n+1}$의 부분합이 유계이고 $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열이며 0에 수렴하므로 디리끌레 판정법에 의하여 $\sum (-1)^{n+1} a_n$은 수렴한다. ■

참고 7.3.6 $\{a_n\}$이 감소하는 양항수열이고 $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$, $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + - \cdots| \\ &= |a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots| \le |a_{n+1}| \end{aligned}$$

이므로 다음과 같은 교대급수의 오차의 한계 공식을 얻는다.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - s_n \right| \le a_{n+1}$$

정리 7.3.7 아벨(Abel) 판정법

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, 무한급수 $\sum a_n$이 수렴하고 $\{b_n\}$이 단조이며 유계이면 무한급수 $\sum a_n b_n$은 수렴한다.

증명 $\{b_n\}$이 증가수열이면

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = b_{n+1} - b_1$$

이고, $\{b_n\}$이 감소수열이면

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = b_1 - b_{n+1}$$

이다. 따라서 $\sum |b_n - b_{n+1}|$은 수렴한다. 또한 $\sum a_n$의 부분합 $\{s_n\}$이 유계이므로 $\sum s_n (b_n - b_{n+1})$은 절대수렴한다. 한편 단조수렴정리에 의하여 $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\{s_n b_{n+1}\}$은 수렴한다. 따라서 따름정리 7.3.2에 의하여 $\sum a_n b_n$은 수렴한다. ■

예제 7.3.8 임의의 실수 x에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$가 수렴함을 보여라.

증명 k가 자연수일 때 함수 $\phi(x) := \sin kx$는 모든 x에 대하여 $\phi(x+2\pi) = \phi(x)$를 만족시키고 연속함수이며 $\phi(0) = 0$이다. 따라서 $x \in (0,\ 2\pi)$인 경우만 증명하면 된다. 더욱이 $x \in (0,\ 2\pi)$일 때

$$\widetilde{D_n}(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx \tag{1}$$

가 임의의 n에 대하여 유계임을 보이면 디리끌레 판정법에 의하여 원하는 결론을 얻을 수 있다. 삼각함수의 덧셈 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2}\,\widetilde{D_n}(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right\} \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \end{aligned}$$

를 얻는다. 따라서 임의의 n에 대하여

$$\left|\widetilde{D_n}(x)\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

이므로 각 x에 대하여 $\widetilde{D_n}(x)$는 유계이다. 한편 $\{1/n\}$은 0에 수렴하는 감소수열이므로 디리끌레 판정법에 의하여 각 x에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$는 수렴한다. ■

참고로 위 예제에서 $\widetilde{D_n}(x)$를 **디리끌레의 핵**(Dirichlet's kernel)이라고 부른다. 디리끌레의 핵은 푸리에 급수의 이론을 전개할 때 사용된다.

7.4 급수의 합과 곱

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\{a_n+b_n\}$과 $\{a_n b_n\}$은 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n b_n=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)$$

이 성립한다. 같은 맥락으로 두 급수 $\sum a_n$, $\sum b_n$이 수렴할 때 $\sum(a_n+b_n)$과 $\sum a_n b_n$이 수렴할 것인지에 대하여 생각할 수 있다.

정리 7.4.1 수렴하는 무한급수의 합

두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

증명 극한의 성질에 의하여 자명하다. 즉 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \qquad \blacksquare$$

두 급수를 곱하는 경우에는 더하는 경우보다 복잡하다. 왜냐하면 일반적으로

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

이기 때문이다. 따라서 두 급수의 곱에 대한 논의를 위해서 새로운 정의가 필요하다. 편의를 위하여 지금부터는 첫째항의 첨수를 0으로 두자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 형식적으로

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots)$$

이다. 이것은 다음 표의 모든 칸에 있는 값을 더한 것과 같다.

	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	$\cdots$
c_0	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\cdots$
c_1	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\cdots$
c_2	a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\cdots$
c_3	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

즉 $c_n := \sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$라고 하면 위 표의 모든 칸에 있는 값을 더하는 것은 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$의 값을 구하는 것과 같다.

정의 7.4.2 무한급수의 코시 곱

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

라고 하자. 이때 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$을 두 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$의 **코시 곱**(Cauchy product)이라고 부른다.

정리 7.4.3 수렴하는 무한급수의 곱

무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$이 절대수렴하고 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$이 수렴하면 두 무한급수의 코시 곱도 수렴하고 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

증명* 표기를 간단하게 하기 위하여 다음과 같이 정의하자.

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n := B_n - B.$$

그러면 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0. \end{aligned}$$

여기서 $\gamma_n := a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0$이라고 하자. $A_n B \to AB$이므로 $\gamma_n \to 0$임을 보이기만 하면 $C_n \to AB$가 증명된다.

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

B의 정의에 의하여 자연수 N_1이 존재하여 $n \ge N_1$일 때 $|\beta_n| < \dfrac{\epsilon}{2\alpha + 1}$이 성립한다.

$$K := \max\{|\beta_0|, |\beta_1|, \cdots, |\beta_{N_1}|\} + 1$$

이라고 하자. K는 양수이므로 자연수 N_2가 존재하여 $n \ge N_2$일 때

$$|a_{n-N_1}| < \frac{\epsilon}{2K(N_1 + 1)}$$

이 성립한다.

따라서 $n \geq N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$일 때

$$\begin{aligned}|\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \beta_1 a_{n-1} + \cdots + \beta_{N_1} a_{n-N_1}| + |\beta_{N_1+1} a_{n-N_1-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq (|\beta_0||a_n| + \cdots + |\beta_{N_1}||a_{n-N_1}|) + (|\beta_{N_1+1}||a_{n-N_1-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0|) \\ &\leq K(|a_n| + \cdots + |a_{n-N_1}|) + \frac{\epsilon}{2\alpha+1}(|a_{n-N_1-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &\leq K(N_1+1)\frac{\epsilon}{2K(N_1+1)} + \frac{\epsilon}{2\alpha+1}\alpha < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $\gamma_n \to 0$이다. ■

정리 7.4.3이 실제로 성립하는지 확인해보자. $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 3^{-n}$이라고 하자. 그러면

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = -\frac{2}{3^n} + \frac{3}{2^n}$$

이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3^n} + \frac{3}{2^n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n} = -3 + 6 = 3$$

이다. 한편

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

이므로 정리 7.4.3의 등식이 성립한다.

참고 7.4.4 정리 7.4.3에서 두 무한급수 $\sum a_n$, $\sum b_n$이 모두 조건수렴하면 두 급수의 코시 곱은 수렴하지 않을 수도 있다. 예를 들어

$$a_n = b_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

이라고 하면 교대급수 판정법에 의하여 두 무한급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$은 모두 수렴한다. 그러나

$$\begin{aligned}c_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot (2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2n}} + \frac{1}{\sqrt{3(2n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1) \cdot 1}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} = \frac{2n+1}{n}\end{aligned}$$

이므로 $\{c_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 따라서 코시 곱 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$은 발산한다. □

예제 7.4.5 실수 x에 대하여

$$\exp(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

이라고 하자. 이때 임의의 실수 x, y에 대하여 $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$가 성립함을 보여라.

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $\exp(x)$는 절대수렴한다. 따라서 정리 7.4.3과 이항정리에 의하여

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

가 성립한다. □

7.5 급수의 재배열*

유한 개의 수를 더할 때에는 교환법칙이 성립한다. 예를 들어 a, b, c, d가 실수일 때

$$a+b+c+d=c+b+d+a=b+c+a+d=\cdots$$

가 성립한다. 또한 수열의 유한 개의 항이 변해도 극한값은 변하지 않으므로 무한급수에서도 유한 개의 항의 순서를 바꾸는 교환법칙이 성립한다. 그러나 무한급수에서 무한 개의 항의 순서를 바꾸면 본래의 무한급수와 동일한 값에 수렴하지 않을 수도 있다. 그 예로서 다음과 같은 교대조화급수를 살펴보자.

$$S := 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots$$

위 무한급수의 각 항의 순서를 바꾸어 양항 1개와 음항 2개가 번갈아가면서 나타나도록 하면 다음과 같다.

$$T := 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+--\cdots$$

무한급수 S의 부분합을 s_n, T의 부분합을 t_n이라고 하면

$$\begin{aligned}
t_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right]-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&=\frac{1}{2}s_{2n}
\end{aligned}$$

이다. 그런데 $\lim_{n\to\infty} s_{2n}=S$이므로 $\lim_{n\to\infty} t_{3n}=\frac{1}{2}S$이다. 비슷한 방법으로 $\{t_{3n+1}\}$과 $\{t_{3n+2}\}$가 모두 $\frac{1}{2}S$에 수렴함을 보일 수 있다. 따라서 $T=\frac{1}{2}S$가 성립한다.

이와 같이 무한급수의 무한 개의 항의 순서를 바꾸면 본래의 무한급수와 다른 값에 수렴할 수도 있다.

이 절에서는 재배열된 무한급수가 본래의 무한급수와 동일한 값에 수렴할 조건은 무엇인지, 그리고 재배열된 무한급수가 본래의 무한급수와 다른 값에 수렴하는 경우 그 값이 얼마가 되는지에 대하여 살펴보자.

정의 7.5.1 | 재배열된 급수

수열 $\{b_j\}$가 $\{a_n\}$의 **재배열된 수열**이라는 것은 일대일대응 $r:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$이 존재하여 임의의 n에 대하여 $b_{r(n)}=a_n$을 만족시키는 것을 의미한다. 이때 무한급수 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$를 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 **재배열된 급수**라고 부른다.

함수 f에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$f^{+}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{if } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{그리고} \quad f^{-}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{if } f(x) < 0 \end{cases}$$

수열 $\{a_n\}$에 대해서도 비슷하게 다음과 같이 정의한다.

$$a_n^{+} := \begin{cases} a_n & \text{if } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{if } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{그리고} \quad a_n^{-} := \begin{cases} 0 & \text{if } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{if } a_n < 0 \end{cases}$$

이때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 s_n에 대하여

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{-}$$

가 성립한다. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 부분합에 대해서

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} a_k^{+} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{-}$$

가 성립한다. 이 등식을 이용하여 다음 정리를 얻는다.

보조정리 7.5.2 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$는 모두 수렴한다.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$는 모두 양의 무한대로 발산한다.

증명 (i) $\{a_n^{+}\}$과 $\{a_n^{-}\}$는 모두 양항수열이고 임의의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{+} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{그리고} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^{-} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

이므로 유계 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$는 모두 수렴한다.

(ii) 만약 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$가 모두 수렴하면

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} a_k^{+} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{-}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$은 수렴한다. 이것은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴한다는 데에 모순이다.

만약 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 중 하나는 수렴하고 하나는 발산하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{-}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다. 이것은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 데에 모순이다. ■

정리 7.5.3 절대수렴하는 무한급수의 재배열

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 재배열된 급수도 동일한 값에 절대수렴한다.

증명 이 증명에서 합 기호의 아래첨자는 $n=1$, 위첨자는 ∞인 것으로 약속한다.

먼저 $\sum a_n$이 양항급수인 경우를 증명하자. 무한급수 $\sum b_n$이 $\sum a_n$의 재배열된 급수라고 하자. 그리고 $A \coloneqq \sum a_n$의 부분합을 A_n, $B \coloneqq \sum b_n$의 부분합을 B_n이라고 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $B_n \le A$이다. 그런데 $\{B_n\}$은 단조증가이므로 단조수렴정리에 의하여 $\sum b_n$은 수렴하고 $B \le A$가 성립한다. 마찬가지로 임의의 자연수 n에 대하여 $A_n \le B$이므로 $\sum a_n$은 수렴하고 $A \le B$가 성립한다. 따라서 $A = B$이므로 $\sum a_n$과 $\sum b_n$은 동일한 값에 수렴한다.

다음으로 $\sum a_n$이 양항급수가 아니라고 하자. 그러면 $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$가 성립한다. $\sum b_n$이 $\sum a_n$의 재배열된 급수라고 하자. 그러면 $\sum b_n^+$는 $\sum a_n^+$의 재배열된 급수이고, $\sum b_n^-$는 $\sum a_n^-$의 재배열된 급수이다. 이때 $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum b_n^+$, $\sum b_n^-$는 모두 양항급수이므로 앞의 증명과정에 의하여 $\sum a_n^+ = \sum b_n^+$이고 $\sum a_n^- = \sum b_n^-$가 성립한다. 따라서

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum b_n^+ - \sum b_n^-$$

이므로 $\sum b_n$은 $\sum a_n$과 동일한 값에 수렴한다. 더욱이

$$\sum |b_n| = \sum b_n^+ + \sum b_n^- = \sum a_n^+ + \sum a_n^- = \sum |a_n|$$

이므로 $\sum b_n$은 절대수렴한다. [증명이 꽤 길지만 이해만 하면 대단히 쉬운 증명이다.] ■

위 정리에서 $\sum a_n$이 절대수렴한다는 조건을 조건수렴한다는 조건으로 바꾸면 $\sum a_n$의 재배열된 급수는 동일한 값에 수렴하지 않을 수도 있다. 더욱이 다음과 같은 놀라운 결론을 얻는다.

정리 7.5.4 리만의 정리 : 조건수렴하는 무한급수의 재배열

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴한다고 하자. 그러면 임의의 실수 x에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 재배열하여 x에 수렴하도록 할 수 있다.

증명 개략적인 설명을 하겠다. 보조정리 7.5.2에 의하여 $\sum a_n^+$와 $\sum a_n^-$는 각각 양의 무한대로 발산한다. 따라서 $\{a_n\}$의 항 중에서 0 이상인 것을 앞의 항부터 계속 더하여 x보다 커지게 할 수 있다. 그렇게 더한 값이 x보다 커지는 즉시 멈추고 추가로 $\{a_n\}$의 항 중에서 음수인 것을 앞의 항부터 계속 더하여 x보다 작아지게 할 수 있다. 그렇게 더한 값이 x보다 작아지는 순간 멈추고 다시 $\{a_n\}$의 남은 항 중에서 0 이상인 것을 앞의 항부터 계속 더하여 x보다 커지게 한다. 다시 $\{a_n\}$의 남은 항 중에서 음수인 것을 계속 더하여 x보다 작아지게 한다. 이 과정을 반복하여 $\sum a_n$의 재배열된 급수를 얻는다. 그런데 $a_n \to 0$이므로 $\{a_n\}$의 남은 항들을 더하는 과정을 반복할수록 더한 값은 x에 가까워지고, 참고 7.3.6과 비슷한 부등식에 의하여, 더한 값은 결국 x에 수렴한다. 증명을 상세히 기술할 수 있으나 아쉽게도 지면이 부족하여 여기서 마친다. ■

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 양항급수가 수렴하면 그 값은 양수이다.

(2) 양항수열 $\{a_n\}$이 유계이면 무한급수 $\sum a_n$은 수렴한다.

(3) 무한급수의 부분합은 수열이다.

(4) 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴하면 무한급수 $\sum a_n$은 수렴한다.

(5) 두 무한급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n b_n$도 수렴한다.

(6) 절대수렴하는 무한급수는 재배열해도 재배열하기 전과 동일한 값에 수렴한다.

2. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)(n+3)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2e^{-2n}}{n^2+1}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{e}{n}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ (단, $p>0$)

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-\cos n}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

3. 다음 두 무한급수의 곱을 하나의 무한급수로 나타내어라.

(1) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ (2) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

(3) $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\right)$ (4) $\displaystyle\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2\ln n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\right)$

4. 정리 7.5.4의 증명 방법을 이용하여 교대조화급수

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots$$

이 1.2에 수렴하도록 재배열한 급수의 처음 20개 항을 구하여라.

개념 응용하기

5. 무한급수 $\sum a_n$이 절대수렴하고 수열 $\{b_n\}$이 유계이면 $\sum a_n b_n$도 절대수렴함을 증명하여라. 또한 여기서 $\sum a_n$이 절대수렴한다는 조건을 조건수렴하는 것으로 바꾸면 $\sum a_n b_n$은 수렴하지 않을 수도 있음을 보여라.

6. 양항급수 $\sum a_n$이 수렴하고 $p>1$이면 $\sum (a_n)^p$도 수렴함을 증명하여라. 여기서 양항급수라는 조건이 빠지면 $\sum a_n$은 수렴하지만 $\sum (a_n)^p$는 발산할 수 있음을 보여라.

7. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주어졌을 때 무한급수 $\sum a_n$이 수렴하는지 판정하여라.

$$a_n=\begin{cases} n2^{-n} & \text{if } n \text{ is prime} \\ 2^{-n} & \text{if } n \text{ is not prime}\end{cases}$$

8. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하여라.

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\cdots$$

9. 양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$도 수렴함을 증명하여라.

10. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 귀납적으로 주어졌을 때 $\{a_n\}$이 수렴함을 증명하여라.

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

11. 조화급수의 각 항의 부호를 바꾼 다음 급수가 수렴하는지 판정하여라.

(1) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}++--\cdots$

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}++-\cdots$

12. $\{x_n\}$이 피보나치 수열(Fibonacci sequence)일 때 $\{x_{n+1}/x_n\}$이 황금비에 수렴함을 보여라. 즉

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

임을 보여라.

13. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{1}{n}$이 수렴하도록 하는 실수 p의 값의 범위를 구하여라.

14. $\sum a_n$이 절대수렴하고 $\sum b_n$이 조건수렴하면 $\sum(a_n+b_n)$은 조건수렴함을 증명하여라.

15. 다음 무한급수의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2}{n^2-1}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

실력 다지기

16. 자연수 n에 대하여 $a_n \coloneqq \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.

17. 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이고 무한급수 $\sum a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$임을 증명하여라.

18. 조화급수의 부분합 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 $0<H_n-\ln n\le 1$이다.

(2) $\{H_n-\ln n\}$은 감소수열이다.

실제로 수열 $\{H_n-\ln n\}$은 수렴하며 극한은 0.577정도 된다. 이 값을 **오일러-마스케로니 상수**(Euler-Mascheroni constant)라고 부르며 보통 γ로 나타낸다.

19. 수열 $\{a_n\}$이 유계이고 $b_n=a_{n+1}-a_n$으로 정의된 계차수열 $\{b_n\}$이 증가수열이면 $\{b_n\}$은 0에 수렴함을 증명하여라.

20. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수일 때 다음을 증명하여라.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

또한 하극한에 대해서는 부등식이 반대로 성립함을 증명하여라. 이 부등식은 제곱근 판정법이 비 판정법보다 더 민감한 판정법임을 의미한다.

21. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 $\{(a_n/a_{n-1})^n\}$이 수렴하며 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n$이라고 하자.

만약 $\rho < \frac{1}{e}$이면 무한급수 $\sum a_n$은 수렴하고 $\rho > \frac{1}{e}$이면 무한급수 $\sum a_n$은 발산함을 증명하여라.

22. 함수 f가 $[a,\ \infty)$에서 정의되었고 $a_0 = a$이며 양의 무한대로 발산하는 순증가수열 $\{a_n\}$이 존재하여 세 조건

(i) $x_1 \in (a_n,\ a_{n+1})$, $x_2 \in (a_{n+1},\ a_{n+2})$이면 $f(x_1)f(x_2) < 0$이다,

(ii) $\left|\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx\right| \ge \left|\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} f(x)dx\right|$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = 0$

을 모두 만족시키면 $[a,\ \infty)$에서 f의 특이적분이 수렴함을 증명하여라. 이 판정법을 특이적분의 **교대 판정법**(alternation test)이라고 부른다.

23. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$을 만족시킬 때 무한급수 $\sum a_n$의 수렴 여부를 판정하여라.

24. $n \ge 2$일 때 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이 자연수가 아님을 증명하여라.

도약하기

25. 집합 $E = \{x_i \mid i \in I\}$가 실수 집합의 부분집합이라고 하자. 그리고 I의 유한부분집합 J에 대하여

$$A_J = \sum_{i\in J}|x_i|$$

라고 정의하자. 이때 집합 $T = \{A_J \mid J \text{ is a finite subset of } I\}$가 위로 유계이면 '$E$의 **합을 구할 수 있다**(summable)'라고 말한다. E의 합을 구할 수 있으면 E가 가산집합임을 증명하여라.

E가 가산집합이므로 E의 원소를 수열 $\{x_n\}$으로 나타낼 수 있다. 또한 T가 위로 유계이므로 $\sum x_n$은 절대수렴한다. 따라서 $\sum x_n$의 값을 E의 합으로 정의한다.

26. 노름선형공간에서 정의된 무한급수의 수렴을 어떻게 정의하는지 찾아보자. [Banach summable family에 대하여 조사해 보아라.]

27. 디리끌레(Dirichlet) 급수와 리만(Riemann)의 제타 함수에 대하여 조사해보자.

28. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이 수렴한다는 것을 적분을 배우지 않은 고등학교 2학년 학생에게 가르치려고 한다. 적절한 설명 방법을 고안해 보아라.

생각 넓히기 르베그 적분

19세기까지 적분은 기하학적 직관에 의존하여 다루어져 왔었다. 즉 f가 실함수이고 $[a, b]$에서 $f \geq 0$일 때 f의 적분은 두 직선 $x=a$, $x=b$와 x축 그리고 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이로 여겨졌으며, 적분과 관련된 이론들은 이와 같은 직관적 개념에서 크게 벗어나지 못하고 있었다.

1902년 소보른 대학의 대학원생이었던 르베그(Henri Lebesgue)는 그의 박사학위 논문에서 리만 적분과는 다른 방법으로 적분하는 방법인 르베그 적분을 소개하였다. 두 적분의 차이를 직관적으로 설명하면, 리만 적분이 피적분함수의 정의역을 분할하는 것과는 달리 르베그 적분은 피적분함수의 치역을 분할한다.

단순한 함수를 이용하여 두 적분의 차이를 살펴보자. $I=[0, 8]$에서 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} 7 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 11 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 13 & \text{if } 3 \leq x \leq 6 \\ 11 & \text{if } 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

로 주어졌다고 하자. 리만의 방법대로 I에서 f의 적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 7\times([0, 1)\text{의 길이})+11\times([1, 3)\text{의 길이})+13\times([3, 6]\text{의 길이})+11\times((6, 8]\text{의 길이}) \\ & \quad = 7\times 1 + 11\times 2 + 13\times 3 + 11\times 2 = 90. \end{aligned}$$

이제 I를 세 개의 집합 $A=[0, 1)$, $B=[1, 3)\cup(6, 8]$, $C=[3, 6]$으로 분할하자. 그러면

$$f(x)=\begin{cases} 7 & \text{if } x\in A \\ 11 & \text{if } x\in B \\ 13 & \text{if } x\in C \end{cases}$$

이므로 르베그의 방법대로 I에서 f의 적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 7\times(f^{-1}(\{7\})\text{의 길이})+11\times(f^{-1}(\{11\})\text{의 길이})+13\times(f^{-1}(\{13\})\text{의 길이}) \\ & \quad = 7\times 1 + 11\times 4 + 13\times 3 = 90. \end{aligned}$$

이번에는 특성함수 $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$의 경우를 살펴보자. 이 함수의 치역은 $\{0, 1\}$이다. 따라서 르베그의 방법대로 $[0, 1]$에서 f의 적분을 계산하면

$$0\times(\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{0\})\text{의 길이})+1\times(\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{1\})\text{의 길이})=([0, 1]\cap\mathbb{Q}\text{의 길이})$$

이다. 이로써 함수 $\chi_{\mathbb{Q}}$의 적분을 구하는 문제는 집합 $[0, 1]\cap\mathbb{Q}$의 길이를 구하는 문제로 환원되었다. 실제로 유리수 집합의 길이는 0이므로 $[0, 1]$에서 $\chi_{\mathbb{Q}}$의 르베그 적분 값은 0이다.

리만 적분 가능한 함수는 르베그 적분 가능하고 두 적분 값은 일치한다. 즉 르베그 적분은 리만 적분을 일반화한 것이다. 뿐만 아니라 르베그는 함수가 리만 적분 가능할 필요충분조건에 대한 다음과 같은 답을 내놓았다.

> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$에서 리만 적분 가능하기 위한 필요충분조건은 $[a, b]$에서 f가 불연속인 점들의 집합의 측도가 0인 것이다.

오늘날 르베그 적분은 확률론, 통계학, 물리학 등의 여러 분야에서 다양하게 활용되고 있다. 르베그 적분에 관심 있는 독자는 실해석학과 측도론 교재를 참고하기 바란다.

08

실해석적 함수

각 항이 실수인 수열을 실수열이라고 부르는 것처럼 각 항이 함수인 수열을 함수열이라고 부른다. 함수열의 극한을 이용하면 간단한 함수의 극한으로서 복잡한 함수를 나타낼 수 있기 때문에 더 많은 종류의 함수의 성질을 분석할 수 있게 된다. 특히 거듭제곱급수의 극한으로 나타낼 수 있는 함수를 해석적 함수라고 부르는데, 우리가 일상적으로 사용하는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등은 모두 해석적 함수이다. 해석적 함수의 성질을 이용하면 이들 함수를 다항함수와 비슷한 방법으로 다룰 수 있다.

이 장에서는 함수열의 극한의 성질을 밝히고 해석적 함수의 개념을 살펴보며 다양한 함수를 해석적으로 표현한다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 균등수렴의 개념을 설명하고 미적분과 관련된 성질을 증명할 수 있다.
- 함수열과 함수급수의 균등수렴을 판정할 수 있다.
- 균등수렴과 관련된 연속함수공간의 특징을 설명할 수 있다.
- 해석적 함수의 개념을 설명하고 성질을 증명할 수 있다.
- 해석적 함수를 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다.

8.1 함수열의 균등수렴

직관적으로 실수열은 실수를 나열하고 순서대로 번호를 부여한 것이다. 같은 방법으로 함수열을 생각할 수 있다. 예를 들어 구간 $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) \coloneqq x^n$으로 정의된 함수 f_n은 n이 정해질 때마다 x에 대한 함수가 된다. 이때 $\{f_n\}$은 함수열이다. 정확한 정의는 다음과 같다.

정의 8.1.1 | 함수열

집합 D가 실수 집합의 부분집합이고, $\mathbb{R}^D$가 정의역이 D인 실함수들의 모임이라고 하자. 이때 모든 항이 $\mathbb{R}^D$의 원소인 수열을 D 위에서의 **실함수열** 또는 간단히 **함수열**이라고 부른다. 실수열과 마찬가지로 함수열도 $\{f_n\}$과 같이 나타낸다.

수열의 극한을 생각한 것처럼 함수열의 극한을 생각할 수 있다. $[0,\ 1]$에서 $f_n(x)=x^n$으로 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 주어졌다고 하자. 이때

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

이므로

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

로 정의된 함수 f에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

라고 하는 것이 자연스럽다.

정의 8.1.2 함수열의 극한

$\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자. 만약 함수 f가 존재하여 임의의 $x\in D$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

를 만족시키면 '$\{f_n\}$은 f에 **점별수렴**한다' 또는 간단히 '$\{f_n\}$은 f에 **수렴**한다'라고 말한다. 이때 f를 $\{f_n\}$의 **점별극한함수** 또는 간단히 **극한함수**라고 부르며 $f_n \to f$ 또는 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$로 나타낸다.

함수급수도 실수열의 무한급수와 마찬가지로 정의한다.

정의 8.1.3 함수급수

함수열 $\{f_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$$

를 $\{f_n\}$의 **함수급수**라고 부른다. 만약 함수 f가 존재하여 임의의 $x\in D$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x)$$

를 만족시키면 '함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$이 f에 **수렴**한다'라고 말한다.

예제 8.1.4 $f_n(x) = |\cos x|^n$일 때 $\mathbb{R}$에서 $\{f_n\}$의 극한함수를 구하여라.

풀이 $x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$일 때에는 $|\cos x| = 1$이고 그 외에는 $|\cos x| < 1$이다. 따라서

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

라고 하면 $f_n \to f$이다. □

함수열 $\{f_n\}$의 각 항 f_n이 가지고 있는 성질을 극한함수 f는 가지고 있지 않을 수도 있다. 즉 $\{f_n\}$의 각 항이 미분 가능하거나 적분 가능하더라도 극한함수 f는 미분 불가능하거나 적분 불가능할 수 있다.

보기 8.1.5 $x \in [0,\ \pi]$에 대하여 $f_n(x) \coloneqq \sin^n x$라고 하자. 그러면 임의의 n에 대하여 f_n은 $[0,\ \pi]$에서 연속이고 미분 가능하다. 그러나

$$f_n(x) \to f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

이므로 극한함수 f는 $\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이 아니고 미분 불가능하다. □

보기 8.1.6 유리수 집합은 무한인 가산집합이므로 $\mathbb{N}$으로부터 $\mathbb{Q}$로의 일대일대응이 존재한다. $\{x_k\}$가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 유리수에 대응되는 수열이라고 하자. 그리고 $[0,\ 1]$에서 함수열 $\{f_n\}$을

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 임의의 n에 대하여 $f_n(x) \neq 0$인 점 x는 n개 뿐이므로 f_n은 $[0,\ 1]$에서 리만 적분 가능하고 적분값은 0이다. 그러나 $\{f_n\}$의 극한함수는 특성함수 $f \coloneqq \chi_{(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}}$이므로 f는 $[0,\ 1]$의 모든 점에서 불연속이다. 따라서 $\{f_n\}$의 극한함수는 리만 적분 불가능하다. □

함수열 $\{f_n\}$의 극한함수 f가 미분 가능하거나 적분 가능하더라도 그 값은 f_n을 미분하거나 적분한 함수의 극한과 다를 수 있다.

보기 8.1.7 $x \in [0,\ 1]$에 대하여 $f_n(x) \coloneqq x^n/n$이라고 하자. 그러면 임의의 n에 대하여 $f_n{}'(1) = 1$이다. 그러나 $\{f_n\}$의 극한함수는 $f(x) = 0$이므로 $f'(1) = 0$이다. 즉 $f_n \to f$이지만 $f_n{}' \not\to f'$이다. □

보기 8.1.8 $[0,\ 1]$에서 함수 f_n을 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} n & \text{if } 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

라고 정의하자. 그러면 각 n에 대하여

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = 1$$

이다. 그러나 $\{f_n\}$의 극한함수는 $f(x) \coloneqq 0$으로 정의된 함수 $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$이며

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

이다. 즉

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

이다. □

함수의 연속성이나 미분 가능성 또는 적분 가능성은 정의역에 속하는 점에서의 함숫값과 그 점에 가까이 있는 점에서의 함숫값의 관계에 의존한다. 예를 들어 변수가 변함에 따라 함숫값이 서서히 변하는 함수는 연속이며 함숫값이 급격히 변하는 함수는 불연속이다.

함수열의 극한함수가 본래 함수열을 이루고 있는 함수의 성질을 보존하지 못하는 이유는 함수열의 수렴이 정의역의 각 점에서 개별적으로 정의되기 때문이다. 함수열의 극한의 정의는

$$\forall x \in D\ \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ [n > N \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$$

으로서 x에 따라서 N이 변한다. 여기서 N은 함수열의 항 f_n이 '몇 걸음'만에 f에 ϵ만큼 가까이 다가가는지를 정하는 척도가 된다. 그런데 x에 따라 N이 변한다는 것은 어떠한 점에서는 함수열의 값이 극한함수에 빠르게 다가가며 다른 점에서는 함수열의 값이 극한함수에 천천히 다가갈 수 있다는 것을 의미한다. 이렇게 각 점 x에 대하여 $f_n(x)$의 값이 $f(x)$의 값에 다가가는 속도가 다르기 때문에 본래 함수열의 성질을 극한함수가 보존할 수 없게 되는 것이다.

따라서 극한함수가 본래 함수열을 이루고 있는 함수의 여러 가지 성질을 보존하도록 하기 위해서는 함수열의 수렴에 대한 새로운 정의가 필요하다.

정의 8.1.9 | 함수열의 균등수렴

$\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자. 만약 함수 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$가 존재하여 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$이고 $x \in D$일 때마다 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$이 성립하면 '$\{f_n\}$은 f에 **균등수렴**한다' 또는 '$\{f_n\}$은 f에 **평등수렴**한다'라고 말한다. 이것을 $f_n \rightrightarrows f$ 또는 $f_n \Rightarrow f$로 나타낸다. 함수급수의 균등수렴도 마찬가지로 정의한다.

참고 8.1.10 정의에 의하여 명백히 균등수렴하는 함수열은 점별수렴한다. 또한 균등수렴하는 경우 극한함수는 점별극한함수와 동일하다. 즉 $f_n \rightrightarrows f$이면 $f_n \rightarrow f$이다. □

균등수렴의 정의를 보면

$$\text{임의의 } x \in D\text{에 대하여 } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

이라는 부분이 있다. 이것은 D 위에서 f_n과 f의 값이 아무리 많이 차이나더라도 그 차가 ϵ보다는 작다는 뜻이다. 즉 D에서 $|f_n(x) - f(x)|$의 상한이 ϵ 이하라는 의미이다. 이러한 관점에서 균등수렴의 정의를 다음과 같이 쓸 수 있다.

임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$이 성립한다.

집합 D 위에서 정의된 함수 f에 대하여 $\|f\|_D \coloneqq \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$를 D에서 f의 **상한노름** 또는 **균등노름**이라고 부른다. 혼동될 염려가 없는 경우 $\|f\|_D$를 간단히 $\|f\|$로 나타내기도 한다. 상한노름을 이용하여 균등수렴의 정의를 쓰면 다음과 같다.

임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $\|f_n - f\|_D < \epsilon$이다.

집합 D와 함수열 $\{f_n\}$, 함수 f에 대하여 $\|f_n - f\|_D$는 첨수가 n인 실수열이므로 수열의 극한의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

정리 8.1.11 상한노름을 이용한 균등수렴의 정의

D 위에서 함수열 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴할 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0$인 것이다.

정의를 이용하여 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴하는 것을 증명하는 과정은 보통 다음과 같다.

1. $\{f_n\}$이 점별수렴하는지 살펴본다. 만약 점별수렴하지 않으면 균등수렴하지 않는다.
2. $\{f_n\}$이 점별수렴하면 극한함수 f를 구한다.
3. $\|f_n - f\|$의 값을 가늠해보고 균등수렴의 정의를 이용하여 균등수렴 여부를 증명한다.

예제 8.1.12 구간 $[0,\ 1]$에서

$$f_n(x) \coloneqq \frac{nx^2}{1+nx}$$

으로 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴함을 보여라.

풀이 임의의 $x \in [0,\ 1]$에 대하여

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = x$$

이다. 이제 $f_n \rightrightarrows f$임을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $1 \le \epsilon N$인 자연수 N을 택하자. 그러면 $n > N$일 때마다

$$\|f_n - f\| = \left\| \frac{-x}{1+nx} \right\| = \frac{1}{n} \left\| \frac{nx}{nx+1} \right\| = \frac{1}{n} \left\| 1 - \frac{1}{nx+1} \right\| \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

이므로 $\|f_n - f\| \to 0$이다. 따라서 $f_n \rightrightarrows f$이다. □

균등수렴하지 않음을 보일 때에는 균등수렴의 정의의 부정을 사용한다.

예제 8.1.13 구간 $[0,\ 1]$에서 $f_n(x) \coloneqq x^n$으로 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴하지 않음을 보여라.

풀이 $x \in [0,\ 1)$일 때 $f_n(x) \to 0$이고 $x = 1$일 때 $f_n(x) \to 1$이므로 $\{f_n\}$의 극한함수는

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

로 정의된 함수 f이다.

이제 $\epsilon \coloneqq 1/2$라고 하자. 그리고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자. $n \coloneqq N+1$이라고 하면 $n > N$이다. 이때 $f_n(1-) = 1$이므로 $f_n(x_0) > \epsilon$을 만족시키는 $x_0 \in (0,\ 1)$이 존재한다. 따라서

$$\|f_n - f\| \ge |f_n(x_0) - f(x_0)| = f_n(x_0) > \epsilon$$

이므로 $\{f_n\}$은 f에 균등수렴하지 않는다. □

코시 조건을 만족시키는 수열이 수렴하는 것처럼 함수열의 극한에 대해서도 코시 조건을 생각할 수 있다.

정리 8.1.14 | 균등수렴의 코시 조건

집합 D 위에서 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $m > N,\ n > N$일 때마다 $\|f_m - f_n\| < \epsilon$이 성립하는 것이다.

증명 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴한다고 가정하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $\|f_n - f\| < \epsilon/2$를 만족시킨다. 이때 $m > N,\ n > N$일 때마다

$$\|f_m - f_n\| = \|f_m - f + f - f_n\| \le \|f_m - f\| + \|f - f_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $\{f_n\}$은 코시 조건을 만족시킨다.

역으로 $\{f_n\}$이 코시 조건을 만족시킨다고 하자. 그러면 각 $x \in D$에 대하여 $\{f_n(x)\}$은 코시 수열이다. 따라서 각 $x \in D$에 대하여

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

가 존재한다. 이제 $f_n \rightrightarrows f$임을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $m > N,\ n > N$일 때마다

$$\|f_m - f_n\| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 이제 $n > N$이라고 하자. $\{f_n\}$이 f에 점별수렴하므로 임의의 $x \in D$에 대하여 $m > N$인 자연수 m이 존재하여

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. 이때

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\le \|f_m - f_n\| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 x는 D의 임의의 원소이므로 $\|f_n - f\| \le \epsilon$을 얻는다. 즉 $\|f_n - f\| \to 0$이므로 $\{f_n\}$은 f에 균등수렴한다. ■

위 정리는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

집합 D 위에서 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴할 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $m > N,\ n > N,\ x \in D$일 때마다 $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$이 성립하는 것이다.

이제 함수열이 균등수렴할 때 극한함수가 본래 함수열을 이루고 있는 함수의 어떠한 성질을 보존하는지 살펴보자.

정리 8.1.15 균등수렴과 연속성

$\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이고 임의의 n에 대하여 f_n이 D에서 연속이라고 하자. 만약 $f_n \rightrightarrows f$이면 f는 D에서 연속이다.

증명 $a \in D$이고 임의의 n에 대하여 f_n이 a에서 연속이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $f_n \rightrightarrows f$이므로 자연수 m이 존재하여 임의의 $x \in D$에 대하여

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다. 또한 f_m은 a에 연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때마다

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

이 성립한다. 따라서 $|x-a| < \delta$, $x \in D$일 때

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

이므로 f는 a에서 연속이다. ■

정리 8.1.16 균등수렴과 적분 가능성

함수열 $\{f_n\}$의 각 항이 $[a, b]$에서 적분 가능하고 $f_n \rightrightarrows f$라고 하자. 이때 f는 $[a, b]$에서 적분 가능하며 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $f_n \rightrightarrows f$이므로 자연수 n이 존재하여 임의의 $x \in [a, b]$에 대하여

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

을 만족시킨다. 또한 f_n은 $[a, b]$에서 적분 가능하므로 $[a, b]$의 분할 $P \coloneqq \{x_0, x_1, \cdots, x_p\}$가 존재하여

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족시킨다. 이때 $1 \leq i \leq p$인 각 i에 대하여

$$m_i(f_n) - \frac{\epsilon}{3(b-a)} \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M_i(f_n) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

이 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned}U(f,\ P)-L(f,\ P)&=\sum_{i=1}^{p}M_i(f)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{p}m_i(f)\Delta x_i\\&\le\sum_{i=1}^{p}\left[M_i(f_n)+\frac{\epsilon}{3(b-a)}\right]\Delta x_i-\sum_{i=1}^{p}\left[m_i(f_n)-\frac{\epsilon}{3(b-a)}\right]\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{p}M_i(f_n)\Delta x_i+\frac{\epsilon}{3}-\sum_{i=1}^{p}m_i(f_n)\Delta x_i+\frac{\epsilon}{3}\\&=U(f_n,\ P)+\frac{\epsilon}{3}-L(f_n,\ P)+\frac{\epsilon}{3}\\&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{2}{3}\epsilon=\epsilon\end{aligned}$$

이므로 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

다음으로 f의 적분과 f_n의 적분의 극한이 동일함을 증명하자. 다시 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 균등수렴의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n\ge N$, $x\in[a,\ b]$일 때

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

이 성립한다. 이때

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|&=\left|\int_a^b(f_n(x)-f(x))dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\\&\le\int_a^b\frac{\epsilon}{b-a}dx=\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon\end{aligned}$$

이므로 정리의 등식을 얻는다. ■

위 정리는 항별로 적분 가능한 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴할 때

$$\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

와 같이 극한과 적분의 순서를 바꿀 수 있다는 것을 의미한다.

정리 8.1.17 | 균등수렴과 미분 가능성

$\{f_n\}$이 $[a,\ b]$ 위에서의 함수열이고 임의의 n에 대하여 f_n이 미분 가능하며 f_n'이 적분 가능하다고 하자. 또한 $c\in[a,\ b]$가 존재하여 $\{f_n(c)\}$가 수렴하며 $\{f_n'\}$이 연속인 함수 g에 균등수렴한다고 하자. 이때 $\{f_n\}$은 미분 가능한 함수에 균등수렴하며 $f'=g$가 성립한다.

증명 먼저 $\{f_n\}$이 균등수렴함을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f_n'이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하므로 임의의 $x\in(c,\ b]$에 대하여

$$f_n(x)=\int_c^x f_n'(t)dt+f_n(c) \tag{1}$$

가 성립한다.

따라서

$$f_n(x) - f_m(x) = \int_c^x (f_n'(t) - f_m'(t))\, dt + (f_n(c) - f_m(c))$$

이므로

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \int_c^x |f_n'(t) - f_m'(t)|\, dt + |f_n(c) - f_m(c)| \tag{2}$$

가 성립한다. $\{f_n'\}$이 균등수렴하고 $\{f_n(c)\}$는 수렴하는 실수열이므로 코시 조건에 의하여 자연수 N이 존재하여 $m > n > N$일 때

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \text{그리고} \quad |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 따라서 (2)에 의하여

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x-c) + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon \tag{3}$$

이 성립한다. 같은 방법으로 임의의 $x \in [a,\ c)$에 대해서도 (3)이 성립함을 보일 수 있다. 따라서 $\{f_n\}$은 균등수렴한다.

이제 $f' = g$임을 보이자. $\{f_n\}$의 극한함수를 f라고 하자. (1)의 양변에 $n \to \infty$인 극한을 취하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt + \lim_{n\to\infty} f_n(c) \\ &= \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\, dt + f(c) = \int_c^x g(t)dt + f(c) \end{aligned}$$

를 얻는다. 그런데 g가 연속이므로 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x) = g(x)$를 얻는다. ■

위 정리는 함수열 $\{f_n\}$의 도함수가 균등수렴하고 적절한 조건을 만족시킬 때

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n(x)\right)$$

와 같이 극한과 미분의 순서를 바꿀 수 있다는 것을 의미한다.

보기 8.1.18 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^3}$$

이때 임의의 n에 대하여 f_n은 미분 가능하고 f_n'은 적분 가능하다. 더욱이 $\{f_n\}$과 $\{f_n'\}$은 모두 연속인 함수에 균등수렴한다. [이 두 함수열의 균등수렴성은 정리 8.2.4를 이용하여 밝힐 수 있다.] 그러므로 $\{f_n'\}$은 다음과 같이 정의된 함수 f'에 수렴한다.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

이 경우 비록 f'을 닫힌 형태로 나타내는 것이 쉬운 일은 아니지만, f'의 존재성을 보장하고 그것을 무한급수의 형태로 나타낼 수 있는 것만으로도 f는 많은 응용 분야에서 유용하게 사용될 수 있다. □

8.2 함수급수의 균등수렴

함수열 $\{f_n\}$에 대하여 함수급수의 부분합을

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \tag{4}$$

라고 하면 $\{s_n\}$은 또 하나의 함수열이 된다. $\{f_n\}$의 함수급수는 $\{s_n\}$에 극한을 취한 것과 같으므로 함수열의 균등수렴에 대한 정리는 함수급수의 균등수렴에도 적용된다.

편의상 이 절에서 모든 합기호의 생략된 아래첨자는 $n=1$이고 생략된 위첨자는 ∞인 것으로 약속한다.

정리 8.2.1 | 함수급수의 균등수렴과 연속성, 적분 가능성, 미분 가능성

$\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자.

(i) 만약 임의의 n에 대하여 f_n이 연속이고 $\{f_n\}$의 함수급수가 균등수렴하면 $f := \sum f_n$도 연속이다.

(ii) 만약 $[a, b] \subseteq D$이고 임의의 n에 대하여 f_n이 $[a, b]$에서 적분 가능하며 $\{f_n\}$의 급수가 $[a, b]$에서 균등수렴하면 $f := \sum f_n$도 $[a, b]$에서 적분 가능하다. 또한 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right)$$

(iii) 임의의 n에 대하여 f_n이 D에서 미분 가능하고 적당한 점 $c \in [a, b]$에 대하여 $\sum f_n$이 c에서 수렴하며 $\sum f_n{}'$이 D에서 균등수렴하면 $\{f_n\}$의 함수급수도 균등수렴하고 $f := \sum f_n$은 미분 가능하다. 또한 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

증명 함수급수의 부분합 (4)에 정리 8.1.15, 정리 8.1.16, 정리 8.1.17을 적용하면 된다. ■

실수열의 무한급수가 수렴하는지 판별할 때 무한급수의 판정법을 이용하면 편리한 것처럼 함수급수의 균등수렴을 판별할 수 있는 판정법이 있으면 편리할 것이다. 지금부터 함수급수의 균등수렴에 관한 판정법을 살펴보자.

정리 8.2.2 | 함수급수의 일반항 판정법

D 위에서 함수급수 $\sum f_n$이 균등수렴하면 $f_n \rightrightarrows 0$이다.

증명 결론에 반하여 $\{f_n\}$이 0에 균등수렴하지 않는다고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여 임의의 N에 대하여 $m > N$인 m과 $x \in D$가 존재하여 $|f_m(x)| \geq \epsilon$을 만족시킨다. 동일한 양수 ϵ과 임의의 N에 대하여 $m > N+1$인 m과 $x \in D$가 존재하여

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m-1} f_k(x) \right| = |f_m(x)| \geq \epsilon$$

을 만족시킨다. 즉 $\sum f_n$은 코시 조건의 부정을 만족시키므로 발산한다. 이것은 모순이다. ■

정리 8.2.3 함수급수의 절대수렴 판정법

D 위에서 함수급수 $\sum|f_n|$이 균등수렴하면 $\sum f_n$도 균등수렴한다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\sum|f_n|$이 균등수렴하므로 자연수 N이 존재하여 $n \geq m > N$이고 $x \in D$일 때마다

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \epsilon$$

이 성립한다. 이때

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \epsilon$$

이므로 코시 조건에 의하여 $\sum f_n$은 균등수렴한다. ■

정리 8.2.4 바이어슈트라스 M-판정법

$\{f_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자. 만약 양항수열 $\{M_n\}$이 존재하여 임의의 $x \in D$와 n에 대하여 $|f_n(x)| \leq M_n$을 만족시키고 무한급수 $\sum M_n$이 수렴하면 $\sum f_n$은 D 위에서 균등수렴한다.

증명 $x \in D$에 대하여

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 무한급수 $\sum M_n$이 수렴하므로 코시 조건에 의하여 자연수 N이 존재하여 $n > m > N$일 때마다

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon$$

이 성립한다. 이때 임의의 $x \in D$에 대하여

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon$$

이므로 코시 조건에 의하여 $\sum|f_n|$은 D에서 균등수렴한다. 따라서 정리 8.2.3에 의하여 $\sum f_n$은 D에서 균등수렴한다. ■

정리 8.2.5 디니(Dini)의 조건

콤팩트집합 K 위에서 연속함수열 $\{f_n\}$이 연속함수 f에 수렴한다고 하자. 만약 $\{f_n\}$이 감소수열이면, 즉 임의의 $x \in K$와 n에 대하여 $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$이면 $\{f_n\}$은 f에 균등수렴한다.

증명 $g_n := f_n - f$라고 하자. 그러면 $g_n \to 0$이고 각 n에 대하여 g_n은 연속이며 $g_n \geq g_{n+1}$이다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $K_n := \{x \in K \mid g_n(x) \geq \epsilon\}$이라고 하자. g_n이 연속함수이므로 $G_n := g_n^{-1}((-\infty, \epsilon)) \cap K$는 K의 열린부분집합이다. 그런데 $K_n = K \setminus G_n$이므로 K_n은 닫힌집합이다. 즉 K_n은 콤팩트집합이다. 특히 $g_n \geq g_{n+1}$이므로 $K_n \supseteq K_{n+1}$이다.

이제 $x \in K$가 임의로 주어졌다고 하자. $g_n(x) \to 0$이므로 충분히 큰 모든 n에 대하여 $x \notin K_n$이다. 즉 $x \notin \cap K_n$이다. 여기서 x는 K의 임의의 원소이므로 $\cap K_n = \varnothing$이다. 그런데 $K_n \supseteq K_{n+1}$이므로, 만약 임의의 n에 대하여 $K_n \neq \varnothing$이면 축소구간정리에 의하여 $\cap K_n \neq \varnothing$이다. 이것은 모순이므로 적당한 자연수 N에 대하여 $K_N = \varnothing$이다.

따라서 $n \geq N$일 때 $K_n = \varnothing$이므로 임의의 $x \in D$에 대하여 $0 \leq g_n(x) < \epsilon$이다 이것은 $g_n \rightrightarrows 0$임을 의미하므로 $f_n \rightrightarrows f$가 성립한다. ■

디니의 조건을 간단히 나타내면 다음과 같다.

콤팩트집합 위에서 연속함수열이 연속함수에 단조수렴하면 그 수렴은 균등수렴이다.

디니의 조건을 함수급수에 적용하면 다음 정리를 얻는다.

정리 8.2.6 양항함수급수의 균등수렴성

콤팩트집합 K 위에서의 연속함수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 음이 아니고 $\sum f_n$이 연속인 함수 f에 점별수렴하면 $\sum f_n$은 f에 균등수렴한다.

증명 $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$라고 하면 각 n에 대하여 s_n은 연속이고 $s_n \leq s_{n+1}$이다. 그런데 f가 연속이므로 디니의 조건에 의하여 $s_n \rightrightarrows f$이다. ■

정리 8.2.7 함수급수의 디리끌레 판정법

$\{f_n\}$과 $\{g_n\}$이 D 위에서의 함수열이라고 하자. 만약 양수 M이 존재하여 임의의 $x \in D$와 n에 대하여

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M$$

을 만족시키고 임의의 n에 대하여 $g_n \geq g_{n+1}$이며 D 위에서 $g_n \rightrightarrows 0$이면 $\sum f_n g_n$는 D 위에서 균등수렴한다.

증명 $n \geq m$인 자연수 m, n과 $x \in D$에 대하여

$$F_{n,m}(x) := \sum_{k=m}^{n} f_k(x)$$

라고 하자. 그리고 $n > m$인 자연수 m, n이 임의로 주어졌다고 하자. 아벨의 부분합 공식에 의하여 임의의 $x \in D$에 대하여

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| F_{n,m}(x) g_n(x) + \sum_{k=m}^{n-1} F_{k,m}(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| \\ &\leq 2M g_n(x) + 2M \sum_{k=m}^{n-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &= 2M g_m(x) \end{aligned}$$

가 성립한다. 그런데 $g_m \rightrightarrows 0$이므로 코시 조건에 의하여 $\sum f_n g_n$도 균등수렴한다. ■

정리 8.2.8 | 함수급수의 교대급수 판정법

D 위에서 함수열 $\{f_n\}$이 0에 균등수렴하고 임의의 $x \in D$와 n에 대하여 $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$를 만족시키면 $\sum(-1)^n f_n$은 D 위에서 균등수렴한다.

증명 $g_n := (-1)^n$이라고 하자. $\sum g_n = \sum(-1)^n$의 부분합이 유계이고 $\{f_n\}$이 감소하며 0에 균등수렴하므로 디리끌레 판정법에 의하여 $\sum g_n f_n = \sum(-1)^n f_n$은 균등수렴한다. ■

균등수렴의 성질을 이용하면 무한급수의 성질을 쉽게 증명할 수 있다. 그 예로서 이중급수의 수렴을 살펴보자. 정의역이 $\mathbb{N}$인 함수는 첨수가 하나인 수열이 된다. 비슷하게 정의역이 $\mathbb{N}^2$인 함수는 첨수가 두 개인 수열이 되는데 이러한 수열을 **이중수열**이라고 부르고 $\{a_{k,j}\}$와 같이 나타낸다. 만약 두 무한급수

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} \quad \text{그리고} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j}$$

가 모두 수렴하고 그 값이 서로 같으면 '$\{a_{k,j}\}$의 **이중급수**는 수렴한다'라고 말하고

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} a_{k,j} := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}$$

로 나타낸다.

정리 8.2.9 | 이중급수의 수렴

이중수열 $\{a_{k,j}\}$에 대하여 $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{k,j}|$가 수렴하면 $\{a_{k,j}\}$의 이중급수도 수렴한다.

증명 $E := \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$이라고 하자. 각 $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A_j := \sum_{k=1}^{\infty}|a_{k,j}|, \quad f_j(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j}, \quad f_j\left(\frac{1}{n}\right) := \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

라고 하면 $\{A_j\}$는 유계이고 정리의 가정에 의하여 $f_j(0)$이 존재하며

$$\lim_{n\to\infty} f_j\left(\frac{1}{n}\right) = f_j(0)$$

이 성립한다. 즉 각 $j \in \mathbb{N}$에 대하여 f_j는 $0 \in E$에서 연속이다. 더욱이 임의의 $x \in E$와 $j \in \mathbb{N}$에 대하여 $|f_j(x)| \le A_j$이므로 바이어슈트라스 M-판정법에 의하여

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$$

는 E 위에서 균등수렴한다. 따라서 f는 $0 \in E$에서 연속이다. $n \to \infty$일 때 $1/n \to 0$이므로 연속함수의 수열판정법에 의하여 $f(1/n) \to f(0)$이다. 따라서 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_j\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j}\end{aligned}$$ ■

8.3 연속함수공간*

실수 집합의 콤팩트부분집합 K에서 연속인 실함수들의 모임을 $C(K)$라고 하자. 이때 실수 α와 $C(K)$의 임의의 원소 f, g에 대하여 $\alpha f + g \in C(K)$이므로 $C(K)$는 $\mathbb{R}$ 위에서의 벡터공간이 된다. 더욱이 두 함수 f, g 사이의 거리를 상한노름

$$d(f,\ g) := \|f - g\|_K$$

로 정의하면 정리 8.1.14와 정리 8.1.15에 의하여 $C(K)$의 모든 코시 함수열은 연속함수에 균등수렴하므로 $C(K)$는 완비인 노름벡터공간(normed linear space)이 된다.

이 절에서는 연속함수공간 $C(K)$의 다양한 성질을 살펴보자. 해석학을 처음 공부하는 사람은 이 절을 뛰어넘어도 좋다.

볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하면 유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 가진다. 함수열에 대해서도 비슷한 정리를 얻을 수 있다.

정의 8.3.1 점별유계와 균등유계

D 위에서의 함수열 $\{f_n\}$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(i) 함수 $\phi : D \to \mathbb{R}$가 존재하여 임의의 n과 $x \in D$에 대하여 $|f_n(x)| < \phi(x)$를 만족시키면 '$\{f_n\}$은 **점별유계**이다'라고 말한다.

(ii) 양수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $\|f_n\| < M$을 만족시키면 '$\{f_n\}$은 **균등유계**이다'라고 말한다.

함수열 $\{f_n\}$이 점별유계인 경우 임의의 $x \in D$에 대하여 $\{f_n(x)\}$는 수렴하는 부분수열 $\{f_{n_k}(x)\}$를 가진다. 또한 D가 가산인 경우 대각법을 이용하여 D의 모든 점에서 점별수렴하는 부분함수열을 만들 수 있다.

보조정리 8.3.2 가산집합 D 위에서의 함수열 $\{f_n\}$이 점별유계이면 $\{f_n\}$은 D 위에서 점별수렴하는 부분수열 $\{f_{n_k}\}$를 가진다.

증명 D가 유한집합인 경우는 자명하므로 D가 무한집합인 경우를 증명하자. $D = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$이라고 하자. $\{f_n(x_1)\}$이 유계이므로 수렴하는 부분수열 $\{f_{1,k}(x_1)\}$을 가진다. 다시 $\{f_{1,k}(x_2)\}$는 유계이므로 수렴하는 부분수열 $\{f_{2,k}(x_2)\}$를 가진다. 여기서 $\{f_{2,k}(x_1)\}$은 $\{f_{1,k}(x_1)\}$의 부분수열이므로 수렴한다. 다시 $\{f_{2,k}(x_3)\}$은 유계이므로 수렴하는 부분수열 $\{f_{3,k}(x_3)\}$을 가진다. 이와 같은 방법으로 임의의 n에 대하여 $f_{n,k}$를 귀납적으로 정의할 수 있다. 이제 $f_{n_k} := f_{k,k}$라고 하면 임의의 $x_i \in D$에 대하여 $\{f_{n_k}(x_i)\}$는 수렴한다. 따라서 $\{f_{n_k}\}$는 점별수렴하는 부분수열이다. ■

그러나 D가 가산집합이 아닌 경우 D 위에서 유계인 함수열 $\{f_n\}$은 균등수렴하는 부분수열을 갖지 않을 수도 있다. 심지어는 $\{f_n\}$의 모든 항이 연속이고 균등유계일지라도 $\{f_n\}$이 균등수렴하는 부분수열을 갖지 않을 수도 있다.

보기 8.3.3 $[0,\ 1]$ 위에서 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f_n(x) := \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$$

이때 임의의 n에 대하여 $\|f_n\| \le 1$이므로 $\{f_n\}$은 $[0,\ 1]$에서 균등유계이다. 또한 임의의 $x \in [0,\ 1]$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

이다. 그런데 임의의 자연수 n에 대하여

$$\|f_n - 0\| \ge \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1$$

이므로 $\{f_n\}$의 어떠한 부분수열도 $[0,\ 1]$에서 균등수렴하지 않는다. □

따라서 함수열이 균등수렴하는 부분수열을 갖기 위해서는 균등유계 이외에 또 다른 조건이 필요하다.

정리 8.3.4 | 동등연속

집합 D 위에서의 함수열 $\{f_n\}$이 주어졌다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 임의의 자연수 n과 $|x_1 - x_2| < \delta$인 임의의 $x_1 \in D,\ x_2 \in D$에 대하여 $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon$이 성립하면 '$\{f_n\}$은 **동등연속**(equicontinuous)이다'라고 말한다.

이제 동등연속인 함수열이 균등수렴하는 부분수열을 가짐을 보이자.

보조정리 8.3.5 K가 실수 집합의 콤팩트 부분집합이면 $K \subseteq \overline{E}$인 K의 가산부분집합 E가 존재한다.

증명 $\alpha := \inf K - 1$이라고 하자. 임의의 자연수 $n,\ k$에 대하여

$$U_{n,k} := \left(\alpha + \frac{2}{n}(k-1),\ \alpha + \frac{2}{n}k\right)$$

라고 하면 $\{U_{n,k}\}$는 K의 열린덮개가 된다. 이때 임의의 $n,\ k$에 대하여 $U_{n,k} \cap K \neq \varnothing$인 경우에는 $x_{n,k} \in U_{n,k} \cap K$인 $x_{n,k}$를 택하고, $U_{n,k} \cap K = \varnothing$인 경우에는 $x_{n,k} = \inf K$라고 하자.

이제 $E := \{x_{n,k} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$이 정리의 조건을 만족시키는 집합임을 보이자. E는 유한집합들의 가산합집합이므로 E 자신도 가산집합이다.

$x \in K$라고 하자. $x \in E$인 경우에는 당연히 $x \in \overline{E}$이다. $x \notin E$이고 $\epsilon > 0$인 경우 $2 < \epsilon N$인 자연수 N을 택한다. 그러면 적당한 m에 대하여

$$U_{N,1},\ U_{N,2},\ \cdots,\ U_{N,m}$$

들의 모임은 K의 열린덮개가 된다. 따라서 $x \in U_{N,k}$인 k가 존재한다. 여기서

$$|x_{N,k} - x| < \frac{2}{N} < \epsilon$$

이므로 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$이다. 즉 $x \in \overline{E}$이다. 따라서 $K \subseteq \overline{E}$이다. ■

참고 **8.3.6** 집합 E, K에 대하여 $K \subseteq \overline{E}$일 때 'E는 K에서 **조밀하다**(dense)'라고 말한다. 또한 K가 K에서 조밀한 가산부분집합을 가질 때 'K는 **가분**(separable)이다'라고 말한다. 예를 들어 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ 이므로 $\mathbb{R}$ 는 가분이다. 이러한 관점에서 보조정리 8.3.5는 임의의 콤팩트집합 K가 가분이라는 것을 의미한다. □

정리 8.3.7 | 아첼라-애스콜리(Arzelà-Ascoli)

콤팩트집합 K 위에서의 동등연속이고 점별유계인 함수열 $\{f_n\}$은 균등수렴하는 부분수열을 가진다.

증명* K가 콤팩트집합이므로 보조정리 8.3.5에 의하여 $E \subseteq K \subseteq \overline{E}$인 가산집합 E가 존재한다. 보조정리 8.3.2에 의하여 $\{f_n\}$은 E에서 균등수렴하는 부분수열 $\{f_{n_i}\}$를 가진다. 편의상 $g_i := f_{n_i}$라고 하자.

이제 $\{g_i\}$가 K에서 균등수렴함을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\{f_n\}$이 동등연속이므로 양수 δ가 존재하여 임의의 n과 x, $y \in K$에 대하여 $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$을 만족시킨다. $K \subseteq \overline{E}$이고 K가 콤팩트집합이므로 E의 유한 개의 점 x_1, x_2, $\cdots$, x_m을 택하여

$$K \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m) \tag{5}$$

이 성립하도록 할 수 있다. 임의의 $x \in E$에 대하여 $\{g_i(x)\}$가 수렴하므로 자연수 N이 존재하여 $i \geq N$, $j \geq N$, $1 \leq s \leq m$일 때마다

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \epsilon \tag{6}$$

이 성립한다. 만약 $x \in K$이면 (5)에 의하여 적당한 s가 존재하여 $x \in B_\delta(x_s)$이므로 임의의 i에 대하여 $|g_i(x) - g_i(x_s)| < \epsilon$이 성립한다. 만약 $i \geq N$, $j \geq N$이면 (6)에 의하여

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| < 3\epsilon$$

이 성립한다. 3ϵ은 임의의 양수이므로 $\{g_n\}$은 코시 조건을 만족시킨다. 따라서 균등수렴한다. ■

테일러의 정리에 의하면 함수 f가 충분히 여러 번 미분 가능하고 적절한 추가 조건을 만족시킬 때 f에 수렴하는 다항함수열 $\{p_n\}$이 존재한다. 여기서는 이것보다 더 강력한 정리를 살펴보자. 다음 정리는 $[a, b]$에서 정의된 다항식들의 집합이 $C[a, b]$에서 조밀하다는 것을 설명한다.

정리 8.3.8 | 바이어슈트라스의 다항식 근사 정리

f가 $[a, b]$에서 연속이면 $[a, b]$ 위에서 f에 균등수렴하는 다항함수열 $\{p_n\}$이 존재한다.

증명* 함수 g를

$$g(x) := \begin{cases} f((b-a)x+a) - (f(b) - f(a))x - f(a) & \text{if } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{if } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

로 정의하자. 그러면 g는 $\mathbb{R}$ 에서 균등연속이다.

$$c_n := \left[\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx\right]^{-1}, \quad q_n(x) := c_n(1-x^2)^n$$

이라고 하자.

그러면 임의의 n에 대하여

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)dx = 1 \tag{7}$$

이다. 베르누이 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx &= 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx \\ &\geq \int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

이므로 (7)에 의하여

$$c_n < \sqrt{n} \tag{8}$$

을 얻는다. 따라서 (8)에 의하여 임의의 양수 δ에 대하여 $\delta \leq |x| \leq 1$일 때

$$q_n(x) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n \tag{9}$$

이므로 $\delta \leq |x| \leq 1$인 범위에서 $q_n \rightrightarrows 0$이다. 이제 $x \in [0,\ 1]$에 대하여

$$P_n(x) \coloneqq \int_{-1}^{1} g(x+t)\,q_n(t)\,dt$$

라고 하자. 그러면

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} g(x+t)\,q_n(t)\,dt = \int_{0}^{1} g(t)\,q_n(t-x)\,dt$$

이므로 P_n은 다항식이다.

이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. g가 균등연속이므로 양수 δ가 존재하여 $|x-y| < \delta$일 때마다

$$|g(y)-g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족시킨다. $M \coloneqq \sup|g(x)|$라고 하자. (7), (9)와 $q_n(x) \geq 0$을 이용하면 $x \in [0,\ 1]$에 대하여

$$\begin{aligned}|P_n(x)-g(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[g(x+t)-g(x)]q_n(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-1}^{1}|g(x+t)-g(x)|\,q_n(t)\,dt \\ &\leq 2M\int_{-1}^{-\delta} q_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1} q_n(t)\,dt \\ &\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $P_n \rightrightarrows g$이다. 끝으로

$$p_n(x) \coloneqq P_n\!\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + (f(b)-f(a))\frac{x-a}{b-a} + f(a)$$

라고 하면 $\{p_n\}$은 $[a,\ b]$에서 f에 균등수렴하는 다항함수열이다. ■

8.4 거듭제곱급수

수열 $\{a_n\}$과 실수 x_0이 주어졌다고 하자. 그리고

$$s_n(x) \coloneqq a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

이라고 하자. 이때 $\{s_n\}$의 극한 $\lim_{n\to\infty} s_n$을 중심이 x_0이고 계수가 $\{a_n\}$인 **거듭제곱급수**(power series) 또는 **멱급수**라고 부르며

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{10}$$

으로 나타낸다. 위와 같은 표기법에서 $x=x_0$이고 $n=0$일 때 0^0이 나타난다. 따라서 위와 같은 거듭제곱급수의 표현에서는 편의상 $0^0=1$인 것으로 약속한다. 만약 $y=x-x_0$이라고 하면 (10)은

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \tag{11}$$

의 형태, 즉 중심이 0인 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다. 역으로 $x=y+x_0$이라고 하면 (11)은 (10)의 형태로 바꿀 수 있다. 따라서 거듭제곱급수의 성질을 살펴볼 때에는 중심이 0인 경우만 다루어도 충분하다. 한편 거듭제곱급수에서 합 기호의 첨자를 생략하여 $\sum a_n(x-x_0)^n$으로 나타낼 때에는 별다른 언급이 없는 한 (10)과 같이 아래첨자는 $n=0$이고 위첨자는 ∞인 것으로 약속한다.

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$은 $x=0$일 때 당연히 수렴한다. 그리고 계수열 $\{a_n\}$의 특성에 따라서 $x=0$ 이외의 다른 점에서도 수렴할 수 있고 임의의 x에 대하여 수렴할 수도 있으며 $x=0$에서만 수렴할 수도 있다.

보기 8.4.1 거듭제곱급수 $\sum n!\,x^n$은 $x=0$일 때에만 수렴한다.

풀이 $x=0$일 때 주어진 거듭제곱급수는 당연히 수렴한다. 한편 $x\neq 0$일 때 비 판정법을 이용하면

$$\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty > 1$$

이므로 $\sum n!\,x^n$은 발산한다. □

보기 8.4.2 기하급수 $\sum x^n$은 $|x|<1$일 때 수렴하고 $|x|\geq 1$일 때 발산한다.

풀이 주어진 무한급수는 공비가 x인 무한등비급수이므로 보기 7.1.2에 의하여 $|x|<1$일 때에만 수렴한다. □

보기 8.4.3 $\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$은 임의의 x에 대하여 수렴한다.

풀이 $x\neq 0$일 때 비 판정법을 이용하면

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

이므로 주어진 급수는 수렴한다. □

정의 8.4.4 수렴구간, 수렴반경

거듭제곱급수 $\sum a_n(x-x_0)^n$에 대하여 집합

$$C=\left\{x \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converges}\right\}$$

를 **수렴구간**이라고 부른다. 이때 수렴구간의 내부를 **수렴영역**이라고 부르며

$$R=\sup\{|x-x_0| \mid x\in C\}$$

를 **수렴반경**이라고 부른다. 여기서 R는 ∞일 수도 있고 0일 수도 있다.

참고 8.4.5 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경이 R이고 $R>0$이면 $\sum a_n x^n$은 $|x|<R$일 때 절대수렴하고 $|x|>R$일 때 발산한다.

증명 주어진 거듭제곱급수의 수렴구간을 C라고 하자. 그리고 $|x|<R$라고 하자. $R=\sup\{|t| \mid t\in C\}$이므로 상한의 성질에 의하여 $|x|<|y|\le R$인 $y\in C$가 존재한다. $\sum a_n y^n$이 수렴하므로 $a_n y^n \to 0$이다. 따라서 양수 M이 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_n y^n|<M$을 만족시킨다. 이때

$$|a_n x^n|=|a_n y^n|\left|\frac{x^n}{y^n}\right|<M\left|\frac{x}{y}\right|^n$$

이다. 그런데 무한등비급수의 성질에 의하여 $\sum M|x/y|^n$은 수렴하므로 비교판정법에 의하여 $\sum a_n x^n$도 수렴한다.

다음으로 $|x|>R$라고 하자. 그러면 $|x|>|z|>R$이고 $z\notin C$인 z가 존재한다. 만약 $\sum a_n x^n$이 수렴한다면 앞의 논의 과정에 의하여 $\sum a_n z^n$도 수렴해야 한다. 이것은 $z\notin C$라는 사실에 모순이다. 따라서 $\sum a_n x^n$은 발산한다. □

따라서 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경과 관련하여 다음과 같이 세 가지 경우만 존재한다.

(i) $R=0$인 경우 주어진 거듭제곱급수는 $x=0$일 때에만 수렴하므로 수렴구간은 $\{0\}$이다.

(ii) $R=\infty$인 경우 주어진 거듭제곱급수는 임의의 실수 x에 대하여 수렴하므로 수렴구간은 $\mathbb{R}$이다.

(iii) $0<R<\infty$인 경우 주어진 거듭제곱급수의 수렴구간은 끝점이 $-R$, R인 구간

$$(-R,\ R),\ [-R,\ R),\ (-R,\ R],\ [-R,\ R]$$

중 하나이다.

예제 8.4.6 거듭제곱급수 $\sum(x^n/n)$의 수렴구간을 구하여라.

풀이 $x\neq 0$일 때 제곱근 판정법을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x^n/n|}=|x|$$

이다. 따라서 주어진 거듭제곱급수는 $|x|>1$일 때 발산하고 $|x|<1$일 때 수렴한다. 즉 수렴반경은 1이다. 한편 주어진 거듭제곱급수는 $x=1$일 때 $p-$급수 판정법에 의하여 발산하고 $x=-1$일 때 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 수렴구간은 $[-1,\ 1)$이다. □

보기 8.4.1과 보기 8.4.3, 그리고 예제 8.4.6에서 볼 수 있는 것처럼 거듭제곱급수의 수렴반경을 찾을 때에는 비 판정법과 제곱근 판정법을 사용할 수 있다.

정리 8.4.7 수렴반경의 비 판정 공식

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n \neq 0$이고 $R \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$이라고 하자. 그러면 $\sum a_n x^n$의 수렴반경은 R이다.

증명 $R=\infty$인 경우 $|a_{n+1}/a_n| \to 0$이다. 따라서 $x \neq 0$인 임의의 x에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

이므로 $\sum a_n x^n$은 수렴한다. $0<R<\infty$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{R}$$

이므로 주어진 거듭제곱급수는 비 판정법에 의하여 $|x|<R$인 경우 수렴하고 $|x|>R$인 경우 발산한다. 이 극한은 $R=0$인 경우 0이 아닌 임의의 x에 대하여 양의 무한대로 발산한다. ■

정리 8.4.8 코시-아다마르(Cauchy-Hadamard) 공식 : 수렴반경의 제곱근 판정 공식

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $r \coloneqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$이라고 하자. 그리고

$$R \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } r=\infty \\ r^{-1} & \text{if } 0<r<\infty \\ \infty & \text{if } r=0 \end{cases}$$

이라고 하자. 그러면 $\sum a_n x^n$의 수렴반경은 R이다.

증명 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$에 제곱근 판정법을 적용하면

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |x|r$$

이다. 따라서 주어진 거듭제곱급수는 $|x|r<1$일 때 수렴하고 $|x|r>1$일 때 발산한다.

$0<r<\infty$인 경우 주어진 $|x|r<1$일 필요충분조건은 $|x|<r^{-1}$이므로 r^{-1}이 수렴반경이 된다.

만약 $r=0$이면 임의의 x에 대하여 $|x|r<1$이므로 주어진 거듭제곱급수는 수렴한다. 만약 $r=\infty$이면 $x\neq 0$인 임의의 x에 대하여 $|x|r>1$이므로 주어진 거듭제곱급수는 발산한다. ■

참고 8.4.9 수렴구간은 구간의 끝점을 원소로 갖지 않을 수도 있고, 한 점만 원소로 가질 수도 있으며, 끝 점 두 개를 모두 원소로 가질 수도 있다. 예를 들어

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

의 수렴구간은 순서대로 $(-1,\ 1)$, $[-1,\ 1)$, $(-1,\ 1]$, $[-1,\ 1]$이다. □

보조정리 8.4.10 R가 양수라고 하자.

(i) 만약 $\sum a_n R^n$이 수렴하면 $\sum a_n x^n$은 $[0,\ R]$에서 균등수렴한다.

(ii) 만약 $\sum a_n (-R)^n$이 수렴하면 $\sum a_n x^n$은 $[-R,\ 0]$에서 균등수렴한다.

증명 (i) $x \in (0,\ R]$라고 하자. 그리고 $b_n \coloneqq a_n R^n$, $c_n \coloneqq x^n / R^n$이라고 하자. 그러면 $\sum b_n$은 수렴한다. 이제 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 1보다 큰 자연수 N이 존재하여 $k > m \geq N$일 때마다

$$\left| \sum_{j=m}^{k} b_j \right| < \epsilon$$

이 성립한다. $0 < x \leq R$이므로 $\{c_n\}$은 감소수열이다. 아벨의 부분합 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=m}^{n} b_k c_k \right| &= \left| c_n \sum_{k=m}^{n} b_k + \sum_{k=m}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) \sum_{j=m}^{k} b_j \right| \\ &< c_n \epsilon + (c_m - c_n)\epsilon = c_m \epsilon\end{aligned}$$

을 얻는다. 그런데 $c_m \leq c_1 \leq R/R = 1$이므로 임의의 $x \in (0,\ R]$에 대하여

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \right| < \epsilon$$

이 성립한다. 이 부등식은 $x = 0$일 때에도 성립하므로 $\sum a_n x^n$은 $[0,\ R]$에서 균등수렴한다.

(ii) $b_n \coloneqq (-1)^n a_n$이라고 하면 $\sum b_n R^n$이 수렴하므로 (i)에 의하여 $\sum b_n x^n$은 $[0,\ R]$에서 균등수렴한다. 이때 임의의 $x \in [-R,\ 0]$에 대하여 $\sum a_n x^n = \sum b_n (-x)^n$이고 $-x \in [0,\ R]$이므로 대칭성에 의하여 $\sum a_n x^n$은 $[-R,\ 0]$에서 균등수렴한다. ■

정리 8.4.11 | 거듭제곱급수의 균등수렴에 대한 아벨(Abel)의 정리

$\sum a_n x^n$이 길이가 양수인 구간 $[a,\ b]$에서 수렴하면 $\sum a_n x^n$은 $[a,\ b]$에서 균등수렴한다.

증명 $0 \leq a < b$인 경우 보조정리 8.4.10-(i)에 의하여 주어진 거듭제곱급수는 $[0,\ b]$에서 균등수렴하므로 $[0,\ b]$의 부분구간 $[a,\ b]$에서도 균등수렴한다. 마찬가지로 $a < b \leq 0$인 경우 보조정리 8.4.10-(ii)에 의하여 주어진 거듭제곱급수는 $[a,\ b]$에서 균등수렴한다. $a < 0 < b$인 경우 보조정리 8.4.10에 의하여 주어진 거듭제곱급수는 $[a,\ 0]$과 $[0,\ b]$에서 각각 균등수렴하므로 이들의 합집합 $[a,\ b]$에서도 균등수렴한다. ■

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $f(x) \coloneqq \sum a_n x^n$이라고 하면 f는 $\sum a_n x^n$의 수렴구간에서 정의된 함수가 된다. 이제 이렇게 정의된 함수 f가 어떠한 성질을 가지고 있는지 살펴보자. 먼저 아벨의 정리와 균등수렴의 성질에 의하여 다음 정리를 얻는다.

따름정리 8.4.12 $\sum a_n x^n$이 $[a,\ b]$에서 수렴하면 $f(x) \coloneqq \sum a_n x^n$은 $[a,\ b]$에서 연속이다.

증명 $\sum a_n x^n$의 부분합은 다항식이므로 $[a,\ b]$에서 연속이다. 또한 $\sum a_n x^n$은 $[a,\ b]$에서 균등수렴하므로 정리 8.1.15에 의하여 f는 $[a,\ b]$에서 연속이다. ■

정리 8.4.13 거듭제곱급수의 적분

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$이 $[a,\ b]$에서 수렴하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right)$$

증명 $[a,\ b]$에서 $\sum a_n x^n$이 균등수렴하고 $\sum a_n x^n$의 부분합이 연속함수이므로 정리 8.1.16에 의하여 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx &= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b a_k x^k dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right)\end{aligned}$$

■

정리 8.4.14 거듭제곱급수의 미분

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경이 $R > 0$이면 $x \in (-R,\ R)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} a_n x^n \right)$$

증명 $c \in (-R,\ R)$라고 하자. 그리고 $|c| < d < R$인 양수 d를 택하자. $r := |c/d|$라고 하자. $0 \le r < 1$이므로 $nr^{n-1} \to 0$이다. 따라서 자연수 N이 존재하여 $n > N$일 때마다 $nr^{n-1} \le 1$을 만족시킨다. 동일한 자연수 n에 대하여

$$\left| n a_n c^{n-1} \right| = \left| n a_n (dr)^{n-1} \right| = \left| a_n d^{n-1} \right| n r^{n-1} \le \left| a_n d^{n-1} \right|$$

이므로 비교 판정법에 의하여 $\sum n a_n x^{n-1}$의 수렴반경은 R 이상이 된다.

이제 $x \in (-R,\ R)$에 대하여

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

이라고 하자. 그리고 $-R < a < x < b < R$인 점 $a,\ b$를 택하자. 그러면 $[a,\ b]$에서 $f_n{}'$은 연속이고 $f_n \rightrightarrows f$, $f_n{}' \rightrightarrows g$이다. 따라서 정리 8.1.17에 의하여 $f' = g$가 성립한다. 즉

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} a_n x^n \right)$$

이 성립한다. ■

정리 8.4.13과 정리 8.4.14를 간단하게 나타내면 다음과 같다.

거듭제곱급수로 정의된 함수를 수렴하는 범위 안에서 미분하거나 적분할 때에는 항별로 미분하거나 적분하면 된다.

끝으로 두 거듭제곱급수의 합과 곱을 살펴보자.

정리 8.4.15 거듭제곱급수의 합과 곱

$\sum a_n x^n$의 수렴반경이 R_1이고 $\sum b_n x^n$의 수렴반경이 R_2이며 $R \coloneqq \min\{R_1,\ R_2\}$라고 하자.

(i) $|x| < R$일 때 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$이 성립한다.

(ii) $|x| < R$일 때 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$이 성립한다.

증명 $|x| < R$일 때 $\sum a_n x^n$과 $\sum b_n x^n$이 모두 절대수렴한다. 따라서 극한의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k x^k + b_k x^k)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\end{aligned}$$

이 성립한다. 한편 절대수렴하는 무한급수의 코시 곱에 의하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k x^k)(b_{n-k}x^{n-k})\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

이 성립한다. ■

극한, 미분, 적분, 무한급수로 정의된 함수를 이러한 것이 사용되지 않은 형태로 나타내는 것을 **닫힌 형태로 나타낸다** 또는 **유한 형태로 나타낸다**고 말한다. 거듭제곱급수로 정의된 함수는 미분과 적분을 이용하여 닫힌 형태로 나타낼 수 있다.

예제 8.4.16 $(-1,\ 1)$에서 정의된 함수 $f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$을 닫힌 형태로 나타내어라.

풀이 주어진 식을 미분하거나 적분하고 x를 곱하거나 x로 나누는 과정을 통하여 $\sum x^n$의 꼴로 변형한다. 즉 주어진 식을 x로 나누면 nx^{n-1}의 무한급수가 되는데, nx^{n-1}은 x^n의 도함수와 같으므로 다시 부정적분을 구하여 x^n의 꼴로 나타낸다. 따라서 다음 등식을 얻는다.

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nt^{n-1}dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

이므로

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

를 얻는다. □

8.5 해석적 함수

거듭제곱급수로 정의된 함수를 미분하거나 적분할 때에는 항별로 미분하거나 적분하면 된다. 이것은 거듭제곱급수로 정의된 함수는 차수가 무한인 거대한 다항함수처럼 다룰 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 어떠한 함수를 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다면 그러한 함수는 극한이나 미적분과 관련하여 훨씬 더 유용하게 사용될 수 있다. 이 절에서는 거듭제곱급수로 나타나는 함수를 살펴보자.

정의 8.5.1 실해석적 함수

실함수 f가 열린집합 D에서 정의되어 있고 $x_0 \in D$라고 하자. 이때 f가 **점 x_0에서 실해석적**(real analytic)이라는 것은 양수 δ가 존재하여 $B_\delta(x_0) \cap D$에서 f가 중심이 x_0인 거듭제곱급수로 표현된다는 것을 의미한다. 즉 실수열 $\{a_n\}$과 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in B_\delta(x_0) \cap D$에 대하여

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

이 성립하는 것을 의미한다. 또한 f가 D의 모든 점에서 실해석적일 때 '**f는 D에서 실해석적이다**'라고 말한다. 실해석적 함수를 간단히 **해석적 함수**라고 부르기도 한다.

이제 주어진 함수가 해석적인지 여부를 어떻게 밝힐 것인지, 그리고 해석적인 함수의 거듭제곱급수를 어떻게 구할 것인지에 대한 의문이 발생한다.

정리 8.5.2 해석적 함수의 거듭제곱급수 표현

함수 f가 x_0에서 해석적이면 x_0이 중심인 f의 거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$의 계수는

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{12}$$

으로서 유일하게 결정된다.

증명 정의에 의하여 f는 x_0에서 임의 횟수로 미분 가능하고

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

으로 표현된다. 이때 $n \geq 0$인 정수 n에 대하여

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x - x_0)^{k-n}$$

이므로 $x = x_0$을 대입하면 $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$를 얻는다. 이 식을 a_n에 대하여 풀면 (12)를 얻는다. 만약 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $f(x) = \sum b_n (x - x_0)^n$이라면 동일한 방법으로

$$b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

을 얻는다. 따라서 $a_n = b_n$이다. 즉 f가 x_0에서 해석적이면 x_0이 중심인 거듭제곱급수의 계수는 (12)로서 유일하게 결정된다. ■

정의 8.5.3 | 테일러 전개

$a<b$일 때, 함수 $f\in C^{\infty}(a,\ b)$와 $x_0\in(a,\ b)$에 대하여 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

을 중심이 x_0인 f의 **테일러 전개**(Taylor expansion) 또는 **테일러 급수**(Taylor series)라고 부른다. 특히 중심이 0인 테일러 급수를 **맥클라린 급수**(Maclaurin series)라고 부른다.

정리 8.5.2에 의하면 f가 x_0에서 해석적이면 f는 x_0의 근방에서 임의 횟수로 미분 가능하며 x_0이 중심인 테일러 급수로 표현된다. 그러나 임의 횟수로 미분 가능한 함수가 항상 해석적 함수가 되는 것은 아니다.

참고 8.5.4 함수 f를

$$f(x):=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

으로 정의하면 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$이고 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$이다. 따라서 $x_0=0$에서 f의 테일러 계수는 $a_n\equiv 0$이다. 즉 $x_0=0$이 중심인 f의 테일러 급수는 $f(x)=\sum 0x^n=0$이다. 그러나 $f(x)=0$이 되는 점은 $x=0$ 뿐이므로 f는 $x_0=0$에서 해석적이 아니다. □

열린집합 E에서 해석적인 함수들의 모임을 $C^{\omega}(E)$로 나타낸다. 참고 8.5.4에 의하면

$$C^{\omega}(E)\subsetneq C^{\infty}(E)$$

이다. 이제 임의 횟수로 미분 가능한 함수가 해석적 함수가 되기 위한 조건을 살펴보자. 지금부터 별다른 언급이 없는 한 구간 $(a,\ b)$를 나타낼 때에는 $a<b$인 것으로 약속한다.

정의 8.5.5 | 테일러 전개 나머지항

$f\in C^{\infty}(a,\ b)$이고 $x_0\in(a,\ b)$라고 하자. 중심이 x_0인 f의 테일러 전개의 **나머지항**(remainder term)을

$$R_n(x)=R_n^{f,x_0}(x):=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

로 정의한다.

정리 8.5.2와 정의 8.5.5에 의하면 함수 $f\in C^{\infty}(a,\ b)$가 $(a,\ b)$에서 해석적일 필요충분조건은 $(a,\ b)$의 각 점 x_0에 대하여 x_0을 원소로 갖는 구간 $(c,\ d)$가 존재하여 $(c,\ d)$ 위에서 $R_n^{f,x_0}\rightarrow 0$인 것이다.

테일러의 정리에 의하면 $f\in C^{\infty}(a,\ b)$, $n\in\mathbb{N}$일 때

$$R_n^{f,x_0}(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

인 점 c가 x_0과 x 사이에 존재한다. 따라서 $f\in C^{\infty}(a,\ b)$가 해석적 함수가 되기 위한 조건에 관련된 정리 중에는 'f의 n계도함수가 적절한 조건을 만족시키면 f는 해석적이다'와 같은 꼴이 많다.

정리 8.5.6 해석적 함수의 조건

$f \in C^{\infty}(a,\ b)$라고 하자. 만약 양수 M이 존재하여 임의의 $x \in (a,\ b)$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n$$

을 만족시키면 f는 $(a,\ b)$에서 해석적이다. 더욱이 각 $x_0 \in (a,\ b)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

증명 $x_0 \in (a,\ b)$가 임의로 주어졌다고 하자. 그리고 $C := \max\{M|a - x_0|,\ M|b - x_0|\}$이라고 하자. 테일러의 정리에 의하여 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, x와 x_0 사이에 c가 존재하여

$$\left|R_n^{f,\,x_0}(x)\right| = \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}|x - x_0|^n \le \frac{M^n}{n!}|x - x_0|^n \le \frac{C^n}{n!}$$

을 만족시킨다. 그런데 $n \to \infty$일 때 $C^n/n! \to 0$이므로 조임 정리에 의하여 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $R_n^{f,\,x_0}(x)$은 0에 수렴한다. ■

정리 8.5.7 거듭제곱급수로 정의된 함수의 해석성

I가 중심이 c인 열린구간이고 각 $x \in I$에 대하여

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

이라고 하자. 만약 $x_0 \in I$이고 $r > 0$, $(x_0 - r,\ x_0 + r) \subseteq I$이면 임의의 $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$에 대하여

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

이 성립한다. [즉 거듭제곱급수로 정의된 함수는 수렴구간의 내부에서 해석적이다.]

증명 일반성을 잃지 않고 $c = 0$이고 $I = (-R,\ R)$라고 하자. 즉 임의의 $x \in (-R,\ R)$에 대하여

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이라고 하자. 이제 $(x_0 - r,\ x_0 + r) \subseteq (-R,\ R)$라고 가정하고 $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$인 점 x가 주어졌다고 하자. 이항 정리에 의하여

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - x_0) + x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x_0^{n-k}(x - x_0)^k \tag{13}$$

이 성립한다. $y := |x - x_0| + |x_0| < R$일 때 $\sum a_n y^n$은 절대수렴하므로 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x_0^{n-k}(x - x_0)^k\right| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k |x_0|^{n-k}|x - x_0|^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x - x_0| + |x_0|)^n < \infty\end{aligned}$$

따라서 (13), (12)와 정리 8.2.9에 의하여 다음 등식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x_0^{n-k} (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} {}_k\mathrm{C}_n \, a_k \, x_0^{k-n} \right) (x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x_0-0)^{k-n} \right) \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

따름정리 8.5.8 함수 f가 열린구간 J에서 C^{∞}급이고 f의 테일러 급수가 J에서 f에 수렴하면 f는 J에서 해석적이다.

증명 J의 중심 c와 f의 테일러 계수 a_n에 대하여 정리 8.5.7을 적용하면 된다. ■

경우에 따라서는 테일러 전개의 나머지항을 적분을 이용하여 나타내는 것이 더 편리하다. 라그랑주의 나머지항 정리는 테일러의 정리보다 더 많은 가정을 필요로 하지만 테일러 전개 나머지항보다 더 뛰어난 근사식을 제공한다.

정리 8.5.9 | 라그랑주(Lagrange)의 나머지항

$f \in C^n(a,\ b)$이고 $n \in \mathbb{N}$ 일 때 임의의 $x \in (a,\ b)$와 $x_0 \in (a,\ b)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$
R_n := R_n^{f,\,x_0}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \tag{14}
$$

증명* n에 수학적 귀납법을 적용하자. $n=1$인 경우에는 미적분학의 기본정리에 의하여 (14)가 성립한다. 이제 자연수 n에 대하여 (14)가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$
R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
$$

그리고

$$
\frac{(x-x_0)^n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} dt
$$

이므로

$$
R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} \big(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0) \big) dt
$$

가 성립한다. $u(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)$, $dv = (x-t)^{n-1}$이라고 하고 부분적분법을 이용하여 위 식의 우변의 적분을 계산하자. $u(x_0) = 0$, $v(x) = 0$이므로

$$
R_{n+1}(x) = -\frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} u'(t)\, v(t)\, dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt
$$

를 얻는다. 따라서 (14)에서 n을 $n+1$로 바꾼 등식이 성립한다. ■

테일러 전개 나머지항을 이용하여 함수가 해석적일 조건을 끌어낸 것처럼 라그랑주의 나머지항을 이용하여 함수가 해석적인 조건을 끌어낼 수 있다.

정리 8.5.10 | 베른슈타인(Bernstein)

$f \in C^{\infty}(a,\ b)$이고 임의의 $x \in (a,\ b)$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(x) \geq 0$이 성립하면 f는 $(a,\ b)$에서 해석적이다. 즉 $x_0 \in (a,\ b)$이고 임의의 $x \in [x_0,\ b)$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(x) \geq 0$이 성립하면 임의의 $x \in [x_0,\ b)$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{15}$$

증명* $x_0 < x < b$인 점 x와 자연수 n이 임의로 주어졌다고 하자. $t = (x - x_0)u + x_0$이라고 하면 라그랑주의 나머지항은

$$R_n(x) = R_n^{f,\,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}((x-x_0)u + x_0)du \tag{16}$$

가 된다. $f^{(n)} \geq 0$이므로 (16)에 의하여 $R_n(x) \geq 0$을 얻는다. 한편 나머지항의 정의와 정리의 가정에 의하여

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \leq f(x)$$

를 얻는다. 따라서 임의의 $x \in (x_0,\ b)$에 대하여

$$0 \ \leq\ R_n(x) \ \leq\ f(x) \tag{17}$$

가 성립한다. $b_0 \in (x_0,\ b)$라고 하자. 이제 $x_0 \leq x < b_0$인 점 x에 대해서 (15)가 성립함을 보이면 충분하다. [$b < \infty$인 경우와 $b = \infty$인 경우를 함께 증명하기 위하여 이러한 방법을 사용한다.] 임의의 자연수 n에 대하여 $R_n(x_0) = 0$이므로 각 $x \in (x_0,\ b_0)$에 대하여 $n \to \infty$일 때 $R_n(x) \to 0$임을 보이면 된다. 각 $t \in [x_0,\ b)$에 대하여 $f^{(n+1)}(t) \geq 0$이므로 $f^{(n)}$은 $[x_0,\ b)$에서 증가한다. $x < b_0 < b$이므로 (16), (17)에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}((x-x_0)u + x_0)du \\ &\leq \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}((b_0-x_0)u + x_0)du \\ &= \left(\frac{x-x_0}{b_0-x_0}\right)^n R_n(b_0) \end{aligned}$$

$(x-x_0)/(b_0-x_0) < 1$이고 (17)에 의하여 $R_n(b_0) \leq f(b_0)$이므로 조임 정리에 의하여 $n \to \infty$일 때 $R_n(x) \to 0$을 얻는다. ■

몇몇 함수는 베른슈타인의 정리를 이용하여 해석적임을 쉽게 보일 수 있다.

예제 8.5.11 $a \geq 1$일 때 $f(x) = a^x$로 정의된 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 해석적임을 보여라.

풀이 임의의 $x \in \mathbb{R}$와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x \geq 0$이므로 베른슈타인의 정리에 의하여 f는 $\mathbb{R}$에서 해석적이다. ■

두 함수 f, g가 열린구간 I에서 해석적이고 $J \subsetneq I$가 공집합이 아닌 열린구간이며 J 위에서 $f=g$일 때 두 함수 f와 g는 J 밖에서 서로 다른 값을 가질 수 있을까? 다음 정리는 그렇지 않다는 것을 보여준다.

보조정리 8.5.12 두 함수 f, g가 $(c,\ d)$에서 해석적이고 $x_0 \in (c,\ d)$라고 하자. 만약 임의의 $x \in (c,\ x_0)$에 대하여 $f(x)=g(x)$이면 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$에 대하여 $f(x)=g(x)$가 성립한다.

증명 정리 8.5.2와 정의 8.5.1에 의하여 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$에 대하여

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{그리고} \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{18}$$

이 성립한다. 정리의 가정에 의하여 f와 g는 x_0에서 연속이고

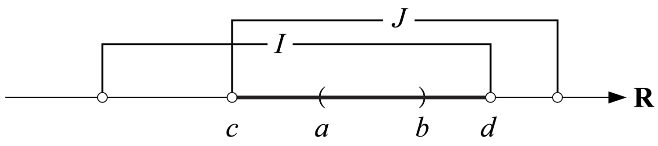
$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0-}g(x)=g(x_0)$$

이 성립한다. 비슷한 방법으로 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$이 성립한다. 따라서 (18)에 의하여 임의의 $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$에 대하여 $f(x)=g(x)$이다. ■

정리 8.5.13 해석적 확장의 유일성

함수 f가 열린구간 I에서 해석적이고 함수 g가 열린구간 J에서 해석적이며 $(a,\ b) \subseteq I \cap J$가 공집합이 아닌 구간이라고 하자. 만약 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $f(x)=g(x)$이면 임의의 $x \in I \cap J$에 대하여 $f(x)=g(x)$가 성립한다.

증명 일반성을 잃지 않고 $I \cap J =: (c,\ d)$가 유계라고 하자. 그리고 $E := \{t \in (a,\ d) \mid f(x)=g(x)\}$라고 하자.



정리의 가정에 의하여 $b \in E$이므로 E는 공집합이 아니고 위로 유계이다. E의 상한을 x_0이라고 하자. 만약 $x_0 < d$이면 보조정리 8.5.12에 의하여 양수 δ가 존재하여 임의의 $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$에 대하여 $f(x)=g(x)$가 성립한다. 즉 $x_0 < x < x_0+\delta$일 때에도 $f(x)=g(x)$이므로 이것은 x_0이 E의 상한이라는 데에 모순이다. 따라서 $x_0=d$이다. 이것은 임의의 $x \in (a,\ d)$에 대하여 $f(x)=g(x)$가 성립한다는 것을 의미한다. 비슷한 방법으로 임의의 $x \in (c,\ b)$에 대하여 $f(x)=g(x)$가 성립함을 알 수 있다. ■

위 정리로부터 다음 사실을 알 수 있다.

함수 f가 공집합이 아닌 열린집합 I에서 해석적이라고 하자. 만약 f를 I보다 더 큰 열린집합에서 해석적인 함수로 확장하면 그 확장함수는 유일하다.

8.6 여러 가지 함수

거듭제곱급수를 이용하여 함수를 정의하는 것을 **해석적으로 정의한다**고 말한다. 이 절에서는 지수함수, 로그함수, 삼각함수를 해석적으로 정의하고 그 성질을 살펴보자.

정의 8.6.1 | 지수함수

임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\exp(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

으로 정의된 함수 exp를 **지수함수**라고 부른다.

예제 7.4.5에 의하여 임의의 실수 x, y에 대하여

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$$

가 성립한다. 또한 정의에 의하여 $\exp(0) = 1$이므로

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$$

이다. 그런데 exp는 연속함수이므로 임의의 x에 대하여 $\exp(x) \neq 0$이고

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

이 성립한다. 또한 exp를 미분하면

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

가 된다. 그런데 $\exp(0) = 1$이고 exp가 연속이며 $\exp(x) \neq 0$이므로 사잇값 정리에 의하여 임의의 x에 대하여 $\exp(x) > 0$이다. 이상의 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 8.6.2 | 지수함수의 성질

함수 exp는 다음과 같은 성질을 가진다.

(i) exp는 $\mathbb{R}$ 에서 연속이고 미분 가능하며 증가한다.

(ii) 임의의 실수 x, y에 대하여 $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$이다.

(iii) 임의의 실수 x에 대하여 $\exp(-x) = [\exp(x)]^{-1}$이다.

(iv) 임의의 실수 x에 대하여 $\exp'(x) = \exp(x) > 0$이다.

지수함수의 정의와 참고 3.3.9에 의하여 다음을 얻는다.

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

따라서 자연수 n에 대하여 다음을 얻는다.

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ times}}) = \underbrace{\exp(1)\exp(1)\exp(1)\ \cdots\ \exp(1)}_{n \text{ times}} = \underbrace{ee\cdots e}_{n \text{ times}} = e^n$$

또한 음의 정수 $-n$에 대해서는

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

이다. 그리고 정수 m과 자연수 n에 대하여 $r = m/n$이라고 했을 때

$$[\exp(r)]^n = \underbrace{\exp(r)\exp(r)\exp(r)\ \cdots\ \exp(r)}_{n \text{ times}} = \exp(\underbrace{r+r+r+\cdots+r}_{n \text{ times}}) = \exp(nr) = e^{nr}$$

이므로 $\exp(r) = (e^{nr})^{1/n} = e^r$이다. 따라서 임의의 유리수 r에 대하여

$$\exp(r) = e^r$$

이다. 더욱이 $\exp(x)$와 e^x는 모두 증가하는 함수이고 유리수 집합은 실수 집합에서 조밀하므로 임의의 실수 x에 대하여 다음 등식을 얻는다.

$$\boxed{\exp(x) = e^x}$$

즉 지금부터는 $\exp(x)$와 e^x를 동일한 것으로 생각한다. 한편 $x \geq 1$일 때

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq x$$

이므로 정리 4.4.8에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

를 얻는다. 또한

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

을 얻는다. 그런데 e^x는 $\mathbb{R}$에서 증가하므로 e^x는 정의역이 $\mathbb{R}$이고 치역이 $(0, \infty)$인 일대일함수이다. 따라서 e^x의 역함수가 존재한다.

정의 8.6.3 | 자연로그함수

임의의 $x \in (0, \infty)$에 대하여 $\ln x \coloneqq \exp^{-1}(x)$로 정의된 함수 $\ln$을 **자연로그함수**라고 부른다.

자연로그함수의 대부분의 성질은 지수함수의 성질로부터 유도된다. $\exp$가 미분 가능하고 $\exp'(x) > 0$이므로 $\ln$도 미분 가능하고 $\ln'(x) > 0$이다. 즉 $\ln$은 증가함수이다. 또한 $\exp$의 정의역이 $\mathbb{R}$이고 치역이 $(0, \infty)$이므로 $\ln$의 정의역은 $(0, \infty)$이고 치역은 $\mathbb{R}$이다.

더욱이 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 8.6.4 | 자연로그함수의 성질

함수 ln은 다음과 같은 성질을 가진다.

(i) ln은 $(0, \infty)$에서 연속이고 미분 가능하며 증가한다.

(ii) 임의의 양수 x, y에 대하여 $\ln xy = \ln x + \ln y$이다.

(iii) 임의의 양수 x와 실수 r에 대하여 $\ln x^r = r\ln x$이다.

(iv) 임의의 양수 x에 대하여 $(\ln x)' = x^{-1}$이다.

함수 exp는 ln의 역함수이므로 양수 a와 실수 x에 대하여

$$a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x\ln a) = e^{x\ln a}$$

이다. 즉 양수 a와 임의의 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\boxed{a^x = e^{x\ln a}}$$

따라서 다음 지수 법칙을 얻는다.

정리 8.6.5 | 지수 법칙

양수 a, b와 실수 x, y에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$　　(ii) $(ab)^x = a^x b^x$　　(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

증명 정리 8.6.4에 의하여 다음을 얻는다.

$$\ln(a^{x+y}) = (x+y)\ln a = x\ln a + y\ln a = \ln a^x + \ln a^y = \ln(a^x a^y),$$
$$\ln(ab)^x = x\ln(ab) = x(\ln a + \ln b) = x\ln a + x\ln b = \ln a^x + \ln b^x = \ln(a^x b^x),$$
$$\ln(a^x)^y = y\ln a^x = xy\ln a = a^{xy}.$$

그런데 ln이 일대일함수이므로 정리의 등식을 얻는다. ■

이제 일반적인 로그함수를 정의한다.

정의 8.6.6 | 로그함수

$a > 0$, $a \neq 1$일 때 지수함수 $y = a^x$의 역함수 $\log_a x$를 밑이 a인 **로그함수**라고 부른다. 특히 밑이 10인 로그함수를 **상용로그**라고 부르며 밑을 생략하여 $\log x$로 나타낸다.

로그함수의 정의에 의하여 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$일 때 $y = \log_a x$일 필요충분조건은 $x = a^y = e^{y\ln a}$이고 양변에 ln을 취하면 $\ln x = \ln e^{y\ln a} = y\ln a$이다. 그런데 $y = \log_a x$이므로 다음을 얻는다.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

정리 8.6.7 지수함수와 로그함수의 도함수

$a>0,\ a\neq 1,\ x>0$일 때 다음이 성립한다.

(i) $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ (ii) $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}$

증명 (i) $\dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{d}{dx}e^{x\ln a} = (e^{x\ln a})\ln a = a^x \ln a$.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{x\ln a}$. ■

다음으로 삼각함수를 해석적으로 정의하자.

정의 8.6.8 삼각함수

임의의 실수 x에 대하여

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \tag{19}$$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \tag{20}$$

으로 정의된 함수 $\sin$과 $\cos$을 각각 **사인**, **코사인**이라고 부른다.

이제 사인과 코사인이 고등학교에서 공부한 성질을 모두 가지고 있으며, 또한 그러한 성질을 가지고 있는 함수가 각각 유일함을 보임으로써 이 정의를 정당화할 것이다.

먼저 정의에 의하여 명백히 $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1$이다. 그리고 임의의 실수 x에 대하여

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x$$

가 성립한다. 사인과 코사인을 각각 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x,\\ \frac{d}{dx}\cos x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2(n-1)}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x,\ \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$를 얻는다.

$\phi(x) := \sin^2 x + \cos^2 x$라고 하자. 그러면 임의의 x에 대하여

$$\phi'(x) = 2\sin x\cos x + 2\cos x(-\sin x) = 0$$

이므로 ϕ는 상수함수이다. 그런데 $\phi(0)=1$이므로 임의의 x에 대하여 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이다. 이상의 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 8.6.9 | 사인과 코사인의 기본 성질

사인과 코사인은 $\mathbb{R}$ 에서 미분 가능하고

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x,\quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{21}$$

이다. 또한 임의의 실수 x에 대하여 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이 성립한다.

또한 사인과 코사인의 이계도함수를 구하면

$$\frac{d^2}{(dx)^2}\sin x = -\sin x,\quad \frac{d^2}{(dx)^2}\cos x = -\cos x \tag{22}$$

이다. 다음 참고는 (21), (22)를 모두 만족시키는 함수가 사인과 코사인으로서 각각 유일함을 설명한다.

참고 8.6.10 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f''=-f,\ f(0)=0,\ f'(0)=b$를 만족시키면 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=b\sin x$가 성립한다. 또한 함수 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $g''=-g,\ g(0)=a,\ g'(0)=b$를 만족시키면 임의의 x에 대하여 $g(x)=a\cos x+b\sin x$가 성립한다.

증명 임의의 x에 대하여

$$\eta(x) := f(x)\sin x + f'(x)\cos x,$$
$$\xi(x) := f(x)\cos x - f'(x)\sin x$$

라고 하면 $\eta'(x)=0,\ \xi'(x)=0$이므로 다음을 얻는다.

$$b = f(x)\sin x + f'(x)\cos x,$$
$$0 = f(x)\cos x - f'(x)\sin x.$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} b\sin x &= \sin x\,(f(x)\sin x + f'(x)\cos x) \\ &= f(x)(1-\cos^2 x) + f'(x)\sin x\cos x \\ &= f(x) - \cos x\,(f(x)\cos x - f'(x)\sin x) = f(x). \end{aligned}$$

다음으로 임의의 x에 대하여

$$\phi(x) := g(x) - a\cos x$$

라고 하면 $\phi''=-\phi,\ \phi(0)=0,\ \phi'(0)=b$이므로 앞의 f에 대한 성질에 의하여 $\phi(x)=b\sin x$가 성립한다. 즉 다음 등식이 성립한다.

$$g(x) = a\cos x + b\sin x$$ ■

위 참고에서 $a=1,\ b=1$을 대입하면 $f''=-f,\ f(0)=0,\ f'(0)=1$인 함수 f는 $f(x)=\sin x$로서 유일하고 $g''=-g,\ g(0)=1,\ g'(0)=0$인 함수 g는 $g(x)=\cos x$로서 유일함을 알 수 있다. 즉 다음과 같은 결론을 얻는다.

고등학교에서 공부한 성질을 만족시키는 사인과 코사인 함수는 (19), (20)으로서 유일하다.

정리 8.6.11 | 삼각함수의 덧셈 정리

임의의 실수 x, y에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

(ii) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

증명 실수 y가 임의로 주어졌다고 하자. $f(x) \coloneqq \sin(x+y)$라고 하면

$$f'' = -f, \ f(0) = \sin y, \ f'(0) = \cos y$$

이므로 참고 8.6.10에 의하여

$$f(x) = \sin y \cos x + \sin x \cos y$$

를 얻는다. 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos(x+y) = f'(x) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

를 얻는다. ■

코사인의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + - \cdots$$

교대급수의 오차의 한계 공식에 의하여 다음을 얻는다.

$$\left|\cos 2 - \left(1 - \frac{2^2}{2!}\right)\right| \le \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$$

따라서 $\cos 2 < 0$이다. 또한 $\cos 0 = 1$이고 코사인은 연속함수이므로 사잇값 정리에 의하여 $\cos x = 0$을 만족시키는 x가 $(0, 2)$에 존재한다. 그러한 x 중에서 가장 작은 값의 두 배를 π로 나타내며 **원주율**이라고 부른다. 즉 다음과 같이 정의한다.

$$\pi \coloneqq 2 \inf \{x \mid \cos x = 0, \ x > 0\}$$

코사인이 연속이고 $\cos 0 \neq 0$이므로 $\{x \mid \cos x = 0, \ x > 0\}$는 닫힌집합이다. 따라서 $\pi > 0$이다.

정의에 의하여 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$이고 $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$이므로 $\sin \frac{\pi}{2}$의 값은 1이거나 -1이 되어야 한다. 그런데 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\cos x > 0$이고 이 구간에서 $\sin$은 증가함수이므로 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$이다. 덧셈 정리를 이용하면

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

이고 같은 방법으로 $\sin \pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$을 얻는다. 다시 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

를 얻는다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정리 8.6.12 | 삼각함수의 주기성

사인과 코사인은 각각 주기가 2π인 주기함수이다.

단원 마무리 문제

개념 이해하기

1. 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 점별수렴하는 함수열은 균등수렴하지 않는다.

(2) 균등수렴하지만 점별수렴하지 않는 함수열이 존재한다.

(3) 균등수렴하는 함수열의 극한함수는 점별극한함수와 동일하다.

(4) 거듭제곱급수의 부분합은 다항함수이다.

(5) 거듭제곱급수의 수렴반경은 음수일 수 없다.

(6) 거듭제곱급수는 수렴구간의 내부에서 균등수렴한다.

(7) 균등수렴하는 연속함수열의 극한함수는 리만 적분 가능하다.

2. 다음 진술의 참·거짓 여부를 판별하여라.

(1) 두 함수 f, g가 a에서 해석적이면 $f+g$도 a에서 해석적이다.

(2) 두 함수 f, g가 a에서 해석적이면 fg도 a에서 해석적이다.

(3) 함수 f가 a에서 해석적이면 f'도 a에서 해석적이다.

(4) 함수 f가 a에서 해석적이고 $F'=f$이면 F도 a에서 해석적이다.

3. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어졌을 때 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경을 구하여라.

(1) $\dfrac{(n+1)^2(n+2)}{4^n(n+3)}$ (2) $\dfrac{n!}{(n+1)^2 e^{2n}}$ (3) $\dfrac{(2n)!}{(3n)!}$

(4) $n\ln(n+1)$ (5) $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$ (6) $\dfrac{2^n+3^n}{(n+1)^4}$

4. 다음 등식이 성립하는 x의 범위를 구하여라.

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+nx^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{1+nx^2}\right)$$

5. 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 주어졌을 때 $\left(\sum f_n\right)'=\sum f_n{}'$이 성립하는 x의 범위를 구하여라.

(1) $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ (2) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^3+n^4x^2}$ (3) $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n$

6. 구간 $[0,\ 1]$에서 다음과 같이 주어진 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴하는지 판정하여라.

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{n+x}$ (2) $f_n(x)=\dfrac{1}{nx+1}$

(3) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$ (4) $f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{nx}{e^{nx}}$

(5) $f_n(x)=nx(1-x)^n$ (6) $f_n(x)=2nxe^{-nx^2}$

7. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(x-e)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{e}{3n}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2+n}(x+1)^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n}\right)(x-1)^n$

8. 다음과 같이 주어진 함수 f의 맥클라린 급수를 구하여라.

(1) $f(x)=\tan^{-1}x$

(2) $f(x)=7^x$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$

(4) $f(x)=\cosh x$

(5) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(6) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$

(7) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$

(8) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$

9. 함수가 곱과 분수로 정의되어 있을 때 로그를 이용하여 도함수를 쉽게 구할 수 있다. 함수 f가

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$$

로 정의되었다고 하자. 다음 순서를 따라 f를 미분하여라.

(1) 양변에 자연로그를 취한다.

(2) 로그의 성질을 이용하여 우변을 네 개의 로그의 합으로 바꾼다.

(3) 양변을 x에 대하여 미분한다. 그러면 좌변은 $f'(x)/f(x)$가 된다.

(4) 양변에 $f(x)$를 곱한다.

이와 같은 방법을 **로그 미분법**이라고 부른다.

개념 응용하기

10. 부정적분 $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^3}dx$를 구하여라.

11. 두 함수 f와 g가 양의 값만을 갖고 미분 가능할 때 $h(x)=(f(x))^{g(x)}$로 정의된 함수 h의 도함수를 구하여라.

12. 사인의 역함수 $\sin^{-1}$와 코사인의 역함수 $\cos^{-1}$의 적절한 정의역을 정하고 이들의 도함수를 구하여라.

13. **쌍곡삼각함수**를 다음과 같이 정의한다.

$$\sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

즉 지수함수 $\exp$를 기함수와 우함수의 합으로 나타냈을 때 기함수 부분을 쌍곡사인, 우함수 부분을 쌍곡코사인으로 정의한다.

(1) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$, $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$임을 증명하여라.

(2) $\sinh$와 $\cosh$의 역함수를 구하고 그 도함수를 구하여라.

14. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어졌을 때 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴구간을 구하여라.

(1) $a_{2n}=2^n$, $a_{2n+1}=3^n$

(2) $a_n=\dfrac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}$

(3) $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-3)}{2^n n!}$

(4) $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^n}$

15. 수렴반경이 양수인 거듭제곱급수로 정의된 함수 $f(x)=\sum a_n x^n$이 우함수이면 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=0$임을 증명하여라.

16. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 양수 a, b가 존재하여 임의의 n에 대하여 $a < a_n < b$가 성립할 때 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경을 구하여라.

17. 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 $f_n(x) = x^n$으로 주어진 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴하지 않음을 증명하여라. 또한 $(-1,\ 1)$의 닫힌 부분구간에서 $\{f_n\}$이 균등수렴함을 증명하여라.

18. $\mathbb{R}$에서 $f_n(x) = \sin\left(x + \dfrac{1}{2^n}\right)$으로 주어진 함수열 $\{f_n\}$이 $\sin x$에 균등수렴함을 증명하여라.

19. 다음 거듭제곱급수를 닫힌 형태로 나타내어라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n$　(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n-1}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} n^2x^n$

20. 다음과 같이 주어진 함수 f에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x)$를 구하여라.

(1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$　(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}x^n$

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$　(4) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

21. **탄젠트**는

$$\tan x \coloneqq \frac{\sin x}{\cos x}$$

로 정의된 함수이며 **역탄젠트** $\tan^{-1}$는 탄젠트의 정의역을 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$로 제한한 함수의 역함수이다.

(1) 역탄젠트 함수의 도함수가 다음과 같음을 증명하여라.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 무한등비수열을 이용하여 (1)의 등식에서 우변의 맥클라린 급수를 구하여라.

(3) (2)에서 구한 맥클라린 급수의 부정적분을 구하여 역탄젠트의 맥클라린 급수를 구하여라.

(4) $x = 1$일 때 (3)에서 구한 거듭제곱급수가 수렴함을 증명하여라.

(5) 아벨의 정리를 이용하여 다음 **라이프니츠 원주율 공식**을 증명하여라.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$$

22. 함수열 $\{f_n\}$의 각 항 f_i가 $[a,\ b]$에서 증가함수이고 $f_i(a) \geq 0$이며 무한급수 $\sum f_n(b)$가 수렴하면

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

가 성립함을 증명하여라.

23. 함수열 $\{f_n\}$의 각 항 f_n이 $[a,\ b)$에서 연속이고 $\{f_n\}$이 균등수렴하며 임의의 $c \in (a,\ b)$에 대하여 극한함수 f가 $[a,\ c]$에서 연속이라고 하자. 만약 f와 $\{f_n\}$이 $[a,\ b)$에서 균등유계이면

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx$$

가 성립함을 증명하여라.

24. 자연수 n과 실수 x에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

25. 구간 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간에서 다음 함수급수가 균등수렴함을 증명하여라.

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$$

26. p가 양수일 때 함수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$는 $\mathbb{R}$에서 수렴하며 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간에서 균등수렴함을 증명하여라.

27. p가 양수일 때 함수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$는 $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$인 x에서 수렴하며 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌 부분구간에서 균등수렴함을 증명하여라.

28. 양수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\beta}}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n\beta}$$

29. $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$로 주어진 함수열 $\{f_n\}$이 유계인 구간에서는 균등수렴하지만 유계가 아닌 구간에서는 균등수렴하지 않음을 증명하여라.

30. 무한급수 $\sum a_n$이 절대수렴하면 $\sum a_n\sin nx$와 $\sum a_n\cos nx$는 균등수렴함을 증명하여라.

31. 함수집합 $\{f_n\mid n\in I\}$의 모든 원소가 집합 E에서 균등연속이고 I가 유한집합이면 $\{f_n\mid n\in I\}$는 E에서 동등연속임을 증명하여라.

32. 함수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{-x})^n$이 $[0,\ 2]$에서 균등수렴함을 증명하여라.

33. 수열 $\{c_n\}$이 감소하는 양항수열이며 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx$가 $\mathbb{R}$에서 점별수렴하면 이 함수급수는 $(0,\ 2\pi)$의 닫힌부분구간에서 균등수렴함을 증명하여라.

34. 실수 α와 음이 아닌 정수 k에 대하여 **이항계수**(binominal coefficient)를 다음과 같이 정의한다.

$$\binom{\alpha}{k}:=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{if } k\neq 0\\ 1 & \text{if } k=0\end{cases}$$

구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 f가

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

으로 주어졌다고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$임을 보이고 이 미분방정식을 풀어 $f(x)$를 구하여라.

(2) $(1+x)^{\alpha}=f(x)$임을 증명하여라. 이 등식을 **뉴턴의 이항정리**라고 부른다.

(3) f가 $(-1,\ 1)$에서 해석적임을 보여라.

35. 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속인 도함수를 가질 때 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right)=0$$

36. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{nx}dx=0$임을 증명하여라.

실력 다지기

37. 수열 $\{r_k\}$가 $\mathbb{N}$ 으로부터 $[0,\ 1]\cap\mathbb{Q}$ 로의 일대일대응이라고 하자. 그리고 $[0,\ 1]$에서 두 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{if } x\in[0,\ 1]\setminus\mathbb{Q}\\ k+\dfrac{1}{n} & \text{if } x=r_k \text{ for some } k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

(1) 두 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$이 $[0,\ 1]$에서 균등수렴함을 증명하여라.

(2) $h_n=f_n g_n$이라고 하면 $\{h_n\}$은 $[0,\ 1]$에서 균등수렴하지 않음을 증명하여라.

(3) 균등수렴하는 두 함수열의 곱이 균등수렴하지 않는 다른 예를 만들어 보아라.

38. 구간 $[a,\ b]$에서 함수열 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴하고

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt,\quad F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

일 때 $[a,\ b]$에서 $\{F_n\}$은 F에 균등수렴함을 증명하여라.

39. $\{a_n\}$이 양항수열이고 거듭제곱급수 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$의 수렴반경이 1이며 $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\sigma$이면 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 σ에 수렴함을 증명하여라.

40. 함수 f가 $[0,\ 1]$에서 연속일 때 다음을 증명하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)dx}{\int_0^1 x^n dx}=f(1)$

41. 다음 등식을 증명하여라.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

단, 양변의 식 모두가 양의 무한대로 발산하는 경우 양변이 같은 것으로 간주한다.

42. 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 ϕ를 $\phi(x)=|x|$로 정의하다. 그리고 $\phi(x+2)=\phi(x)$로 정의한다. 이로써 ϕ는 정의역이 $\mathbb{R}$ 인 주기함수이다. 이제 임의의 자연수 k에 대하여

$$f_k(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^k\phi(4^k x)$$

로 정의한다. 이때 함수급수 $\sum f_n$은 균등수렴하고 $f=\sum f_n$은 연속이지만 f는 어느 곳에서도 미분가능하지 않음을 증명하여라. 이 함수를 **바이어슈트라스 함수**(Weierstrass function)라고 부른다.

43. 두 함수 f와 g가 모두 $[a,\ b]$에서 리만 적분 가능하다고 하자. 그리고 두 양수 $p,\ q$에 대하여

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

이 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 로그함수가 오목함수임을 증명하고 이를 이용하여 양수 $a,\ b$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\ln(ab)=\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q}\le \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

(2) $u\ge 0,\ v\ge 0$일 때, 로그함수가 증가함수라는 사실과 위 (1)의 부등식을 결합하여 다음 부등식을 유도하여라. 이 부등식을 **영의 부등식**(Young's inequality)이라고 부른다.

$$uv\le\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

(3) 함수 f에 대하여

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

이라고 정의하자. 이때 (2)를 이용하여 다음 부등식을 유도하여라.

$$\int_a^b \frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q}dx \le \frac{1}{p}\int_a^b\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p dx+\frac{1}{q}\int_a^b\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q dx$$

(4) 위 (3)의 부등식 이용하여 다음 부등식을 유도하여라.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

이 부등식을 **횔더의 부등식**(Hölder's inequality)이라고 부른다.

44. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주어졌다.

$$a_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\ n\ge 2$$

(1) $\{a_n\}$이 감소수열임을 증명하여라.

(2) 부분적분법과 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 자연수 n에 대하여 다음 두 등식이 성립함을 증명하여라.

$$a_{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2},\quad a_{2n-1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$$

(3) $\{a_n\}$이 감소수열이라는 사실과 (2)의 등식을 이용하여 다음 부등식을 유도하여라.

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$$

(4) 위 (3)의 부등식과 조임 정리를 이용하여 다음 등식을 유도하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

이 등식을 **웰리스의 곱**(Wallis' product)이라고 부른다.

도약하기

45. 르베그(Lebesgue)의 지배수렴 정리(dominated convergence theorem)를 찾아보고 다음 명제를 정당화하여라.

> 균등유계인 함수열 $\{f_n\}$의 각 항이 $[a,\ b]$에서 리만적분 가능하고 $\{f_n\}$의 극한함수 f도 $[a,\ b]$에서 리만적분 가능하면 다음이 성립한다.
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

46. 연속함수공간 $C[a,\ b]$의 정의를 조사하고 이 공간이 완비임을 증명하여라.

47. 균등수렴에 관한 코시(Cauchy), 디리끌레(Dirichlet), 푸리에(Fourier)의 연구에 대하여 조사해보자.

48. 고등학교 교과서와 학부 미분적분학 교재에서 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 정의를 찾아보고 해석학에서의 정의와 비교해보자. 또한 이들 함수를 거듭제곱급수로 정의할 때의 장점과 단점을 서술하여라.

49. 적분을 이용하여 삼각함수를 정의하는 방법을 조사해보자.

50. 정의역이 복소수집합일 때 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 어떻게 정의하는지 조사해보자.

생각 넓히기 | 뉴턴의 해석학

17세기 말 영국의 뉴턴(Newton)과 독일의 라이프니츠(Leibniz)는 오늘날의 것에 가까운 미적분학을 창시하였다. 특히 뉴턴은 그의 이론을 전개하는 과정에서 무한급수도 유한 다항식과 거의 마찬가지로 다룰 수 있다는 것을 발견하였다. 즉 무한급수에 의한 해석에는 동일한 내적 일관성이 있고 유한량의 대수학과 같은 일반법칙을 따른다는 점이다. 따라서 무한급수는 함수의 근사일 뿐만 아니라 함수와 동등하다고 간주하게 되었다. 뉴턴은 1711년 자신의 논문에서 다음과 같이 말하였다.[3)]

> 항의 개수가 유한인 방정식을 이용하여 일반적인 해석(곧, 대수)이 할 수 있는 어떠한 계산도 이 새로운 방법으로 무한 방정식을 써서 할 수 있다. 따라서 나는 이 방법에도 '해석(analysis)'이라는 이름을 붙이는 것에 아무런 망설임도 없을 것이다. 왜냐하면 이것에 포함되어 있는 논리는 다른 어떤 논리에 비해서 결코 불확실한 것이 아니고, 무한방정식도 부정확한 것이 아니기 때문이다. 비록 아주 한정된 논증 능력밖에 없는, 수명이 짧은 우리 인간에게는 그런 방정식의 모든 항을 쓰거나 구하는 양을 상상해서 정확하게 알 수 없으나 … 결론을 내리면 이 새로운 방법은 이른바 '해석술(analytic art)'에 속한다고 할 수 있다. 더욱이 이 방법으로 도형의 넓이나 곡선의 길이 같은 것들을 정확하게 계산할 수 있고 기하학적으로 결정할 수 있다.

오늘날 거듭제곱급수를 이용하여 함수를 정의하고 이러한 함수의 성질을 밝히는 수학의 분야를 '해석학'이라고 부르는 것도 바로 뉴턴의 해석술로부터 비롯했다고 볼 수 있다.

거듭제곱급수를 이용하는 방법은 이미 알고 있는 함수뿐만 아니라 이들 함수를 이용하여 나타낼 수 없는 다양한 함수의 성질을 다룰 수 있다는 장점이 있다. 그뿐만 아니라 거듭제곱급수를 이용하면 이미 알고 있는 함수의 정의역을 확장할 수 있는데, 예를 들어 지수함수, 로그함수, 삼각함수와 같은 함수를 실수 집합 위에서 성립하는 거의 모든 성질이 그대로 성립하도록 복소수 집합 위에서 정의할 수 있다.

3) Carl B. Boyer 교수님의 책『A History of Mathematics』제 19 장의 내용을 재인용함.

A1
집합을 이용한 실수계의 구성

이 장에서는 집합을 이용하여 자연수를 정의하고 이를 확장하여 실수를 구성하는 방법을 소개한다. 해석학에서 사용하는 수의 성질 중 가장 중요한 것이 완비성이므로 실수를 구성하는 과정에 비중을 두어 설명한다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 자연수, 정수, 유리수, 실수계의 구성 방법을 설명할 수 있다.
- 실수계의 성질을 설명할 수 있다.

자연수계의 구성

집합을 이용한 자연수의 구성 과정은 다음과 같다.

1단계 $0 := \varnothing$, $1 := \{\varnothing\}$으로 정의한다.

2단계 집합 X의 후자(successor)를 $X^+ := X \cup \{X\}$로 정의한다.

3단계 $\varnothing \in A$와 $X \in A \Rightarrow X^+ \in A$가 성립할 때 집합 A를 귀납적 집합이라고 부른다.

4단계 모든 귀납적 집합의 교집합을 ω로 표기한다.

5단계 자연수 집합을 $\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$으로 정의한다.

6단계 덧셈을 $m, n \in \omega$에 대하여 $m + 0 = m$, $m + n^+ = (m+n)^+$로 정의한다.

7단계 곱셈을 $m, n \in \omega$에 대하여 $m0 = 0$, $mn^+ = mn + m$으로 정의한다.

8단계 순서를 $m, n \in \omega$에 대하여 $m \le n \Leftrightarrow m \in n \ \vee \ m = n$으로 정의한다.

위 정의에 의해 자연수는 다음과 같은 집합이 된다.

$$\begin{aligned}
&1 = \{0\} = \{\varnothing\},\\
&2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\\
&3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},\\
&4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\},\\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

자연수의 덧셈과 곱셈은 n에 관하여 귀납적으로 정의되었다. 또한 자연수계에서 등호는 집합의 등호와 동일한 의미이다. 즉 $m = n$이라는 것은 $m \subseteq n$이고 $n \subseteq m$인 것을 의미한다.

이렇게 구성된 자연수계 $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, \le \rangle$는 우리가 원하는 성질을 모두 갖는 집합이 된다. 1889년에 이탈리아의 수학자 페아노(Peano)는 다섯 개의 공리를 이용하여 자연수를 정의하였는데, 위와 같은 정의에 의해 구성된 집합 $\mathbb{N}$은 페아노의 공리의 다섯 가지 조건을 모두 만족시킨다.

(i) $1 \in \mathbb{N}$이다. (ii) 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \in \mathbb{N}$이다. (iii) 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \ne 1$이다. (iv) $\mathbb{N}$의 부분집합 X에 대하여 $1 \in X$이고 $n \in X \Rightarrow n^+ \in X$이면 $X = \mathbb{N}$이다. (v) $n, m \in \mathbb{N}$이고 $n^+ = m^+$이면 $n = m$이다.

위 공리에서 (iv)는 수학적 귀납법을 유도하는 데에 매우 중요한 역할을 하기 때문에 (iv)를 수학적 귀납법의 원리라고 부르기도 한다.

정수계의 구성

자연수계를 확장하여 다음과 같이 정수계를 구성한다. 각 단계에서 $[x]$는 x의 동치류를 의미한다.

1단계 $Z \coloneqq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$이라고 하자. Z에서의 동치관계 E_Z를 다음과 같이 정의한다.

$$(m, n)\, E_Z\, (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$$

2단계 정수 집합을 상집합 $\mathbb{Z} \coloneqq Z/E_Z$으로 정의한다.

3단계 덧셈을 $[(m, n)] + [(m', n')] \coloneqq [(m + m', n + n')]$으로 정의한다.

4단계 곱셈을 $[(m, n)][(m', n')] \coloneqq [(mm' + nn', m'n + mn')]$으로 정의한다.

5단계 순서를 $[(m, n)] \le [(m', n')] \Leftrightarrow m + n' \le m' + n$으로 정의한다.

자연수 m, n에 대하여 정수 $[(m, n)]$는

$$[(m, n)] = m - n$$

인 것으로 생각하면 된다. 예를 들어

$$\begin{aligned} 4 &= [(5, 1)] = [(6, 2)] = [(7, 3)] = \cdots, \\ 0 &= [(1, 1)] = [(2, 2)] = [(3, 3)] = \cdots, \\ -3 &= [(1, 4)] = [(2, 5)] = [(3, 6)] = \cdots \end{aligned}$$

이다. 이로써 자연수를 이용하여 0과 음의 정수까지 모두 정의하였다.

이렇게 구성된 정수계 $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, \le \rangle$는 우리가 원하는 성질을 모두 갖는 집합이 된다.

양의 정수 $[(m, n)]$에 대하여 $m > n$이므로 $m = n + p$인 자연수 p가 유일하게 존재한다. 이때의 대응 $[(m, n)] \leftrightarrow p$에 의하여 자연수계는 정수계의 부분이 된다. 즉 p를 $[(m, n)]$에 대응시키는 함수는 덧셈, 곱셈, 순서를 보존하므로 정수계 안에 자연수계와 동일한 구조를 갖는 부분집합이 존재하는 것이다.

유리수계의 구성

정수계를 확장하여 다음과 같이 유리수계를 구성한다.

1단계 $Q \coloneqq \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$라고 하자. Q에서의 동치관계 E_Q를 다음과 같이 정의한다.

$$(p,\ q)\, E_Q\, (p',\ q') \iff pq' = p'q$$

2단계 유리수 집합을 상집합 $\mathbb{Q} \coloneqq Q/E_Q$으로 정의한다.

3단계 덧셈을 $[(p,\ q)] + [(p',\ q')] \coloneqq [(pq' + p'q,\ qq')]$으로 정의한다.

4단계 곱셈을 $[(p,\ q)][(p',\ q')] \coloneqq [(pp',\ qq')]$으로 정의한다.

5단계 순서를 $[(p,\ q)] \le [(p',\ q')] \iff pq'\mathrm{sgn}(q') \le p'q\,\mathrm{sgn}(q)$로 정의한다. 여기서 sgn은

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

으로 정의된 함수이다.

정수 $p,\ q$에 대하여 유리수 $[(p,\ q)]$는

$$[(p,\ q)] = \frac{p}{q}$$

인 것으로 생각하면 된다. 예를 들어

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= [(1,\ 3)] = [(-2,\ -6)] = [(3,\ 9)] = \cdots, \\ -\frac{7}{5} &= [(-7,\ 5)] = [(14,\ -10)] = [(-21,\ 15)] = \cdots, \\ 1 &= [(1,\ 1)] = [(-2,\ -2)] = [(8,\ 8)] = \cdots, \\ 0 &= [(0,\ 1)] = [(0,\ -4)] = [(0,\ 5)] = \cdots \end{aligned}$$

이다. 이로써 두 정수의 비로 표현되는 수를 모두 정의하였다.

이렇게 정의된 유리수계 $\langle \mathbb{Q},\ +,\ \cdot,\ \le \rangle$는 체 공리와 순서 공리를 만족시키는 체계가 된다.

유리수 $[(p,\ q)]$에 대하여 $p = kq$인 정수 k가 존재할 때의 대응 $[(p,\ q)] \leftrightarrow k$에 의하여 정수계는 유리수계의 부분이 된다.

실수계의 구성

끝으로 유리수계를 이용하여 실수계를 정의하자. 실수 x에 대하여

$$L_x \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}, \quad R_x \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} \mid x \le q\}$$

라고 하자. 그러면 임의의 실수 x에 대하여 L_x와 R_x는 유일하게 결정된다. 이때 두 집합의 쌍 $(L_x,\ R_x)$를 데데킨트의 절단이라고 부른다. $x \ne y$일 때 $L_x \ne L_y$, $R_x \ne R_y$이므로 실수 x에 절단 $(L_x,\ R_x)$는 하나씩 대응된다. 따라서 절단의 모임에 적절한 방법으로 덧셈, 곱셈, 순서관계를 정의하여 실수계를 구성할 수 있을 것이다. 그런데 $R_x = \mathbb{Q} \setminus L_x$이므로 L_x에 의하여 R_x는 완전히 결정된다. 따라서 쌍 $(L_x,\ R_x)$의 집합이 아닌 L_x의 집합을 이용하여 실수계를 구성할 수 있다.

1단계 : 절단 유리수 집합의 부분집합 α가 **절단**이라 함은 다음 세 조건을 모두 만족시키는 것으로 정의한다.

(Ⅰ) α는 공집합이 아니고 $\alpha \neq \mathbb{Q}$ 이다.
(Ⅱ) $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ 이고 $q < p$이면 $q \in \alpha$이다.
(Ⅲ) $p \in \alpha$이면 $r \in \alpha$가 존재하여 $p < r$이다.

이제 p, q, r, $\cdots$는 유리수를 나타내고 α, β, γ, $\cdots$는 절단을 나타내는 것으로 약속하자. 그리고 모든 절단들의 모임을 $\mathbb{R}$ 이라고 하자. 조건 (Ⅲ)은 α에 최대 원소가 존재하지 않는 것을 의미한다. 또한 조건 (Ⅱ)에 의하여 다음이 성립한다.

- $p \in \alpha$이고 $q \notin \alpha$이면 $p < q$이다.
- $r \notin \alpha$이고 $r < s$이면 $s \notin \alpha$이다.

2단계 : 부등호의 정의 부등호 $<$를 $\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subsetneq \beta$로 정의한다. 명백히 임의의 α, β에 대하여

$$\alpha < \beta, \; \alpha = \beta, \; \beta < \alpha$$

중 하나가 유일하게 성립한다.

3단계 : 상한의 존재성 집합 $\mathbb{R}$ 는 상한 공리를 만족시킨다. A가 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이고 위로 유계이며 β가 A의 상계라고 하자.

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

라고 했을 때 γ가 A의 상한이 됨을 증명하자. A가 공집합이 아니므로 $\alpha_0 \in A$가 존재한다. α_0이 공집합이 아니고 $\alpha_0 \subseteq \gamma$이므로 γ는 공집합이 아니다. $\gamma \subseteq \beta$이므로 $\gamma \neq \mathbb{Q}$ 이다. 따라서 γ는 (Ⅰ)을 만족시킨다. $p \in \gamma$라고 하자. 그러면 $p \in \alpha_1$인 $\alpha_1 \in A$가 존재한다. 만약 $q < p$이면 $q \in \alpha_1$이므로 $q \in \gamma$이다. 따라서 γ는 (Ⅱ)를 만족시킨다. 만약 $\gamma \in \alpha_1$이고 $r > p$이면 $r \in \gamma$이므로 γ는 (Ⅲ)을 만족시킨다. 따라서 $\gamma \in \mathbb{R}$ 이다.

임의의 $\alpha \in A$에 대하여 $\alpha \le \gamma$임은 자명하다.

$\delta < \gamma$라고 가정하자. 그러면 $s \in \gamma$이고 $s \notin \delta$인 s가 존재한다. $s \in \gamma$이므로 $s \in \alpha$인 적당한 $\alpha \in A$가 존재한다. 따라서 $\delta < \alpha$이고 δ는 A의 상계가 아니다.

이로써 γ는 A의 최소 상계이므로 $\gamma = \sup A$이다.

4단계 : 덧셈 $\alpha + \beta \coloneqq \{r + s \mid r \in \alpha \;\wedge\; s \in \beta\}$라고 정의하자. 모든 음의 유리수의 집합을 0^*로 표기한다.

$\alpha + \beta$가 절단임을 보이자. 명백히 $\alpha + \beta$는 공집합이 아니고 $\mathbb{Q}$ 의 부분집합이다. $r' \notin \alpha$, $s' \notin \beta$라고 하자. 그러면 임의의 $r \in \alpha$와 $s \in \beta$에 대하여 $r' + s' > r + s$이다. 따라서 $r' + s' \notin \alpha + \beta$이다. 즉 $\alpha + \beta$는 (Ⅰ)을 만족시킨다. $p \in \alpha + \beta$라고 하면 $r \in \alpha$와 $s \in \beta$가 존재하여 $p = r + s$이다. 따라서 $\alpha + \beta$는 (Ⅱ)를 만족시킨다. $t > r$인 $t \in \alpha$를 택하면 $p < t + s$이고 $t + s \in \alpha + \beta$이다. 따라서 $\alpha + \beta$는 (Ⅲ)을 만족시킨다. 이로써 $+$는 잘 정의된 이항연산이다.

(A1), (A2)가 성립함은 유리수의 성질에 의하여 자명하다.

(A3) 0^*이 덧셈에 대한 항등원임을 보이자. $r \in \alpha$이고 $s \in 0^*$이면 $r + s < r$이므로 $r + s \in \alpha$이다. 따라서 $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$이다. 포함관계가 반대로 성립함을 보이기 위하여 $p \in \alpha$를 택하고 $r > p$인 $r \in \alpha$를 택하자. 그러면 $p - r \in 0^*$이고 $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$이므로 $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$이다. 따라서 $\alpha + 0^* = \alpha$이다.

(A4) $\alpha \in \mathbb{R}$ 이라고 하자. 그리고 적당한 $r > 0$에 대하여 $-p-r \notin \alpha$를 만족시키는 유리수 p들의 모임을 β 라고 하자.

먼저 $\beta \in \mathbb{R}$ 임을 보이자. $s \notin \alpha$이고 $p = -s-1$이면 $-p-1 \notin \alpha$이므로 $p \in \beta$이다. 따라서 β는 공집합이 아니다. $q \in \alpha$이면 $-q \notin \beta$이므로 $\beta \neq \mathbb{Q}$ 이다. 따라서 β는 (I)을 만족시킨다. $p \in \beta$이고 $r > 0$이며 $-p-r \notin \alpha$라고 하자. 만약 $q < p$이면 $-q-r > -p-r$이므로 $-q-r \notin \alpha$이다. 따라서 $q \in \beta$이고 β는 (II)를 만족시킨다. $t = p + (r/2)$라고 하자. 그러면 $t > p$이고

$$-t-(r/2) = -p-r \notin \alpha$$

이므로 $t \in \beta$이다. 따라서 β는 (III)을 만족시킨다.

다음으로 $\alpha + \beta = 0^*$임을 보이자. $r \in \alpha$이고 $s \in \beta$이면 $-s \notin \alpha$이므로 $r < -s$이고 $r+s < 0$이다. 따라서 $\alpha + \beta \subseteq 0^*$이다. 포함관계가 반대로 성립함을 보이기 위하여 $v \in 0^*$이고 $w = -v/2$라고 하자. 그러면 $w > 0$이므로 $nw \in \alpha$이고 $(n+1)w \notin \alpha$인 정수 n이 존재한다. $p = -(n+2)w$라고 하면 $p \in \beta$이다. $-p-w \notin \alpha$이고

$$v = nw + p \in \alpha + \beta$$

이므로 $0^* \subseteq \alpha + \beta$이다. 따라서 $\alpha + \beta = 0^*$이다.

여기서 β는 α의 덧셈에 대한 역원이므로 $-\alpha$로 표기하자.

5단계 : 부등호의 성질 덧셈에 관한 성질을 이용하면 부등호의 다른 성질을 증명할 수 있다. 즉 $\beta < \gamma$이고 $\alpha \in \mathbb{R}$ 일 때 덧셈의 정의에 의하여 $\alpha + \beta \subseteq \alpha + \gamma$이므로

$$\beta < \gamma \ \Rightarrow \ \alpha + \beta < \alpha + \gamma$$

가 성립한다. 또한 $\alpha > 0^*$일 필요충분조건은 $-\alpha < 0^*$가 된다.

6단계 : 양수의 곱셈 곱셈은 덧셈에 비해 더 복잡하게 정의된다. 0^*보다 큰 $\alpha \in \mathbb{R}$ 들의 모임을 $\mathbb{R}^+$로 표기하자. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$에 대하여

$$\alpha\beta \coloneqq \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists\, r \in \alpha \ \exists\, s \in \beta : \ p \leq rs,\, r > 0,\, s > 0\}$$

로 정의한다. 그리고 곱셈에 대한 항등원을 $1^* \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\}$로 정의한다.

이렇게 정의된 곱셈은 집합 $\mathbb{R}^+$에서 공리 (M1) ~ (M4)를 만족시킨다. 특히 $\alpha > 0^*$이고 $\beta > 0^*$일 때 $\alpha\beta > 0^*$가 성립한다. 그 증명은 4단계의 증명과 비슷하며 여기서는 생략한다.

7단계 : 음수의 곱셈 이제 음수의 곱셈을 정의한다. 먼저 $\alpha 0^* \coloneqq 0$, $0^* \alpha \coloneqq 0^*$으로 정의한다. 그리고

$$\alpha\beta \coloneqq \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{if } \alpha < 0^*,\ \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{if } \alpha < 0^*,\ \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & \text{if } \alpha > 0^*,\ \beta < 0^* \end{cases}$$

으로 정의한다. 6단계에서 증명한 성질을 이용하면 $\mathbb{R}$ 에서 곱셈이 (M1) ~ (M4)를 만족시킴을 알 수 있다.

이로써 실수계의 모든 공리를 만족시키는 체계 $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, < \rangle$를 구성하였다. □

실수계의 유일성

임의로 주어진 유리수 r에 대하여 $r^* = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < r\}$이라고 하면 $r^* \in \mathbb{R}$이다. 이때 $f(r) = r^*$로 정의된 함수 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$는 환준동형사상(homomorphism)이면서 순서보존사상이 된다. 이러한 대응에 의하여 유리수계는 실수계의 부분(embedding)이 된다.

정리 | 실수계의 유일성

실수계는 유일하다. 즉 $\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}'$이 완비인 순서체이면 $\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}'$는 환동형이고 순서동형이다.

증명의 개요 실수계 $\mathbb{R}'$에서의 덧셈을 $+'$, 곱셈을 $\cdot'$, 부등호를 $<'$, 덧셈에 대한 항등원을 $0'$, 곱셈에 대한 항등원을 $1'$이라고 하자. 함수 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$을 다음과 같이 정의하자.

- $\phi(0) \coloneqq 0'$, $\phi(1) \coloneqq 1'$
- 임의의 정수 n에 대하여 $\phi(n+1) \coloneqq \phi(n) + 1'$, $\phi(n-1) \coloneqq \phi(n) - 1'$
- 임의의 자연수 m에 대하여 $\phi(m^{-1}) \coloneqq \phi(m)^{-1}$
- 정수 n과 자연수 m에 대하여 $\phi(n/m) \coloneqq \phi(n)/\phi(m)$

이제 임의의 유리수 p에 대하여 $\phi(p)$가 정의되었다. 무리수 α에 대하여

$$\lambda_\alpha \coloneqq \{p \in \mathbb{Q} \mid p < \alpha\}$$

라고 하면 $\sup \lambda_\alpha = \alpha$이다. 이제 $\phi(\alpha)$를

$$\phi(\alpha) = \sup\{\phi(p) \mid p \in \lambda_\alpha\}$$

라고 하면 임의의 무리수 α에 대해서 $\phi(\alpha)$가 정의되었다.

유리수의 정의에 의하여 임의의 유리수 p, q에 대하여

$$\phi(p+q) = \phi(p) +' \phi(q),$$
$$\phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot' \phi(q),$$

가 성립한다. 또한 유리수의 조밀성을 이용하면 $r, s \in \mathbb{R}$에 대하여

$$r < s \iff \phi(r) <' \phi(s)$$

임이 증명되며 이것을 이용하면 임의의 $r, s \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\phi(r \cdot s) = \phi(r) \cdot' \phi(s),$$
$$\phi(r+s) = \phi(r) +' \phi(s)$$

가 성립함이 증명된다. □

A2

리만 적분과 관련된 반례

이 장에서는 리만 적분과 관련된 중요한 두 가지 반례를 살펴본다. 그 중 첫 번째는 함수가 미분 가능하고 그 도함수가 유계이지만 도함수가 리만 적분 불가능한 경우이며, 두 번째는 연속함수와 리만 적분 가능한 함수의 합성함수가 리만 적분 불가능한 경우이다.

학습목표 이 단원을 공부하면

- 유계이지만 리만 적분 불가능한 도함수가 존재함을 설명할 수 있다.
- 연속함수와 리만 적분 가능한 함수의 합성함수의 적분 가능성을 설명할 수 있다.

유계이지만 리만 적분 불가능한 도함수

정리 6.4.7에 의하면 함수 F가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 $f=F'$이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하면

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

가 성립한다. 그러나 여기서 F'이 적분 가능하다는 조건을 빼면 보기 6.4.6에서 보는 바와 같이 위 등식은 성립하지 않을 수도 있다. 그런데 보기 6.4.6에서 제시한 함수

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

는 $[0,\ 1]$에서 유계가 아니다. 그렇다면 다른 함수의 도함수가 되면서 유계이지만 리만 적분 불가능한 함수가 존재할까? 지금부터 그러한 함수를 만들어보자.

함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자. G가 $[0,\ 1]$의 조밀한 열린부분집합이고 길이의 합이 $1/2$인 서로소인 열린구간들의 합집합으로 나타난다고 하자. 그러한 열린집합을 실제로 구성할 수 있다. $(0,\ 1)$에 속하는 유리수들의 집합은 가산집합이므로 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots$와 같은 수열로 나타낼 수 있다. 이때

$$\left(r_1-\frac{1}{8},\ r_1+\frac{1}{8}\right),\ \left(r_2-\frac{1}{16},\ r_2+\frac{1}{16}\right),\ \left(r_3-\frac{1}{32},\ r_3+\frac{1}{32}\right),\ \cdots$$

이라고 하면 이러한 열린구간들의 합집합은 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 유리수를 가지며 길이가 $1/2$ 이하이다. 위 열린구간들의 합집합을 I라고 하자. 그러면 I의 길이는 $1/2$ 이하이다.

길이가 $1/2$보다 더 작은 경우 $0<\delta<1$인 양수 δ에 대하여 집합 $(0,\ \delta)\cup I$를 생각하자. 이때 δ를 크게 할수록 $(0,\ \delta)\cup I$의 길이는 길어지는데, δ가 변할 때 $(0,\ \delta)\cup I$의 길이고 연속적으로 변하므로 $(0,\ \delta)\cup I$의 길이가 $1/2$이 되도록 하는 δ가 존재한다. 그러한 δ에 대하여 $(0,\ \delta)\cup I$는 열린집합이므로 가산 개의 서로소인 열린구간 $I_1,\ I_2,\ I_3,\ \cdots$의 합집합으로 나타낼 수 있으며, $\{I_n\}$들의 길이의 합은 $1/2$가 된다.

각 n에 대하여 J_n이 I_n에 포함되고 중심이 I_n과 같으며 길이가 I_n의 길이의 제곱과 동일한 닫힌구간이라고 하자. 각 J_n에서 연속함수 f를 정의하되, J_n의 중심에서의 함숫값은 1이고 J_n의 양 끝점에서의 함숫값은 0이며 그 외의 점에서는 0과 1 사이의 함숫값을 가지도록 하자. 또한 J_n 밖의 점에서는 f의 함숫값을 0으로 정의하자.

함수 f는 리만 적분 불가능하다. P가 $[0,\ 1]$의 분할이면 f의 상한과 하한의 차이가 1 이상이 되는 P의 성분구간들의 길이의 합은 $1/2$ 이상이 된다. 따라서 $U(f,\ P)-L(f,\ P)\geq 1/2$이다. 여기서 P는 $[0,\ 1]$의 임의의 분할이므로

$$\overline{\int} f(x)dx-\underline{\int} f(x)dx\geq\frac{1}{2}$$

을 얻는다.

이제 f가 다른 함수의 도함수가 된다는 사실을 증명해야 한다. 이 사실은 르베그 적분

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

에 의하여 쉽게 증명되지만 여기서는 르베그 적분을 사용하지 않고 증명하자. $K_n \coloneqq J_n\cap[0,\ x]$이라고 하고

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n} f(t)dt$$

라고 하자. 이 적분은 특이적분이다. I를 G와 만나는 $[0,\ 1]$의 부분구간이라고 하자. $I\cap J_n\neq\varnothing$인 자연수 n을 택하고 I_n의 길이를 S_n이라고 하자. $S_n\leq 1/2$이므로

$$l(I\cap I_n)\geq\frac{1}{2}(S_n-S_n^2)\geq\frac{1}{4}S_n$$

이다. 따라서 $l(I\cap J_n)\leq l(J_n)=S_n^2\leq 16\{l(I\cap I_n)\}^2$이다. $N=\{n\mid I\cap J_n\neq\varnothing\}$이라고 하면

$$\sum_{n\in N} l(I\cap J_n)\leq\sum_{n\in N}16\{l(I\cap I_n)\}^2\leq 16\{l(I)\}^2$$

이 성립한다. $x\not\in G$이고 $y\neq x$일 때

$$\int_x^y f(t)dt\leq 16(y-x)^2$$

을 얻고, 또한 $F'(x)=0$을 얻는다. 즉 G의 임의의 점 x에서 $F'(x)=f(x)$가 성립한다.

출처 : Casper Goffman, A Bounded Derivative Which is Not Riemann Integrable, The American Mathematical Monthly, Vol. 84, No. 3 (Mar., 1977), pp. 205-206.

합성함수의 리만 적분

정리 6.2.12에 의하면 f가 리만 적분 가능하고 g가 연속함수인 경우 $g \circ f$는 리만 적분 가능하다. 그러나 순서를 바꾼 합성함수 $f \circ g$는 리만 적분 가능하지 않을 수도 있다. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$$f(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ 1 & \text{if } y \neq 0 \end{cases}$$

이라고 하자. 그리고 함수 g를 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

먼저 $x \in [0,\ 1]$에 대하여 $g_0(x) := 0$이라고 하자. 다음으로 $[0,\ 1]$을 세 개의 구간으로 나누고 그것들을 순서대로 I_1, I_2, I_3이라고 하자. 이때 I_2의 중심이 $1/2$이 되도록 하고 길이가 $1/3$이 되도록 한다. g_0을 수정하여 다음 조건을 만족시키도록 하여 g_1을 얻는다.

- I_1과 I_3의 임의의 점 x에 대하여 $g_1(x) = g_0(x)$이다,
- g_1은 $[0,\ 1]$에서 연속이다,
- g_1는 I_2의 내부에서 양의 값을 가지며 최댓값은 $1/2$이다.

이제 함수 g_{n-1}이 주어졌다고 가정하자. 다음과 같은 방법으로 g_n을 정의한다. 먼저 g_{n-1}이 상수함수 0이 되는 양의 길이를 갖는 모든 구간들을 세 개의 구간으로 나눈다. 이때 가운데 구간의 중심은 나누기 전 구간의 중심과 일치하고 길이는 $1/(3^n 2^{n-1})$이 되도록 한다. 그리고 가운데 구간에서 g_{n-1}의 함숫값을 바꾸어 함수 g_n을 만들되 g_n이 $[0,\ 1]$에서 연속이고 가운데 구간의 내부에서 g_n은 양의 값을 가지며 최댓값 2^{-n}을 갖도록 한다. 여기서 g_n과 g_{n-1}이 다른 값을 갖는 구간의 개수는 2^{n-1}개가 된다. 따라서 그러한 구간들의 길이의 합은 3^{-n}이다.

이러한 과정을 반복하여 함수열 $\{g_n\}$을 얻는다. 이때 $\{g_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

- g_n은 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
- 임의의 $x \in [0,\ 1]$에 대하여 $|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq 2^{-n}$이다.
- g_n의 함숫값이 0이 아닌 구간들의 길이의 합은

  $$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

  이다. 따라서 $n > m$인 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

  $$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_{n-1}(x)| + \cdots + |g_{m+1}(x) - g_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

1보다 작은 임의의 양수 ϵ에 대하여 $N > \log_2 \epsilon^{-1}$인 자연수 N이 존재한다. 이때 $n > m > N$인 임의의 자연수 n, m과 $x \in [0,\ 1]$에 대하여 $|g_n(x) - g_m(x)| < 2^{-N} < \epsilon$이 성립한다. 즉 $\{g_n\}$은 $[0,\ 1]$에서 균등수렴한다. $\{g_n\}$의 극한함수를 g라고 하자. 그러면 g는 다음 조건을 만족시킨다.

- g는 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
- g는 $[0,\ 1]$의 어떠한 부분구간에서도 함숫값이 0인 상수함수가 되지 않는다.
- g가 0이 되지 않는 구간들의 길이의 합은 $S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}$이다.

이제 $f \circ g$가 $[0,\ 1]$에서 리만 적분 불가능함을 보이자. P가 $[0,\ 1]$의 분할이라고 하자. P의 성분구간 중에서 $g(x)$가 그 위에서 0의 값을 갖지 않는 것들만 모아서 P_1이라고 하고, 그 외의 성분구간들의 모임을 P_2라고 하자. P_1의 성분구간들의 길이의 합은 $1/2$ 이하이므로 P_2의 성분구간들의 길이의 합은 $1/2$ 이상이다. 그런데 P_2의 임의의 성분구간 I_i에는 항상 $g(\xi_i)=0$인 점 ξ_i와 $g(\zeta_i) \neq 0$인 점 ζ_i가 존재한다. 명백히 $f \circ g(\xi_i)=0$이고 $f \circ g(\zeta_i)=1$이므로 I_i에서 $f \circ g$의 상한과 하한의 차이는 1이다. 그런데 P_2의 성분구간들의 길이의 합이 $1/2$ 이상이므로

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx - \underline{\int_0^1} f(x)dx \geq \frac{1}{2}$$

이다. 따라서 $f \circ g$는 $[0,\ 1]$에서 리만 적분 불가능하다.

출처 : Jitan Lu, Is the Composite Function Integrable?,
The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 8 (Oct., 1999), pp. 763-766.

A3
단원별 참고 서적

더 깊은 공부를 하고 싶은 사람들을 위하여 단원별 참고 서적을 싣습니다. 참고 서적을 언급할 때마다 저자명과 책 제목을 일일이 나열하는 것이 비효율적이어서 서적 별로 약자를 지정하였습니다. [online]은 온라인에서 배포된 책을 뜻합니다.

참고서적 목록 (약자순)

[AC] W. Fulks, **Advanced Calculus: An Introduction to Analysis** 3ed. Wiley (1978)

[ACK] W. Kaplan, **Advanced Calculus** 5ed. Addison Wesley (2002)

[ACL] N. T. Beng, **Advanced Calculus Lecture Note** [online]. (2012) [https://www.math.wvu.edu/~sherm/m452/muldowney.pdf]

[AOA] Alice, **The Art of Analysis** 3ed [online]. (2010) [앨리스, 맛있는 해석학 3판]

[CA] B. R. Gelbaum & J. M. H. Plmsted, **Counterexamples in Analysis**. Holden-Day Inc (1964)

[CFA] J. B. Conway, **A Course in Functional Analysis** 2ed. Springer (1990)

[CLM] S. Cheng, **A Crash Course on the Lebesgue Integral and Measure Theory** [online]. (2008) [https://www.gold-saucer.org/math/lebesgue/lebesgue.pdf]

[CV] H. Silverman, **Complex Variables**. Houghton Mifflin Company (1975) [경문사, 1996]

[CVS] M. R. Spiegel, et. al., **Schaum's Outlines of Complex Variables** 2ed. McGraw Hill (2009)

[DGS] M. Lipschutz, **Schaum's Outline of Differential Geometry**. McGraw-Hill (1969)

[ERA] R. G. Bartle, **The Elements of Real Analysis** 2ed. Wiley (1976)

[FA] W. Rudin, **Functional Analysis** 2ed. McGraw-Hill (1991)

[FAA] J. B. Fraleigh, **A First Course in Abstract Algebra** 7ed. Addison Wesley (2002)

[FIA] W. A. J. Kosmala, **A Friendly Introduction to Analysis** 2ed. Prentice Hall (2004)

[FMA] R. Johnsonbaugh & W.E. Pfaffenberger, **Foundations of Mathematical Analysis**. Dover (2010) [조열제 외 3인 역, 解析學概論, 교우사]

[FOA] W. W. L. Chen, **Fundamentals of Analysis** [online]. (2012) [http://www.williamchen-mathematics.info/lnfafolder/lnfa.html]

[FSV] W. Fleming, **Functions of Several Variables** 2ed. Springer (1977)

[GTS] S. Lipschutz, **Schaum's Outlines of General Topology**. McGraw Hill (2001)
[이장우 역, 일반위상수학, 경문사]

[IA] W. R. Wade, **An Introduction to Analysis** 4ed. Prentice Hall (2009)

[IC] J. Henle, E. Kleinberg, **Infinitesimal Calculus**. Dover (2003)

[MTI] R. G. Bartle, **A Modern Theory of Integration**. American Mathematical Society (2001)

[MVA] W. W. L. Chen, **Multivariable and Vector Analysis** [online]. (2012)
[http://www.williamchen-mathematics.info/lnmvafolder/lnmva.html]

[PMA] W. Rudin, **Principles of Mathematical Analysis** 3ed. McGraw-Hill (1976)

[RA] H. L. Royden, **Real Analysis** 3ed. Prentice-Hall Inc (1988)

[RCA] W. Rudin, **Real and Complex Analysis** 3ed. McGraw-Hill (1986)

[RFA] 방현수, **실해석 & 함수해석학** (Real and Functional Analysis). 교우사 (2002)

[RMA] C. C. Pugh, **Real Mathematical Analysis**. Springer (2001)

[RV] R. B. Ash, **Real Variables with Basic Metric Space Topology**. Dover (2009)

[ST] C. C. Pinter, **Set Theory**. Addison-Wesley (1971)

[TC] G. B. Thomas, **Thomas' Calculus** 11ed. Addison-Wesley (2006)

[TOP] J. Munkres, **Topology** 2ed. Prentice Hall (2000)

01 수학의 논리와 집합

- 집합의 정의 : [ST] Ch.1, [TOP] pp.3-15.
- 관계의 성질 : [ST] Ch.2, Ch.3.
- 무한집합의 성질 : [AOA] Ch.1, [FIA] pp.40-42.

02 실수계의 성질

- 순서체의 성질 : [FOA] Ch.1.
- 자연수 집합의 성질 : [FMA] pp.22-23, [ST] pp.124-131, pp.138-152.
- 제곱근의 존재성 : [PMA] p.10.
- 실수계의 구성 : [PMA] pp.-17-22, [RA] pp.31-39.
- 데데킨트 정리 : [AC] Ch.1.
- 실수 지수법칙 : [PMA] pp.17-22.
- 열린집합과 닫힌집합 : [TOP] Ch.2.

03 실수열의 극한

- 자연상수 : [AC] pp.55-56, [PMA] pp.63-65.
- 상극한과 하극한 : [AC] pp.84-88, [RV] pp.45-51.
- 콤팩트집합 : [TOP] Ch.3.

04 실함수의 극한

- 연속함수 : [FMA] pp.165-170, [FSV] pp.52-54, [PMA] p.94.
- 반연속함수 : [RV] pp.152-158.
- 균등연속 : [CA] pp.26-27, [FMA] pp.186-188, [PMA] p.91.
- 상극한과 하극한 : [AC] pp.84-88.
- 칸토어 집합 : [RV] pp.76-79.

05 실함수의 미분

- 도함수의 사잇값 성질 : [PMA] p.108.
- 테일러의 정리 : [AC] pp.120-124, [FMA] pp.226-227, [IA] pp.117-123, [PMA] p.110.
- 로피탈 법칙 : [FMA] pp.219-222, [IA] pp.117-123.
- 함수의 볼록성 : [IA] pp.175-181.

06 실함수의 리만 적분

- 리만 합 : [AC] pp.144-147.
- 합성함수의 리만 적분 : [PMA] p.127.
- 적분의 평균값 정리 : [AC] pp.161-163.
- 특이적분 : [IA] pp.163-168.
- 불연속 함수의 리만 적분 : [AC] pp.166-172.
- 헨스톡-쿠르츠바일 적분 : [MTI] pp.3-22.
- 가측함수 : [MTI] pp.89-100.

07 실수열의 무한급수

- 판정법 : [ACL] Ch.13.
- 절대수렴과 조건수렴 : [FMA] Ch.5.
- 급수의 재배열 : [FIA] pp.321-322, [IA] p.202.
- 무한급수의 코시 곱 : [FIA] pp.329-330.
- 교대급수 : [IA] pp.209-212.

08 실해석적 함수

- 거듭제곱급수 : [FIA] pp.360-369, pp.370-375 [IA] pp.237-246.
- 지수함수, 로그함수, 삼각함수 : [FFA] pp.323-337.
- 연속함수공간 : [FSV] pp.67-69, [PMA] pp.154-161, [RV] pp.130-133, pp.134-137.
- 해석적 함수 : [IA] pp.249-259.
- 균등수렴하지 않는 함수의 예 : [PMA] pp.145-146.
- 해석적이지 않은 함수의 예 : [FSV] pp.97-98.

A4

용어와 기호 찾아보기

그리스 문자표

대문자	소문자	이름	대문자	소문자	이름	대문자	소문자	이름
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Y	υ	upsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega