고차원 공간에서의 Poncelet-Steiner 정리

Poncelet-Steiner Theorem in Higher-Dimensional Euclidean Spaces

이슬비

designeralice@daum.net

수학 나라의 앨리스[1]

ABSTRACT

Georg Mohr and Lorenzo Mascheroni independently discovered that any geometric construction that can be performed by a compass and straightedge can be performed by a compass alone in 1672 and 1797 respectively. In 1822 Jean Victor Poncelet conjectured that whatever can be constructed by straightedge and compass together can be constructed by straightedge alone, provided that a single circle and its centre are given, and Jakob Steiner gave a proof for it in 1833. These two theorems are called Mohr-Mascheroni theorem and Poncelet-Steiner theorem respectively.

In 2001, Bong-Gyun Koh introduced the geometric construction in higher-dimensional Euclidean spaces and proved that Mohr-Mascheroni theorem still holds in the higher-dimensional spaces.

In this paper, we prove that Steiner's construction can be established in higher-dimensional Euclidean space and Poncelet-Steiner theorem also holds in the spaces.

Keywords : geometric construction, Poncelet-Steiner theorem, higher-dimensional spaces; 작도, Poncelet-Steiner 정리, 고차원 공간

1. 고차원 작도

작도란 평면에서 눈금없는 자와 컴퍼스를 사용하여 주어진 도형으로부터 시작하여 새로운 도형을 그리는 것이다. 이러한 개념을 자연스럽게 3차원 공간이나 그보다 높은 차원의 공간으로 확장할 수 있다.

직관적으로 3차원 작도란 3차원 공간에서 평면자와 구면컴퍼스를 사용하여 도형을 그리는 것이다. 3차원 공간에서의 평면자는 2차원 평면에서 직선을 그리는 자와 같은 역할을 하고, 3차원 공간에서

1) http://www.aliceinmathland.com

의 구면컴퍼스는 2차원 평면에서 원을 그리는 컴퍼스와 같은 역할을 한다. 3차원 공간에서 평행하지 않은 두 평면이 교차하는 부분은 직선이고 평면과 구면이 교차하는 부분은 점 또는 원이므로 3차원 공간에서 평면자와 구면컴퍼스만 사용해도 평면에서 사용하던 직선자와 컴퍼스는 주어진 셈이다.

같은 방법으로 더 높은 차원의 작도를 정의할 수 있다. n이 2 이상인 자연수일 때 n차원 작도란 n차원 공간에서 평면자와 구면컴퍼스를 사용하여 도형을 그리는 것이다. 여기서 평면자는 $n-1$차원 평면을 그리는 도구이고, 구면컴퍼스는 n차원 공간에 놓인 구면을 그리는 도구이다.

그러나 이와 같은 직관적 정의는 n차원 공간에서의 작도와 관련된 논의를 할 때 혼란을 야기할 수 있다. 그러므로 여기서는 n차원 공간에서의 도형과 차원에 관한 용어를 명확히 정의하고 이를 바탕으로 n차원 작도를 정의하기로 한다.

이 장에서 k와 n은 자연수를 나타내며 $n \geq 2$인 것으로 약속한다.

'n차원 공간'이란 n차원 유클리드 공간을 의미한다. n차원 공간을 E^n으로 나타낸다. 예를 들어 '2차원 공간'은 평면을 의미한다. 특별히 1차원 공간은 직선, 0차원 공간은 점을 나타내는 것으로 약속한다.

E^n의 두 부분집합 A, B에 대하여 A를 합동변환하여 B를 얻을 수 있다는 것을 $A \equiv B$로 나타낸다. 즉 $A \equiv B$라는 것은 A를 평행이동, 회전이동, 대칭이동하여 B와 완전히 일치하도록 할 수 있다는 것을 의미한다.

$1 \leq k < n$일 때 'k차원 E^n 평면'이란 E^n에서 $E^k \times \{0\}^{n-k}$을 합동변환하여 얻을 수 있는 집합을 의미한다. 예를 들어 '1차원 E^2 평면'은 평면에 놓인 직선을 의미한다. 또한 '2차원 E^3 평면'은 3차원 공간에 놓인 평면을 의미하며, '1차원 E^3 평면'은 3차원 공간에 놓인 직선을 의미한다. $k=n$인 경우 'n차원 E^n 평면'이란 E^n 자신을 의미한다. $k=0$인 경우 '0차원 E^n 평면'이란 E^n의 점을 의미한다. $k=1$인 경우 1차원 E^n 평면을 간단히 '직선'이라고 부른다.

$1 \leq k < n$일 때 E^n의 부분집합 ϕ가 'k차원 E^n 구면'이라는 것은 E^{k+1}의 점 O와 음이 아닌 실수 r가 존재하여 $\left\{X \in E^{k+1} \mid \overline{XO} = r\right\} \times \{0\}^{n-k-1} \equiv \phi$를 만족시키는 것을 의미한다. 이때 ϕ의 모든 점으로부터 같은 거리에 있는 점을 ϕ의 중심이라고 부르고, r를 ϕ의 반지름이라고 부른다. (엄밀히 말하면 '반지름의 길이'라고 불러야 하지만 여기서는 '반지름'을 '선분'과 '길이'의 두 가지 뜻을 모두 가진 것으로 생각한다.) 예를 들어 '1차원 E^2 구면'은 평면에 놓인 원을 의미한다. 또한 '2차원 E^3 구면'은 3차원 공간에 놓인 구면을 의미하며, '1차원 E^3 구면'은 3차원 공간에 놓인 원을 의미한다. 물론 3차원 공간에 놓인 원은 3차원 공간에 놓인 하나의 평면 위에 그려질 수 있는 원을 의미한다.

'k차원 E^n 평면'이나 'k차원 E^n 구면'이라는 용어에서 'k차원'은 평면과 구면의 다양체 차원을 나타내며 E^n은 평면이나 구면이 놓인 공간을 나타낸다. 만약 이들 도형이 놓인 공간이 자명하여 혼동될 염려가 없을 때에는 E^n을 생략하고 'k차원 평면' 또는 'k차원 구면'과 같이 나타내기로 한다.

'E^n 기본도형'이란 $n-1$차원 E^n 평면과 $n-1$차원 E^n 구면을 이른다. $n-1$차원 E^n 평면을 간단히 'E^n 기본평면'이라고 부르고, $n-1$차원 E^n 구면을 간단히 'E^n 기본구면'이라고 부른다.

‘E^n 도형’이란 유한 개의 E^n 기본도형과 교집합, 합집합으로 나타낼 수 있는 공 아닌 집합을 의미한다. 단 E^n의 모든 점은 각각 도형으로 간주한다. 예를 들어 3차원 공간에서 평면과 구면은 기본도형이다. 3차원 공간에서 직선은 기본도형은 아니지만 두 평면의 교집합으로 나타낼 수 있으므로 직선은 도형이다. 3차원 공간에서 원은 기본도형이 아니지만 구면과 평면의 교집합으로 나타낼 수 있으므로 원은 도형이다.

위와 같은 정의는 작도에 대하여 논의하기 위한 도형의 정의이다. 위 정의에 의하면 선분이나 삼각형은 도형이 아니다. 그러나 서로 다른 두 점은 그 두 점을 양끝점으로 하는 선분과 같은 것으로 생각할 수 있고, 일직선상에 있지 않은 세 점은 그 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 같은 것으로 생각할 수 있다. 그러므로 여기서 사용하는 도형의 정의가 통상적으로 사용하는 도형의 정의와 다를지라도 논의를 하는 데에는 문제가 없다.

α와 β가 E^n의 도형일 때 $\alpha \cap \beta$를 α와 β의 교차도형이라고 부른다. 단 $\alpha \cap \beta$가 유한집합 $\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_p\}$일 때에는 X_1, X_2, $\cdots$, X_p를 α와 β의 교점이라고 부른다. $\alpha \cap \beta$가 단원집합일 때에는 $\alpha \cap \beta$를 그 집합의 원소와 같은 것으로 간주하여 취급한다. 즉 한 점으로 이루어진 도형은 그 도형과 그 점을 같은 것으로 취급한다. 예를 들어 E^2에서 평행하지 않은 두 직선의 교차도형은 교점이다.

E^n의 도형 α가 ‘E^k급’이라는 것은 α가 적당한 k차원 E^n 평면의 부분이 되는 것이다. 예를 들어 3차원 공간에서 직선은 E^1급이고 E^2급이며 E^3급이다. 3차원 공간에서 평면은 E^2급이고 E^3급이지만 E^1급은 아니다. 3차원 공간에서 공간 자신은 E^3급 도형이다.

E^n에서 도형 α_1, α_2, $\cdots$, α_p가 ‘E^k급으로 놓여 있다’는 것은 이 도형들의 합집합이 E^k급이라는 것을 의미한다.

‘α와 β가 E^k급으로 교차한다’는 것은 α와 β의 교차도형이 E^k급이라는 것을 의미한다. 예를 들어 3차원 공간에서 평행하지 않은 두 평면 α, β는 직선 위에서 교차하고 직선은 1차원 평면이므로 α와 β는 E^1급으로 교차한다.

E^n에 도형이 놓인 위치의 ‘급’을 정의하는 것은 E^n에서의 작도를 논의할 때 더 낮은 차원의 공간에서의 작도의 성질을 활용하기 위한 것이다. 예를 들어 E^3에 있는 도형이 E^2급이라면 이 도형은 평면에 놓인 도형으로 생각할 수 있으므로 이 도형으로부터 시작한 작도는 평면작도의 성질을 활용할 수 있다.

$2 \leq p \leq n+1$이고 n차원 공간의 점 X_1, X_2, $\cdots$, X_p가 있다고 하자. 만약 $\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_p\}$가 E^{p-1}급이지만 E^{p-2}급은 아니면 ‘X_1, X_2, $\cdots$, X_p는 E^{p-1}급 독립이다’라고 말한다. 즉 X_1, X_2, $\cdots$, X_p가 E^{p-1}급 독립이라는 것은 이들 점을 모두 지나는 $p-1$차원 E^n 평면이 유일하다는 것을 의미한다. 예를 들어 3차원 공간에서 일직선상에 있지 않은 세 점은 E^2급 독립이며, 이들 세 점을 모두 지나는 2차원 평면은 유일하다.

정의 1. '**n차원 작도**'란 E^n에 도형이 하나 이상 주어졌을 때 주어진 도형으로부터 시작하여 기본평면과 기본구면을 사용하여 다음 규칙에 따라 새로운 도형을 그리는 것을 의미한다.

GC1. E^n에 E^{n-1}급 독립인 점 X_1, X_2, $\cdots$, X_n이 있으면 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 모두 지나는 기본평면을 작도할 수 있다.

GC2. E^n에 점 O가 있고 서로 다른 점 A, B가 있으면, A와 B의 거리를 반지름으로 하고 O를 중심으로 하는 기본구면을 작도할 수 있다.

GC3. E^n에 도형 α가 있으면 α에 속하는 점을 작도할 수 있다. 만약 $\alpha \neq E^n$이면 $E^n \setminus \alpha$에 속하는 점을 작도할 수 있다.

GC4. E^n에 도형 α, β가 있으면 $\alpha \cup \beta$를 작도할 수 있다. 만약 $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$이면 $\alpha \cap \beta$를 작도할 수 있다.

GC5. E^n에 도형들이 E^p급으로 놓여 있으며 $2 \leq p < n$이면 이들 도형들을 감싸는 p차원 E^n 평면 위에서 p차원 작도의 규칙에 따라 작도할 수 있다.

E^n에서 두 기본평면의 교차도형은 E^{n-1}급 평면이다. 같은 방법으로 E^n에서 기본평면을 여러 개 교차하여 더 낮은 차원의 평면을 만들 수 있다. 그러므로 E^n에서 기본평면을 사용한다는 것은 그보다 더 낮은 차원의 평면을 사용하는 것을 함의한다. 예를 들어 3차원 공간에서 서로 평행하지 않은 두 평면의 교차도형은 직선이므로, 3차원 공간에서 평면을 사용한다는 것은 평면과 직선을 사용한다는 것이 된다.

마찬가지로 E^n에서 기본평면과 기본구면의 교차도형은 E^{n-1}급 구면이다. 하나의 기본구면과 여러 개의 기본평면을 교차하여 더 낮은 차원의 구면을 만들 수 있다. 그러므로 E^n에서 기본구면을 사용한다는 것은 그보다 더 낮은 차원의 구면을 사용하는 것을 함의한다. 예를 들어 3차원 공간에서 구면과 평면의 교차도형은 점 또는 원이므로, 3차원 공간에서 구면을 사용한다는 것은 구면과 원을 사용한다는 것이 된다.

고차원 작도에 관한 초등적인 정리들은 [1]을 참고하기 바란다.

2. 3차원 공간에서의 Poncelet-Steiner 정리

평면작도에서 자와 컴퍼스 중 하나만을 사용하는 작도를 '결손작도'라고 부른다. 결손작도에 관하여는 다음과 같은 놀라운 두 가지 정리가 있다.

1797년 Lorenzo Mascheroni는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여 할 수 있는 모든 작도는 컴퍼스만 사용하여 할 수 있음을 증명하였다. 후에 거의 비슷한 정리를 1672년 Georg Mohr가 했음이 밝혀졌으나, Mascheroni의 연구는 Mohr의 것과 독립적인 것으로 인정받았다. 따라서 이 정리는 오늘날 Mohr-Mascheroni 정리로 불린다.

한편, 프랑스의 수학자 Jean−Victor Poncelet는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여 할 수 있는 모든 작도는, 중심을 알고 있는 하나의 원이 주어지기만 하면 자만 사용하여 할 수 있을 것이라고 예상하였고, 1833년 스위스의 수학자 Jakob Steiner가 이를 증명하였다. 이 정리를 Poncelet−Steiner 정리라고 부른다.

Mohr−Mascheroni 정리에서는 컴퍼스만 사용하며 자를 사용하지 않기 때문에 선분이나 직선을 '그을' 수 없다. 따라서 서로 다른 두 개의 점이 주어지면 그것으로 직선이 주어진 것으로 본다. 마찬가지로 Poncelet−Steiner 정리에서는 자만 사용하기 때문에 실제 원을 그릴 수 없다. 따라서 삼각형의 내접원이나 외접원과 같은 것을 작도할 수는 없다. 대신 한 점 O와 한 선분 AB가 주어지면 점 O를 중심으로 하고 선분 AB의 길이를 반지름의 길이로 하는 원이 그려진 것으로 생각한다.

자연스럽게 결손작도와 관련된 이와 같은 명제가 더 높은 차원에서도 성립하는지에 대한 의문이 생긴다. 2001년 고봉균은 n이 2 이상인 자연수일 때, n차원 유클리드 공간에서 Mohr−Mascheroni 정리가 성립함을 밝혔다.

이 장에서는 3차원 공간에서 Poncelet−Steiner 정리가 성립함을 밝히자. 편의상 'Poncelet−Steiner 정리'를 PS로 나타내기로 한다.

2.1 평면에서의 Poncelet−Steiner 정리

Steiner는 PS를 증명하기 위해 평면에서 다음과 같은 Steiner 작도가 가능함을 보였다.

정리 2. CSC ; Classical Steiner's Construction
평면에서 중심을 알고 있는 하나의 원이 주어져 있으면 눈금없는 자만 사용하여 다음 다섯 가지 작도가 가능하다.

S1. 주어진 직선 AB와 점 P에 대하여, 점 P를 지나면서 직선 AB와 평행한 직선의 작도
S2. 주어진 직선 AB와 점 P에 대하여, 점 P를 지나면서 직선 AB에 수직인 직선의 작도
S3. 주어진 선분 XY와 직선 AB에 대하여, AB 위에 선분 XY와 같은 길이를 갖는 선분의 작도
S4. 주어진 세 길이 a, b, c에 대하여 $a : b = c : d$를 만족시키는 길이 d를 갖는 선분의 작도
S5. 주어진 두 길이 x, y에 대하여, 길이가 $\sqrt{xy}$ 인 선분의 작도

증명. [2]를 참고하라. ■

다음 정리에서와 같이 평면에서의 PS는 CSC를 이용하여 증명된다.

따름정리 3. PS^2 ; Poncelet−Steiner Theorem in 2 Dimensional Space
눈금없는 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여 할 수 있는 모든 작도는, 중심을 알고 있는 하나의 원이 주어지기만 하면 자만 사용하여 할 수 있다.

증명. 평면에서 자와 컴퍼스를 사용하여 얻어지는 교점은 다음 세 가지 경우 중 하나이다.

- 직선과 직선의 교점
- 직선과 원의 교점
- 원과 원의 교점

자를 사용하여 직선과 직선의 교점을 작도할 수 있음은 자명하므로 여기서는 나머지 두 가지 경우의 작도가 가능함을 보이면 충분하다.

먼저 원과 직선의 교점이 작도 가능함을 보이자. 반지름의 길이가 r이고 중심이 X인 원 C와 직선 AB가 주어졌다고 하자. 물론 원이 직접 주어진 것은 아니고 원의 중심과 반지름의 길이만 주어진 것이다. CSC의 S2에 의하여 점 X에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 T를 작도할 수 있다. 선분 XT의 길이를 u라고 하자. CSC의 S3, S4, S5에 의하여 직선 AB 위의 점 M, N을 작도하되 선분 TM과 선분 TN의 길이가 모두 $\sqrt{r^2-u^2}=\sqrt{(r+u)(r-u)}$가 되도록 할 수 있다. 그러면 두 점 M, N은 원과 직선의 교점이 된다.

다음으로 두 원의 교점이 작도 가능함을 보이자. 중심이 X이고 반지름의 길이가 r인 원과 중심이 Y이고 반지름의 길이가 m인 원이 주어졌다고 하자. 일반성을 잃지 않고 $m \geq r$라고 하자. 선분 XY의 길이를 t라고 하자. CSC의 S3, S4에 의하여 길이가

$$s = \frac{r^2+t^2-m^2}{2t}$$

인 선분을 작도할 수 있다. 만약 $t > m$이면 선분 XY 위에 길이가 s인 선분 XZ를 작도하되, Z가 선분 XY 위에 놓이도록 한다. 만약 $t < m$이면 직선 XY 위에 길이가 s인 선분 XZ를 작도하되 Z가 선분 XY 위에 놓이지 않도록 한다. 다음으로 점 Z를 지나고 직선 XY에 수직인 직선 l을 작도한다. 그러면 직선 l과 원 X의 교점은 두 원 X, Y의 교점이 된다. ■

2.2 수정된 Steiner 작도

CSC를 수정하여 3차원 공간에 놓인 2차원 평면에 적용하면 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 4. MSC ; Modified Steiner's Construction

3차원 공간에 하나의 2차원 평면 α가 주어져 있고, 중심을 알고 있는 하나의 2차원 구면 ϕ가 주어져 있으면, 평면만을 사용하여 α 위에서 Steiner 작도가 가능하다.

증명. 구면 ϕ의 중심을 Z라고 하자. Z가 α에 속하는 경우는 CSC에 의하여 자명하게 성립하므로 여기서는 Z가 α에 속하지 않는다고 가정하자.

이 증명이 끝날 때까지 별다른 언급이 없는 한 '평면'은 '2차원 E^3 평면'을 의미하며 '구면'은 '2차원 E^3 구면'을 의미한다.

1단계. 먼저 α와 평행하고 Z를 지나는 평면 β가 작도 가능함을 보이자.

(1) 평면 α 위에 임의의 점 X를 잡는다. 그리고 α 위에서 X를 지나는 서로 다른 직선 p, q를 그린다.

(2) 직선 p와 점 Z를 지나는 평면 γ를 작도한다. (직선 p 위에 임의의 두 점을 잡은 뒤, 그 두 점과 점 Z를 지나는 평면을 작도하면 된다.) 그러면 γ와 ϕ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 CSC의 S1에 의하여 γ 위에서 점 Z를 지나고 직선 p와 평행한 직선 l_p를 작도할 수 있다. 이때 직선 l_p는 평면 α와 평행한 직선이 된다.

(3) 같은 방법으로 점 Z를 지나고 직선 q와 평행한 직선 l_q를 작도한다. 직선 l_q도 평면 α와 평행한 직선이 된다.

(4) 직선 l_p 위에서 Z가 아닌 점 하나를 택하여 P라고 하고, 직선 l_q에서 Z가 아닌 점 하나를 택하여 Q라고 하자. 그리고 세 점 P, Q, Z를 지나는 평면 β를 작도한다. 그러면 β는 Z를 지나고 α와 평행한 평면이 된다.

이 증명이 끝날 때까지 β는 Z를 지나고 α와 평행한 평면을 나타내는 것으로 약속한다. α, ϕ, Z, β를 제외한 다른 문자는 매 단계마다 새로운 개체를 나타내는 것으로 간주한다.

2단계. 평면 β 위에서 Z를 지나고 β에 수직인 공간직선 v가 작도 가능함을 보이자.

(1) CSC의 S2에 의하여 β 위에서 Z를 지나고 서로 수직인 두 직선 m, n을 작도할 수 있다.

(2) 직선 m을 지나지만 직선 n과는 평행하지 않은 평면 γ를 작도한다. γ와 ϕ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 CSC의 S2에 의하여 γ 위에서 Z를 지나면서 m에 수직인 직선 l을 작도할 수 있다.

(3) 직선 l과 직선 n은 서로 일치하지 않으면서 점 Z에서 만나므로, 두 직선을 모두 지나는 평면 δ_m을 작도할 수 있다. l과 n이 모두 m과 수직이므로 δ_m도 m과 수직인 평면이 된다.

(4) 같은 방법으로 점 Z를 지나면서 직선 n과 수직인 평면 δ_n을 작도할 수 있다.

(5) δ_m과 δ_n의 교선을 v라고 하자. 그러면 v는 Z를 지나면서 두 직선 m과 n에 모두 수직이므로 β에도 수직이다.

이 정리의 증명이 끝날 때까지 v는 Z를 지나고 β에 수직인 직선을 나타내는 것으로 약속한다.

3단계. 평면 β 위의 임의의 점 P에 대하여, P를 지나고 β에 수직인 직선 l이 작도 가능함을 보이자.

(1) 점 P를 지나고 직선 v를 지나는 평면 γ를 작도한다.

(2) γ와 ϕ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 CSC의 S1에 의하여 γ 위에서 P를 지나고 직선 v와 평행한 직선 l을 작도할 수 있다.

3단계에서 작도한 직선 l은 평면 β 위의 점을 평면 α 위로 사영시키는 데에 사용된다.

4단계. 평면 α 위의 임의의 점 Q에 대하여, Q를 지나고 α에 수직인 공간직선 l이 작도 가능함을 보이자.

(1) 점 Q를 지나고 직선 v를 지나는 평면 γ를 작도한다.

(2) γ와 ϕ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 CSC의 S1에 의하여 γ 위에서 Q를 지나고 직선 v와 평행한 직선 l을 작도할 수 있다.

4단계에서 작도한 직선 l은 평면 α 위의 점을 평면 β 위로 사영시키는 데에 사용된다.

5단계. 평면 α 위에서 Steiner의 작도가 가능함을 보이자.

(1) 평면 α 위에 있는 임의의 점 Q는 Q를 지나고 α에 수직인 직선을 사용하여 평면 β 위로 사영시킬 수 있다. 마찬가지로 평면 α 위에 있는 임의의 직선은 직선 위의 두 점을 사영시키는 과정을 통해 평면 β 위로 사영시킬 수 있다.

(2) 평면 β와 구면 γ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 β는 중심이 주어진 원을 가진 평면이다. 그러므로 CSC에 의하여 평면 β 위에서 Steiner의 작도가 가능하다.

(3) 평면 β 위에서 Steiner의 작도를 통해 얻은 점 P는 P를 지나고 β에 수직인 직선을 사용하여 평면 α 위로 사영시킬 수 있다. 이 점은 평면 α 위에서 Steiner의 작도를 통해 얻은 점이 된다. ■

따름정리 5. MPS ; Modified Poncelet-Steiner Theorem

3차원 공간에 하나의 2차원 평면 α가 주어져 있고, 중심을 알고 있는 하나의 2차원 구면 ϕ가 주어져 있으면, 평면만을 사용하였을 때 α 위에서 PS^2가 성립한다.

증명. MSC에 의하여 α 위에서 Steiner 작도를 할 수 있으므로 CSC의 따름정리와 마찬가지로 α 위에서 PS와 동일한 결과를 얻는다. ■

다른 방법의 증명. MSC의 증명 과정에서 평면 α 위의 임의의 점은 평면 β 위로 사영 가능하고 β 위의 임의의 점은 α 위로 사영 가능하므로, α 위의 점과 직선을 β 위로 사영시킨 뒤 PS^2를 이용하여 원하는 점을 β 위에서 작도한 후 다시 α 위로 사영시키면 된다. ■

위 따름정리는 3차원 공간에 속한 '평면' 위에서 PS가 성립한다는 것이므로, PS를 3차원으로 확장한 것으로 볼 수 없다.

2.3 3차원 공간에서의 Poncelet-Steiner 정리

이제 3차원 공간에서 PS가 성립함을 증명하자. 이 절이 끝날 때까지 별다른 언급이 없는 한 '평면'은 '2차원 E^3 평면'을 의미하며 '구면'은 '2차원 E^3 구면'을 의미한다.

정리 6. PS^3 ; Poncelet-Steiner's Theorem in 3-Dimensional Space

3차원 공간에서 평면과 구면을 유한 번 사용하여 할 수 있는 모든 작도는 중심을 알고 있는 하나의 구면이 주어지기만 하면 평면만 사용하여 할 수 있다.

증명. 3차원에서 평면과 구면을 사용하여 작도할 수 있는 점은 세 기본도형의 교집합의 점으로 나타난다. 즉 3차원에서 평면과 구면을 사용하여 작도할 수 있는 점은 다음 네 가지 중 하나이다.

P1. 세 평면의 교점
P2. 세 평면과 한 구면의 교점
P3. 한 평면과 두 구면의 교점
P4. 세 구면의 교점

따라서 주어진 하나의 구면과 평면만을 이용하여 위 네 가지 경우의 점을 모두 작도할 수 있음을 증명하면 된다. P1을 작도할 수 있음은 자명하므로 P2, P3, P4를 작도할 수 있다는 것만 증명한다.

이 증명에서 '구면 α가 주어졌다'라는 표현은 구면 α가 실제로 주어진 것이 아니라 이 구면의 중심과 반지름이 주어진 것이다. 단, 이 구면이 정리의 조건에 언급된 '중심을 알고 있는 하나의 구면이 주어지기만 하면'에 해당하는 구면인 경우는 당연히 제외한다.

1단계. 두 구면의 교선 작도

두 구면의 교선은 3차원 공간에 놓인 원 또는 점이다. 두 구면의 교선이 원인 경우 이 원의 중심과 반지름, 그리고 이 원이 놓인 평면을 작도할 수 있으면 된다.

두 구면 ϕ, ρ가 주어졌다고 하자. ϕ의 중심을 P, 반지름을 r_1이라 하고, ρ의 중심을 Q, 반지름을 r_2라고 하자.

(1) 두 점 P, Q를 모두 지나는 서로 다른 임의의 두 평면 π_1, π_2를 작도한다.
(2) MPS에 의하여 평면 π_1 위에서 중심이고 P이고 반지름이 r_1인 원과 중심이 Q이고 반지름이 r_2인 원의 교점을 작도할 수 있다. 만약 이 교점이 하나라면 두 구면 ϕ, ρ는 외접하거나 내접하는 것이므로 그 점이 곧 구하는 점이다. 만약 이 교점이 두 개라면 그 점의 이름을 A_1, B_1이라고 하자.
(3) MPS에 의하여 평면 π_1 위에서 선분 A_1B_1의 중점 C를 작도할 수 있다.
(4) MPS에 의하여 평면 π_2 위에서 중심이고 P이고 반지름이 r_1인 원과 중심이 Q이고 반지름이 r_2인 원의 교점을 작도할 수 있다. 만약 이 교점이 하나라면 두 구면 ϕ, ρ는 외접하거나 내접하는 것이므로 그 점이 곧 구하는 점이다. 만약 이 교점이 두 개라면 그 점의 이름을 A_2, B_2라고 하자.
(5) 두 직선 A_1B_1, A_2B_2는 C에서 교차하므로 두 직선을 모두 지나는 평면 β를 작도할 수 있다. 그러면 ϕ와 ρ의 교선은 중심이 C이고 반지름이 선분 CA_1이며 β에 놓인 원이다.

2단계. 한 평면과 한 구면의 교선 작도

평면 α와 구면 ϕ가 주어졌다고 하자. ϕ의 중심을 P, 반지름을 r라고 하자.

(1) MSC 증명 과정의 4단계에 의하여 P를 지나고 α에 수직인 직선 l을 작도할 수 있다. α와 l의 교점을 A라고 하자.

(2) MSC의 S3에 의하여 선분 QA의 길이와 선분 AP의 길이가 같도록 점 Q를 l 위에 작도할 수 있다. 단 $Q \neq A$이다.

(3) 중심이 Q이고 반지름이 r인 구면을 ρ라고 하자. 그리고 1단계의 방법을 이용하여 ϕ와 ρ의 교선 또는 교점을 구한다. 그러면 ϕ와 ρ의 교선은 α와 ϕ의 교선과 같다. 만약 ϕ와 ρ가 한 점에서 만난다면 α와 ϕ도 한 점에서 만난다.

3단계. 두 평면과 한 구면의 교점 작도

서로 다른 두 평면 α, β와 구면 ϕ가 주어졌다고 하자. ϕ의 중심을 P, 반지름을 r라고 하자.

(1) α와 β의 교선을 l을 작도한다.

(2) 직선 l과 점 P를 모두 지나는 평면 γ를 작도한다.

(3) MPS에 의하여 평면 γ 위에서 직선 l과 중심이 P이고 반지름이 r인 원의 교점을 작도할 수 있다. 이 교점이 α, β, ϕ의 교점이다.

4단계. 한 평면과 두 구면의 교점 작도

평면 α와 서로 다른 두 구면 ϕ, ρ가 주어졌다고 하자.

(1) 2단계에 의하여 α와 ϕ의 교선을 작도할 수 있다. 이 원을 C_ϕ라고 하자.

(2) 2단계에 의하여 α와 ρ의 교선을 작도할 수 있다. 이 원을 C_ρ라고 하자.

(3) C_ϕ와 C_ρ는 모두 α에 놓인 원이므로 MPS에 의하여 α 위에서 C_ϕ와 C_ρ이 교점을 작도할 수 있다. 이 교점이 α, ϕ, ρ의 교점이다.

5단계. 세 구면의 교점 작도

세 구면 ϕ, ρ, τ가 주어졌다고 하자.

(1) 1단계에 의하여 ϕ와 ρ의 교선(원) C_1을 작도할 수 있다. 특히 C_1 놓인 평면 α를 작도할 수 있다.

(2) 2단계에 의하여 α와 τ의 교선(원) C_2를 작도할 수 있다.

(3) MPS에 의하여 α 위에서 두 원 C_1과 C_2의 교점을 작도할 수 있다. 이 교점이 세 구면 ϕ, ρ, τ의 교점이다. ■

3. 고차원 공간에서의 Poncelet−Steiner 정리

이 장에서는 3차원 공간에서의 Poncelet−Steiner 정리를 더욱 확장하여 n이 4 이상인 임의의 자연수일 때에도 n차원 공간에서 Poncelet−Steienr 정리가 성립함을 보이자.

3.1 n차원 공간에서의 수정된 Steiner 작도

2차원 공간과 3차원 공간에서와 마찬가지로 먼저 n차원 공간에 놓인 평면에서 Steiner 작도가 가능함을 보이자.

정리 7. MSC^n ; Modified Steiner's Construction in n−Dimensional Spaces

E^n에 2차원 E^n 평면 α가 주어져 있고, 중심을 알고 있는 하나의 E^n 기본구면 ϕ가 주어져 있으면 E^n 기본평면만을 사용하여 α 위에서 Steiner의 작도가 가능하다.

증명. $n=2$인 경우와 $n=3$인 경우는 이미 증명하였으므로 여기서는 $n \geq 4$인 경우를 증명하자.

수학적 귀납법을 사용하기 위하여 $2 \leq k < n$인 임의의 자연수 k에 대하여 MSC^{k}가 성립한다고 가정하자.

구면 ϕ의 중심을 Z라고 하자. Z가 α에 속하는 경우에는 CSC에 의하여 자명하게 정리의 결론을 얻으므로 Z가 α에 속하지 않는다고 가정하자.

1단계. 먼저 α와 평행하고 Z를 지나는 2차원 평면 β가 작도 가능함을 보이자.

(1) 평면 α 위에 임의의 점 X를 잡는다. 그리고 α 위에서 X를 지나는 서로 다른 직선 p, q를 그린다.

(2) 직선 p와 점 Z를 지나는 2차원 평면 γ를 작도한다. (직선 p 위에 임의의 두 점을 잡은 뒤, 그 두 점과 점 Z를 지나는 2차원 평면을 작도하면 된다.) 그러면 γ와 ϕ의 교선은 중심이 Z인 원이므로 CSC의 S1에 의하여 γ 위에서 점 Z를 지나고 직선 p와 평행한 직선 l_p를 작도할 수 있다. 이때 직선 l_p는 평면 α와 평행한 직선이 된다.

(3) 같은 방법으로 점 Z를 지나고 직선 q와 평행한 직선 l_q를 작도한다. 직선 l_q도 평면 α와 평행한 직선이 된다.

(4) 직선 l_p 위에서 Z가 아닌 점 하나를 택하여 P라고 하고, 직선 l_q에서 Z가 아닌 점 하나를 택하여 Q라고 하자. 그리고 세 점 P, Q, Z를 지나는 2차원 E^n 평면 β를 작도한다. 그러면 β는 Z를 지나고 α와 평행한 2차원 평면이 된다.

이 정리의 증명이 끝날 때까지 β는 Z를 지나고 α와 평행한 평면을 나타내는 것으로 약속한다. α, ϕ, Z, β를 제외한 다른 문자는 매 단계마다 새로운 개체를 나타내는 것으로 간주한다.

2단계. 평면 β 위에서 Z를 지나고 β에 수직인 $n-2$차원 E^n 평면 v가 작도 가능함을 보이자.

(1) 평면 β 위에 Z에서 직교하는 두 직선 l_1과 l_2를 작도한다.

(2) l_1과 l_2를 모두 지나는 서로 다른 $n-2$개의 3차원 평면 δ_1, δ_2, $\cdots$, δ_{n-2}를 다음과 같은 순서로 작도한다.

$\delta_1 \coloneqq$ (l_1과 l_2를 모두 포함하는 3차원 평면)

$\gamma_1 \coloneqq$ (δ_1을 포함하는 3차원 평면) $= \delta_1$

$\delta_2 \coloneqq$ (γ 밖의 한 점과 l_1, l_2를 포함하는 3차원 평면)

$\gamma_2 \coloneqq$ (γ_1과 δ_2를 포함하는 4차원 평면)

$\delta_3 \coloneqq$ (γ_2 밖의 한 점과 l_1, l_2를 포함하는 3차원 평면)

$\gamma_3 \coloneqq$ (γ_2와 δ_3을 포함하는 5차원 평면)

$\vdots$

$\gamma_{n-3} \coloneqq$ (γ_{n-4}와 δ_{n-3}을 포함하는 $n-1$차원 평면)

$\delta_{n-2} \coloneqq$ (γ_{n-3} 밖의 한 점과 l_1, l_2를 포함하는 3차원 평면)

(3) $1 \le i \le n-2$일 때 각 3차원 평면 δ_i에서 Z를 지나고 l_1과 l_2에 수직인 직선 m_i를 작도한다. 이것은 MSC^3에 의하여 가능하다.

(4) 각 m_i 위에서 Z가 아닌 점 Z_i를 잡는다. 그러면 Z, Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_{n-2}는 E^{n-2}급 독립이다.

(5) Z, Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_{n-2}를 모두 지나는 $n-2$차원 E^n 평면 v를 작도한다. 그러면 v는 Z를 지나고 β에 수직이다.

이 정리의 증명이 끝날 때까지 v는 Z를 지나고 β에 수직인 직선을 나타내는 것으로 약속한다.

3단계. 평면 β 위의 임의의 점 P에 대하여, P를 지나고 β에 수직인 $n-2$차원 E^n 평면 w가 작도 가능함을 보이자.

(1) 2단계의 각 Z_i에 대하여 세 점 Z, Z_i, P를 지나는 2차원 E^n 평면 ϵ_i를 작도한다.

(2) 각 ϵ_i 위에서 직선 m_i와 평행하고 P를 지나는 직선 r_i를 작도한다.

(3) 각 r_i에서 P가 아닌 점 P_i를 잡는다. 그러면 P, P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-2}는 E^{n-2}급 독립이다.

(4) P, P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-2}를 모두 지나는 $n-2$차원 E^n 평면 w를 작도한다. 그러면 w는 P를 지나고 β에 수직이다.

4단계. 평면 α 위의 임의의 점 Q에 대하여, Q를 지나고 α에 수직인 $n-2$차원 E^n 평면 w가 작도 가능함을 보이자. 이것은 3단계의 각 과정에서 P를 Q로 바꾸기만 하면 된다.

5단계. 평면 α 위에서 Steiner의 작도가 가능함을 보이자.

(1) 평면 α 위에 있는 임의의 점 Q는 Q를 지나고 α에 수직인 $n-2$차원 E^n 평면을 사용하여 평면 β 위로 사영시킬 수 있다. 마찬가지로 평면 α 위에 있는 임의의 직선은 직선 위의 두 점을 사영시키는 과정을 통해 평면 β 위로 사영시킬 수 있다.

(2) 평면 β와 구면 ϕ의 교차도형은 중심이 Z인 원이므로 β는 중심이 주어진 원을 가진 2차원 평면이다. 그러므로 CSC에 의하여 평면 β 위에서 Steiner의 작도가 가능하다.

(3) 평면 β 위에서 Steiner의 작도를 통해 얻은 점 P는 P를 지나고 β에 수직인 $n-2$차원 E^n 평면을 사용하여 평면 α 위로 사영시킬 수 있다. 이 점은 평면 α 위에서 Steiner의 작도를 통해 얻은 점이 된다.

그러므로 수학적 귀납법에 의하여 $n \geq 2$인 임의의 자연수 n에 대하여 MSC^{n}이 성립한다. ■

따름정리 8. MPS^n ; Modified Poncelet−Steiner Theorem in n−Dimensional Spaces

E^n에 하나의 2차원 E^n 평면 α가 주어져 있고, 중심을 알고 있는 하나의 기본구면 ϕ가 주어져 있으면, 기본평면만을 사용하여 α 위에서 PS가 성립한다.

증명. MSC^{n}에 의하여 α 위에서 Steiner의 작도를 할 수 있으므로 CSC에서와 마찬가지로 α 위에서 PS와 동일한 결과를 얻는다. ■

다른 방법의 증명. MSC^{n}의 증명 과정에서 평면 α 위의 임의의 점은 평면 β 위로 사영 가능하고 β 위의 임의의 점은 α 위로 사영 가능하므로, α 위의 점과 직선을 β 위로 사영시킨 뒤 PS를 이용하여 원하는 점을 β 위에서 작도한 후 다시 α 위로 사영시키면 된다. ■

위 따름정리는 E^n에 포함된 '2차원 평면' 위에서 PS가 성립한다는 것이므로, PS를 n차원으로 확장한 것으로 볼 수 없다.

3.2 n차원 공간에서의 Poncelet−Steiner 정리

이제 E^n에서 PS가 성립함을 증명하자.

정리 9. PS^n ; Poncelet−Steiner Theorem in n−Dimensional Spaces

E^n에서 기본평면과 기본구면을 유한 번 사용하여 할 수 있는 모든 작도는, 중심을 알고 있는 하나의 기본구면이 주어지기만 하면 기본평면만 사용하여 할 수 있다.

증명. E^n에서 기본평면과 기본구면을 사용하여 작도할 수 있는 점은 n개의 기본도형의 교집합의 점으로 나타난다. 즉 E^n에서 기본평면과 기본구면을 사용하여 작도할 수 있는 점은 다음 세 가지 중 하나이다.

- n개의 기본평면의 교차
- k개의 기본평면과 $n-k$개의 기본구면의 교차 (단, $1 \le k < n$)
- n개의 기본구면의 교차

따라서 주어진 하나의 기본구면과 기본평면만을 사용하여 위 세 가지 경우의 점을 모두 작도할 수 있음을 보이면 된다. 첫 번째 경우는 자명하므로 두 번째 경우와 세 번째 경우만 증명한다.

이 증명에서 '구면 α가 주어졌다'라는 표현은 구면 α가 실제로 주어진 것이 아니라 이 구면의 중심과 반지름이 주어진 것이다. 단, 이 구면이 정리의 조건에 언급된 '중심을 알고 있는 하나의 기본구면이 주어지기만 하면'에 해당하는 구면인 경우는 당연히 제외한다.

$n=2$인 경우와 $n=3$인 경우는 이미 증명하였으므로 여기서는 $n \ge 4$인 경우를 증명한다.

수학적 귀납법을 이용하기 위하여 $2 \le k < n$인 임의의 자연수 k에 대하여 PS^k가 성립한다고 가정하자.

1단계. 주어진 한 점을 지나고 주어진 하나의 기본평면에 수직인 직선 작도

α가 E^n 기본평면이고 P가 E^n의 점이라고 하자. 그리고 P가 α 위에 있지 않다고 하자.

(1) α 위에 임의의 점을 잡아서 Q라고 하자. α는 $n-1$차원 평면이므로 PS^{n-1}에 의하여 α 위에서 Q를 지나고 서로 직교하는 $n-1$개의 직선 l_1, l_2, $\cdots$, l_{n-1}을 작도할 수 있다.

(2) l_2, l_3, $\cdots$, l_{n-1}을 포함하지만 l_1은 포함하지 않는 $n-1$차원 E^n 평면 β를 작도한다. β는 $n-1$차원 평면이므로 다시 PS^{n-1}에 의하여 β 위에서 Q를 지나고 l_2, l_3, $\cdots$, l_{n-1}에 모두 수직인 직선 l_n을 작도할 수 있다.

(3) l_1과 l_n은 Q에서 만나므로 l_1과 l_n을 모두 지나는 2차원 E^n 평면 γ를 작도할 수 있다. PS^2에 의하여 γ 위에서 Q를 지나고 l_1에 수직인 직선 l을 작도할 수 있다. 이때 l은 l_1, l_2, $\cdots$, l_{n-1} 모두에 수직이고 Q를 지나므로 l은 α에 수직이다.

(4) 이제 직선 l과 점 P를 지나는 2차원 E^n 평면 δ를 작도한다. PS^2에 의하여 δ 위에서 P를 지나고 l과 평행한 직선 m을 작도할 수 있다. 이때 m은 P를 지나고 α에 수직인 직선이다.

(5) P가 α 위에 있는 경우에는 $P=Q$로 두면 된다.

2단계. 두 기본구면의 교차도형 작도

두 $n-1$차원 E^n 구면 ϕ_1, ϕ_2가 주어졌다고 하자. ϕ_1의 중심을 P, 반지름을 r_1이라고 하고, ϕ_2의 중심을 Q, 반지름을 r_2라고 하자.

(1) 직선 PQ를 지나는 $n-1$개의 $n-1$차원 E^n 평면 π_1, π_2, $\cdots$, π_{n-1}을 다음과 같이 작도한다.

X_1 ≔ (직선 PQ 위에 있지 않은 점),

X_2 ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_1을 지나는 2차원 평면 밖의 점),

X_3 ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_1, X_2를 지나는 3차원 평면 밖의 점),

X_4 ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_1, X_2, X_3을 지나는 4차원 평면 밖의 점),

⋮

X_{n-1} ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_1, X_2, $\cdots$, X_{n-2}를 지나는 $n-1$차원 평면 밖의 점),

π_1 ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_1을 지나지만 점 X_2는 지나지 않는 $n-1$차원 평면),

π_2 ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_2를 지나지만 점 X_3은 지나지 않는 $n-1$차원 평면),

⋮

π_{n-2} ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_{n-2}를 지나지만 점 X_{n-1}은 지나지 않는 $n-1$차원 평면),

π_{n-1} ≔ (직선 PQ를 포함하고 점 X_{n-1}을 지나지만 점 X_1은 지나지 않는 $n-1$차원 평면).

(2) PS^{n-1}에 의하여 각 π_i 위에서 중심이 P이고 반지름이 r_1인 $n-2$차원 E^{n-1} 구면과 중심이 Q이고 반지름이 r_2인 $n-2$차원 E^{n-1} 구면의 교차도형을 작도할 수 있으며, 그 교차도형은 $n-3$차원 구면이 된다. 그 교차구면의 중심을 C, 반지름을 r라고 하자. 세 점 P, Q, C를 지나는 2차원 E^n 평면 위에서 C를 지나고 직선 PQ에 수직인 직선 l_i을 작도한다.

(3) 이때 l_1, l_2, $\cdots$, l_{n-1}을 모두 지나는 $n-1$차원 E^n 평면 σ를 작도할 수 있다. 그러면 평면 σ 위에 놓여 있고 점 C를 중심으로 하며 반지름이 r인 $n-2$차원 구면은 ϕ_1과 ϕ_2의 교차도형이다.

3단계. 한 기본평면과 한 기본구면의 교차도형 작도

α가 E^n 기본평면이고 ϕ가 E^n 기본구면이라고 하자. ϕ의 중심을 P, 반지름을 r라고 하자.

(1) 1단계에 의하여 P를 지나고 α에 수직인 직선 l을 작도할 수 있다. α와 l의 교점을 O라고 하자. 직선은 E^2급이므로 PS^2에 의하여 직선 l 위에 P가 아닌 점 Q를 잡되, 선분 QO의 길이와 선분 OP의 길이가 같아지도록 할 수 있다.

(2) 2단계에 의하여 중심이 Q이고 반지름이 r인 구면과 중심이 P이고 반지름이 r인 구면의 교차도형을 작도할 수 있다. 이 교차도형이 원하는 교차도형이다.

4단계. 여러 개의 기본평면과 여러 개의 기본구면의 교차도형 작도

$2 \le k < n$이고 α_1, α_2, $\cdots$, α_k가 E^n 기본평면이며 ϕ_1, ϕ_2, $\cdots$, ϕ_{n-k}가 기본구면이라고 하자.

(1) 2단계에 의하여 ϕ_1과 ϕ_2의 교차도형 σ_1을 작도할 수 있다. 이 교차도형은 한 점일 수도 있고 $n-2$차원 구면일 수도 있으며, 두 구면이 일치하는 경우 $n-1$차원 구면일 수도 있다.

(2) σ_1이 한 점인 경우는 더이상 할 것이 없다. 이 경우 ϕ_3, ϕ_4, $\cdots$, ϕ_{n-k}가 모두 σ_1을 지나면 그 점이 교점이고, ϕ_3, ϕ_4, $\cdots$, ϕ_{n-k} 중 σ_1을 지나지 않는 것이 하나라도 있으면 교점은 없다.

(3) σ_1이 $n-2$차원 구면인 경우 이 구면을 포함하는 $n-1$차원 E^n 평면 β를 작도한다. β와 ϕ_3의 교차도형을 σ_2, β와 ϕ_4의 교차도형을 σ_3, $\cdots$, β와 ϕ_{n-k}의 교차도형을 σ_{n-k-1}이라고 하자. 그러면 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_{n-k-1}은 모두 β의 부분이며 β는 $n-1$차원 평면이므로 PS^{n-1}에 의하여 β 위에서 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_{n-k-1}의 교차도형 σ를 작도할 수 있다.

(4) 한편 α_1, α_2, $\cdots$, α_k는 모두 기본평면이므로 이들의 교차도형 α_{k+1}을 작도할 수 있다. α_{k+1}은 평면이므로 α_{k+1}과 평면 β의 교차도형 α를 작도할 수 있다. α와 σ는 모두 β의 부분이며 β는 $n-1$차원 평면이므로 PS^{n-1}에 의하여 β 위에서 σ와 α의 교차도형을 작도할 수 있다. 이 교차도형이 구하는 교차도형이다. 이 교차도형은 한 점일 수도 있고 E^n급 구면일 수도 있다.

(5) σ_1이 $n-1$차원 구면인 경우 2단계에 의하여 σ_1과 ϕ_3의 교차도형을 작도할 수 있다. 이 교차도형이 한 점인지, $n-2$차원 구면인지, $n-1$차원 구면인지에 따라서 앞의 과정을 반복 적용하면 원하는 교차도형을 얻을 수 있다.

5단계. n개의 기본구면의 교차도형 작도

ϕ_1, ϕ_2, $\cdots$, ϕ_n이 기본구면이라고 하자.

(1) 4단계에서 본 것과 같이 $k<n$인 경우 k개의 기본구면의 교차도형을 작도할 수 있다. 그러므로 ϕ_1, ϕ_2, $\cdots$, ϕ_{n-1}의 교차도형 ϕ를 작도할 수 있다. ϕ는 한 점이거나 $n-1$차원 구면이거나 그보다 더 낮은 차원의 구면이다.

(2) ϕ가 한 점인 경우는 더이상 할 것이 없다.

(3) ϕ가 $n-1$차원 구면인 경우 2단계에 의하여 ϕ와 ϕ_n의 교차도형을 작도할 수 있다.

(4) ϕ가 그보다 낮은 차원의 구면인 경우 ϕ를 포함하지만 E^n 전체는 아닌 평면 α를 작도할 수 있다. α와 ϕ_n의 교차도형을 ϕ_{n+1}이라고 하자. 그러면 ϕ와 ϕ_{n+1}은 모두 α의 부분이고 α는 E^n 전체가 아닌 평면이므로 낮은 차원의 PS에 의하여 α 위에서 ϕ와 ϕ_{n+1}의 교차도형을 작도할 수 있다.

이로써 E^n에서 기본평면만 사용하여 모든 경우가 작도 가능함이 증명되었다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $n \geq 2$인 임의의 자연수 n에 대하여 PS^n이 성립한다. ■

4. 결론 및 제언

본 논문에서는 n차원 공간에서 수정된 Steiner 작도가 가능함을 보였고 이를 이용하여 n차원 공간에서도 Poncelet-Steiner 정리와 같은 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

Steiner는 Poncelet-Steiner 정리의 가정 '중심을 알고 있는 원이 주어지면'을 '중심을 알고 있는 원의 일부분인 호가 주어지면'으로 약화시켜도 동일한 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 본 논문에서 소개한 n차원 버전의 정리도 이와 같이 가정을 약화시킬 수 있는지를 연구해볼만 하다. 또한 n차원 공간에서 $n-1$차원 평면이 아닌 직선을 이용한 작도 또한 연구해볼만한 가치가 있다.

참고문헌

[1] 고봉균, n차원에서의 작도, 한국과학기술원 석사논문, 2001.

[2] Tom Rike, Mascheroni and Steiner Constructions, Berkeley Math Circle, 2006.

[3] Eves, Howard Whitley (1995), '3.6 The Poncelet–Steiner Construction Theorem', College Geometry, Jones & Bartlett Learning, pp. 180–186.

[4] 나폴레옹의 문제 (네이버캐스트 오늘의 과학), http://navercast.naver.com/science/math/1342, 2009. 10. 27.

CITE THIS PAPER AS :

- 이슬비, *고차원 공간에서의 Poncelet-Steiner 정리*, 수학 나라의 앨리스 : aliceinmathland.com, 2015.
- I Seul Bee, *Poncelet-Steiner Theorem in Higher-Dimensional Euclidean Spaces*, Alice in Mathematical Land: aliceinmathland.com, 2015.

If you find any errata or logical error on this paper, please contact me via designeralice@daum.net.
You can find the recent version of this paper at my personal blog : http://iseulbee.com.

Paper written on August 15, 2015.