# $n$차원에서의 작도

# Geometric Constructions in $n$-dimensional Euclidean Space

# Geometric Constructions in $n$-dimensional Euclidean Space

Advisor : Professor Ki Hyoung Ko

by

Bong-Gyun Koh

Department of Mathematics Division of Mathematics

Korea Advanced Institute of Science and Technology

A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in the Department of Mathematics Division of Mathematics



Daejeon, Korea

2001. 12. 21

Approved by

Ki Hyoung Ko

Professor Ki Hyoung Ko

Major Advisor

# $n$차원에서의 작도

고 봉 균

위 논문은 한국과학기술원 석사 학위논문으로 학위논문 심사위원회에서 심사 통과하였음.



2001년 12월 21일

심사위원장 고 기 형

심사위원 진 교 택

심사위원 김 동 수

MMA 993020 고 봉 균. Bong-Gyun Koh. Geometric Constructions in $n$-dimensional Euclidean Space. $n$차원에서의 작도. Department of Mathematics Division of Mathematics. 2002. 25p. Advisor: Prof. Ki Hyoung Ko.

Geometric constructions is one of the most historical and most educational subjects in Mathematics. Till now, this subject has been limited to plane geometry. But why not in three-dimensional space?

This is an introductory paper on the new subject, geometric constructions in three-dimensional eulidean space or in $n$-dimensional space as well. At first, new construction tools substituting the ruler and the compass for high-dimensional spaces are introduced. And after some exercises, we prove some extended versions of well-known basic theorems about the constructible points and the equivalence of old and modern compass. And then, finally, we prove two main results of this paper about some implications between those classical construction tools. One of them is the implication of high-dimensional compasses by the orginal two-dimensional compass. And the other is an extended version of Mohr-Mascheroni theorem considering the constructions with high-dimensional compass only.

# 목 차

# 1. 개요

## 1.1 작도 도구와 작도의 정의

3차원 작도를 생각하려면 우선 적절한 작도 도구가 먼저 제안되어야 한다. 2차원에서의 가장 고전적인 작도 도구가 각각 직선과 원을 그리는 자와 컴퍼스였던 것을 상기하면, 3차원에서는 평면을 그리는 도구와 구면을 그리는 도구가 필요할 것이다. 이들은 각각 자와 컴퍼스의 역할과 대응되므로 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스라고 부르기로 하겠다. 즉, 원래의 자와 컴퍼스는 각각 $\mathbb{E}^2$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스이다.

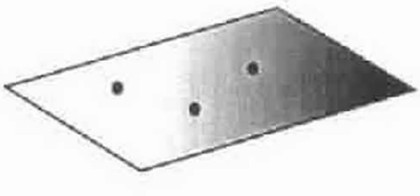
두 개의 평면을 그리면 그 교집합으로 직선이 생기고, 두 개의 구면 혹은 하나의 구면과 하나의 평면을 그리면 그 교집합으로 원이 생기므로, $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스가 있으면 원래의 자와 컴퍼스는 불필요하다는 것, 즉 이미 갖고 있는 것이나 마찬가지라는 것을 생각할 수 있다. 이것은 정리 2.2.2에서 확인하겠다.

그래서, 3차원에서의 작도는 다음과 같이 정의할 수 있다.

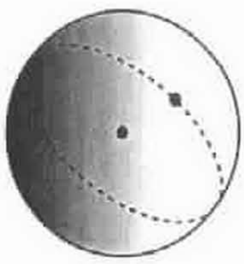
**정의** 1.1.1 **3차원에서의 작도**란, *3차원 공간에서의 몇 개의 점집합으로부터 시작하여, 다음의 도구만을 사용하여*



1. $\mathbb{E}^3$**자**: *일반적인 위치의(한 직선 위에 있지 않은) 세 점 $A$, $B$, $C$가 주어졌을 때, 이 세 점을 지나는 평면 $ABC$를 그린다.*



2. $\mathbb{E}^3$**컴퍼스**: *주어진 점 $O$을 중심으로 하고 주어진 선분 $AB$의 길이를 반지름으로 하는 구면 $O(AB)$를 그린다.*



*그 공간 안에 새로운 기하학적 객체들을 그리는 것이다.*

마찬가지로, $n$차원에서의 작도도 다음과 같이 정의할 수 있다.

**정의** 1.1.2 **$n$차원에서의 작도**란, *$n$차원 공간에서의 몇 개의 점집합으로부터 시작하여, 다음의 도구만을 사용하여*

1. **$\mathbb{E}^n$자**: *(일반적인 위치에 있는) 주어진 $n$개의 점을 지나는 $\mathbb{E}^n$ 평면을 그린다.*
2. **$\mathbb{E}^n$컴퍼스**: *주어진 점을 중심으로 하고 주어진 선분의 길이를 반지름으로 하는 $\mathbb{E}^n$ 구면을 그린다.*

*그 공간 안에 새로운 기하학적 객체들을 그리는 것이다.*

위에서 $\mathbb{E}^k$**평면**이란 $(k-1)$차원의 평면을 말하고, $\mathbb{E}^k$**구면**이란 $(k-1)$차원의 구면을 말한다. 그리고, 이 둘을 합해 $\mathbb{E}^k$**곡면**이라고 부르기로 하자. 즉, 직선과 평면은 각각 $\mathbb{E}^2$평면과 $\mathbb{E}^3$평면이고, 원과 구면은 각각 $\mathbb{E}^2$구면과 $\mathbb{E}^3$구면이다. 그리고, $\mathbb{E}^2$곡면은 직선이나 원을 말하고, $\mathbb{E}^3$곡면은 평면이나 구면을 일컫는다.

## 1.2 이 논문의 구성

이제 다음 장부터는 고차원 작도의 구체적인 작업도 해보고 몇 가지 일반적인 결과도 얻어내어 보겠다.

다음의 2장에서는 이런 고차원 작도의 초등적인 예제를 몇 개 살펴보면서 고차원 공간에서의 작도에 보다 익숙해지도록 하겠다. 이 예제들은 비단 이런 연습용인 것만은 아니고, 이후의 결과들을 설명하기 위한 바탕이 될 것이다. 그리고, $n$차원 작도의 기본도구인 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스가 그보다 낮은 차원의 자나 컴퍼스를 모두 내포함을 확인하겠다.

3장에서는 2차원 작도에서의 몇 가지 기초적인 결과들을 3차원 및 $n$차원으로 확장한다. 고차원에서 작도가능한 점은 2차원에서의 작도가능한 점과 똑같은 성질임을 확인할 것이고, 길이를 옮기는 현대 컴퍼스와 길이를 옮기지 못하는 유클리드 컴퍼스가 동등하다는 컴퍼스 동등 정리가 고차원에서도 여전히 성립함을 살필 것이다. 이들의 증명은 2차원에서의 증명과 다르지 않다.

4장과 5장에서는 새로 제안된 고차원의 작도 도구들을 더 약한 것으로 대체할 수 있다는 작도 도구의 동등성에 대해 살필 것이다. 4장에서는 $\mathbb{E}^n$자가 주어진 상황에서는 $\mathbb{E}^n$컴퍼스 대신 기존의 $\mathbb{E}^2$컴퍼스를 사용해도 된다는 것을 확인하고, 5장에서는 $\mathbb{E}^n$자 없이 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만을 사용해도 된다는 것을 확인하겠다.

이들의 증명에는 고차원 공간에 대한 난해한 상상력이 전혀 필요치 않다. 중등수학에서의 작도를 충분히 이해하고 있고 고차원 공간에 대한 매우 기본적인 감각만 있으면, 누구라도 따라올 수 있는 쉬운 증명으로만 서술하고 있다.

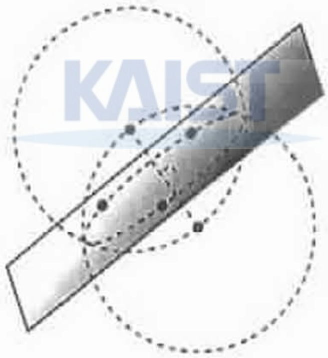
# 2. 고차원 작도의 몇 가지 초등적인 예제들

## 2.1 초등적인 작도의 연습

여기서는 먼저 고차원 작도에 보다 익숙해지면서 또한 이후의 결과들을 증명하는 데 도움이 될 몇 가지 초등적인 문제들을 살펴보기로 하겠다.

**명제** 2.1.1 (1) $\mathbb{E}^3$ *에서, 주어진 두 점을 잇는 선분의 수직이등분평면을 작도할 수 있다.* (2) $\mathbb{E}^n$ *에서, 주어진 두 점을 잇는 선분을 수직이등분하는* $\mathbb{E}^n$ *평면을 작도할 수 있다.*

[증명] (1) 주어진 두 점을 $A$, $B$라 하자. 구면 $A(AB)$와 구면 $B(BA)$를 그린다. 이 두 구면의 교집합은 원이 되고, 이 원을 지나는(정확히는 이 원 위의 적당한 세 점을 골라 그들을 지나는) 평면을 그리면 된다.



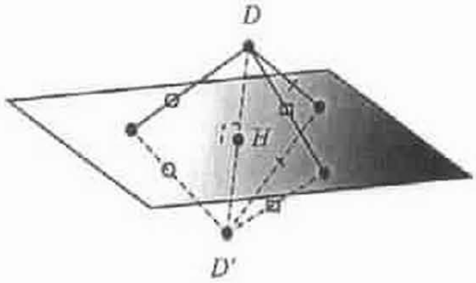
(2) 마찬가지다. 주어진 두 점을 $A$, $B$라 할 때, $\mathbb{E}^n$구면 $A(AB)$와 $B(BA)$를 그리면, 그 교집합은 $\mathbb{E}^{n-1}$구면이 되는데, 이 $\mathbb{E}^{n-1}$구면을 지나는 $\mathbb{E}^n$평면을 그리면 된다. □

위의 명제의 작도에는, 마지막에 주어진 $n$개의 점을 지나는 $\mathbb{E}^n$평면을 직접 그리는 것을 제외하고는, 길이를 옮기지 못하는 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만이 쓰였음을 기억해두자.

**명제** 2.1.2 (1) $\mathbb{E}^3$ *에서, 주어진 평면에 대한 주어진 점의 면대칭점을 작도할 수 있다.* (2) $\mathbb{E}^n$ *에서, 주어진* $\mathbb{E}^n$ *평면에 대한 주어진 점의 대칭점을 작도할 수 있다.*

[증명] (1) 주어진 평면 $ABC$에 대한 주어진 점 $D$의 면대칭점을 $D'$이라 하자. $D$와 $D'$은 $A$, $B$, $C$에 이르는 거리가 같다. 따라서, 세 구면 $A(AD)$, $B(BD)$, $C(CD)$를

그렸을 때 나오는 두 교점 중에서 $D$가 아닌 것이 $D'$이다.




(2) 마찬가지다. 주어진 $\mathbb{E}^n$평면 $A_1A_2\cdots A_n$에 대한 주어진 점 $D$의 대칭점은, $\mathbb{E}^n$구면 $A_1(A_1D), A_2(A_2D), \ldots, A_n(A_nD)$ 들을 그려 얻어지는 두 교점 중 $D$가 아닌 것이다. □

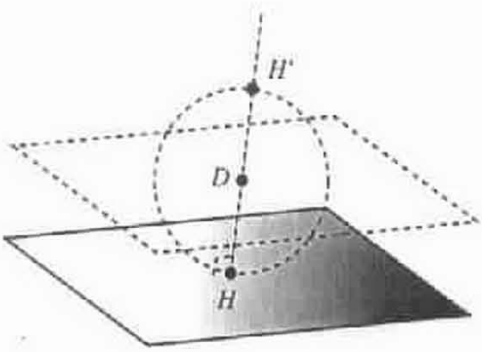
위의 명제의 작도에도 길이를 옮기지 못하는 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만이 쓰였다.

**명제** 2.1.3 (1) $\mathbb{E}^3$에서, *주어진 점에서 주어진 평면에 수선의 발을 내릴 수 있다.* (2) $\mathbb{E}^n$에서, *주어진 점에서 주어진* $\mathbb{E}^n$ *평면에 수선의 발을 내릴 수 있다.*

[증명] (1) 앞의 명제에 의해, 주어진 점 $D$의 주어진 평면 $ABC$에 대한 대칭점 $D'$을 구할 수 있고, 직선 $DD'$(평면 $ADD'$과 $BDD'$의 교집합)과 평면 $ABC$의 교점이 구하는 수선의 발이다.
(2) 마찬가지로 앞의 명제에 의해, 주어진 점 $D$의 주어진 $\mathbb{E}^n$평면 $A_1A_2\cdots A_n$에 대한 대칭점 $D'$을 구할 수 있고, 직선 $DD'$과 $\mathbb{E}^n$평면 $A_1A_2\cdots A_n$의 교점이 구하는 수선의 발이다. □

**명제** 2.1.4 (1) $\mathbb{E}^3$에서, *주어진 점을 지나 주어진 평면에 평행한 평면을 그릴 수 있다.* (2) $\mathbb{E}^n$에서, *주어진 점을 지나 주어진* $\mathbb{E}^n$ *평면에 평행한* $\mathbb{E}^n$ *평면을 그릴 수 있다.*

[증명] (1) 앞의 명제에 의해, 주어진 점 $D$에서 주어진 평면 $ABC$에 내린 수선의 발 $H$를 구할 수 있다. 직선 $DH$와 구면 $D(DH)$의 교점 중 $H$가 아닌 것을 $H'$이라 하자. 명제 2.1.1에 의해 선분 $HH'$의 수직이등분평면을 그리면 그것이 구하는 평행면이다.



(2) 마찬가지로, 주어진 점 $D$에서 $\mathbb{E}^n$평면 $A_1A_2\cdots A_n$에 내린 수선의 발 $H$를 먼저 구한다. 직선 $DH$와 $\mathbb{E}^n$구면 $D(DH)$의 교점 중 $H$가 아닌 것을 $H'$이라 할 때, 선분 $HH'$을 수직이등분하는 $\mathbb{E}^n$평면을 그리면 된다. □

## 2.2 내포 정리

이제 고차원 작도에 대한 연습도 어느 정도 되었고, 이제부터 살펴볼 일반적인 정리들을 증명하기 위한 준비도 되었다. 그리고, 다음의 첫 번째 정리에 대한 힌트도 얻었을 것이다. 이 정리는 높은 차원의 작도 도구가 그보다 낮은 차원의 작도 도구를 내포함을 말한다.

그런데, 이에 앞서 $\mathbb{E}^2$컴퍼스가 3차원 공간에서 어떤 역할을 하는지 등에 대해 엄밀히 정의할 필요가 있다. $n$차원에서의 작도를 정의할 때, $\mathbb{E}^n$에서 $\mathbb{E}^n$자나 $\mathbb{E}^n$컴퍼스가 어떤 역할을 하는지는 정의되었지만, $k < n$ 인 $k$에 대해 $\mathbb{E}^k$자나 $\mathbb{E}^k$컴퍼스가 $\mathbb{E}^n$에서 어떤 역할을 하는지는 명확히 서술하지 않았다. 예를 들어 3차원에서 $S$가 $\mathbb{E}^3$곡면일 때, $\mathbb{E}^2$컴퍼스로 $S$의 밖에 있는 점 $D$에 중심을 두고 $S$ 위에 원을 그릴 수 있는 것으로 봐야 할까? 또, 평면 $P$ 위의 점 $D$에 중심을 두고 $P$ 위에 원을 그릴 때, $P$ 밖에 있는 선분의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있는 것으로 봐야 할까?

결국은 가장 약한 기능의 컴퍼스나 가장 강한 기능의 컴퍼스나 모두 동등하다는 것이 확인 가능하므로, 여기서는 합리적인 수준의 것으로, 길이를 옮길 수 있는 컴퍼스 중에 가장 기능이 약한 것을 택하기로 하겠다. 그리고, 이것이 길이를 옮길 수 없는 컴퍼스와 동등하다는 것을 따로 정리 3.2.1에서 확인하겠다. 이제, $\mathbb{E}^k$자와 $\mathbb{E}^k$컴퍼스의 기능은 다음과 같이 정의한다.

**정의** 2.2.1 *임의 차원의 공간에서 사용하는 $\mathbb{E}^k$자와 $\mathbb{E}^k$컴퍼스는 다음과 같은 것이다.*

1. **$\mathbb{E}^k$자**: *일반적인 위치에 있는 $k$개의 점이 주어졌을 때, 이들을 지나는 $\mathbb{E}^k$평면을 그린다.*

2. **$\mathbb{E}^k$컴퍼스**: *$\mathbb{E}^{k+1}$평면 $P$가 주어지고, $P$ 위의 점 $O$와 $P$ 위의 선분 $AB$가 주어졌을 때, $O$를 중심으로 하고 $AB$를 반지름으로 가지는 $P$ 위의 $\mathbb{E}^k$구면 $O_P(AB)$를 그린다.*

**정리** 2.2.2 (**내포 정리**) (1) *3차원 작도의 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스는 $\mathbb{E}^2$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스를 내포한다.* (2) *$n$차원 작도의 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스는 $\mathbb{E}^k$자와 $\mathbb{E}^k$컴퍼스들을 모두 내포한다.* $(k = 2, \ldots, n-1)$

[증명] (1) 자와 컴퍼스로 할 수 있는 기본작업을 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스로도 모두 할 수 있음을 확인하면 된다. 자는 주어진 두 점을 지나는 직선을 그리는 도구이다. 두 점

이 주어지면 그 두 점을 지나는 평면을 $\mathbb{E}^3$자로 두 개 그린다. 그럼 그 교선이 원하는 직선이다.

그리고, 컴퍼스는 주어진 평면 $P$ 위에 주어진 한 점 $O$을 중심으로 하고 $P$ 위에 주어진 선분 $AB$을 반지름으로 하는 원을 그 평면 $P$ 위에 그리는 도구이다. $\mathbb{E}^3$컴퍼스로 $O$를 중심으로 하고 반지름이 $AB$인 구면을 그린다. 이 구면과 평면 $P$의 교원이 원하는 원이다.

(2) 주어진 $n-1$개의 점을 지나는 $\mathbb{E}^{n-1}$평면은 그 $n-1$개의 점을 지나는 두 개의 $\mathbb{E}^n$평면의 교집합이다. 따라서, $\mathbb{E}^n$자는 $\mathbb{E}^{n-1}$자를 내포한다. 마찬가지로, $\mathbb{E}^{n-1}$자는 $\mathbb{E}^{n-2}$자를 내포한다. 이렇게 귀납적으로, $\mathbb{E}^{k+1}$자는 $\mathbb{E}^k$자를 내포하고($k = n-1, \ldots, 2$), 따라서 삼단논법 혹은 추이법칙처럼 $\mathbb{E}^n$자는 $\mathbb{E}^k$자들을 모두 내포한다. ($k = 2, \ldots, n-1$)

$\mathbb{E}^k$컴퍼스는 주어진 $\mathbb{E}^{k+1}$평면 $P$ 위에 주어진 한 점 $O$를 중심으로 하고 $P$ 위에 주어진 선분 $AB$를 반지름으로 하는 $\mathbb{E}^k$구면을 그 $P$ 위에 그리는 도구이다. $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 $O$를 중심으로 하고 반지름이 $AB$인 $\mathbb{E}^n$구면을 그린다. $\mathbb{E}^{k+1}$자가 있는 것이나 마찬가지이므로 $P$를 확실히 그릴 수 있고, $\mathbb{E}^n$구면 $O(AB)$와 $P$의 교집합이 구하는 $\mathbb{E}^k$구면이다. □

# 3. 고차원 작도에서의 몇 가지 기초적인 정리들

## 3.1 작도가능점 정리

1에서 시작하여 사칙연산($+, -, \times, \div$)과 제곱근($\sqrt{\ }$)만을 반복하여 얻어낼 수 있는 수를 **작도가능한 수**라고 한다. 즉, 작도가능한 수의 집합은 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$의 반복2차확대체(iterated quadratic extension field)이다. 그리고, 좌표평면에서 원점과 $(1,0)$ 좌표점에서 작도를 시작하는 것으로 할 때 자와 컴퍼스로 작도가능한 점은 각 좌표가 작도가능한 수인 점과 같음이 잘 알려져 있다. 이 내용과 증명은 그대로 고차원 작도로 확장된다. 다음의 정리가 그것이다.

**정리** 3.1.1 (**작도가능점 정리**) *$\mathbb{E}^n$좌표공간에서 원점과 각 축 방향의 단위좌표점들을 작도의 시작점으로 할 때, $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도가능한 점은 각 좌표가 작도가능한 수인 점과 같다.*

[증명] 먼저 각 좌표가 작도가능한 수인 점 $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$가 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도가능한 점임을 보이자. 내포 정리에 의해 자와 컴퍼스, 그리고 $\mathbb{E}^2$자가 있는 것이나 마찬가지이므로, $\mathbb{E}^2$자로 $x_1x_2$-평면을 그릴 수 있다. 그리고, 평면 작도에서의 작도가능한 점에 대한 결과에서 이 $x_1x_2$-평면 위의 점들 $(a_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, a_2, 0, \ldots, 0)$을 얻을 수 있다. 같이하여, $\mathrm{a}_1 = (a_1, 0, \ldots, 0)$, $\mathrm{a}_2 = (0, a_2, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathrm{a}_n = (0, \ldots, 0, a_n)$ 들을 모두 얻을 수 있다. 이제 $\mathbb{E}^2$자로 원점과 $\mathrm{a}_1$, $\mathrm{a}_2$ 등 세 점을 포함하는 평면을 그리고, 자와 컴퍼스로 평행사변형의 꼭지점 $\mathrm{a}_{12} = (a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$을 얻을 수 있다. 같이하여 $\mathrm{a}_{12}$와 $\mathrm{a}_3$로부터 $\mathrm{a}_{123}$ 을 얻을 수 있고, 이렇게 계속하여 귀납적으로 $\mathrm{a}_{1\cdots n} = \mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 을 작도할 수 있다. 만일 $a_1, \ldots, a_n$ 중에 0이 있으면 그때마다 위의 작업 중에서 평행사변형의 꼭지점을 구하는 작업을 생략해도 되므로 더 쉽다.

다음 역으로, $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도가능한 점의 각 좌표가 작도가능한 수임을 보이자. 먼저 작도의 시작점인 원점과 각 축 방향의 단위좌표점들은 모두 각 좌표가 작도가능한 수임이 자명하다. 이미 작도된 점들이 모두 각 좌표가 작도가능한 수인 점들일 때, 거기서 바로 새로 작도되는 점들도 모두 각 좌표가 작도가능한 수인 점임을 보이면 된다. $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스에 의한 작도이므로, 새로 작도되는 점은 이미 작도된 점들에 의해 얻어지는 $\mathbb{E}^n$평면과 $\mathbb{E}^n$구면들의 교집합이다. 이 $\mathbb{E}^n$평면과 $\mathbb{E}^n$구면들은 식으로

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &= d \\ (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + \cdots + (x_n - b_n)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

의 꼴들을 갖는다. 즉, 새로 작도되는 점은 이런 식 몇 개가 모인 연립방정식의 해이다. 원래 주어진 점들의 좌표가 작도가능한 수이면, 이 식에 나타나는 계수나 상수들도 모두 작도가능한 수로 나타낼 수 있다. 또, $\mathbb{E}^n$구면을 나타내는 식이 둘 있으면 서로 빼어서 한 식을 $\mathbb{E}^n$평면의 1차식꼴로 바꾸어줄 수 있고, 이 식에 나타나는 계수나 상수들도 여전히 모두 작도가능한 수이다. 즉, 새로 작도되는 점은

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= d_n \end{cases}$$

혹은

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n &= d_k \\ (x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_n - b_n)^2 &= r^2 \end{cases}$$

의 두 가지꼴 중 어느 한 가지 연립방정식의 해가 된다. 그리고 그것은 이 식의 계수와 상수들로부터 사칙연산과 제곱근만을 행하여 얻어지는 수들이므로 각 좌표가 모두 작도가능한 수이다. □



## 3.2 컴퍼스 동등정리

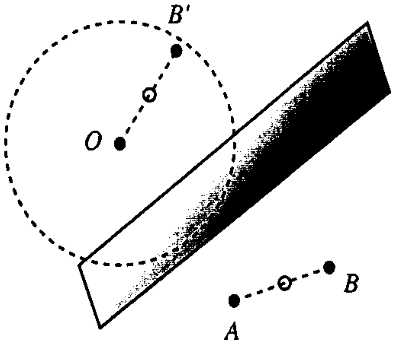
길이를 옮기지 못하는 유클리드 컴퍼스와 길이를 옮길 수 있는 현대 컴퍼스가 동등하다는 것이 평면 작도의 유명한 컴퍼스 동등정리이다. $O$를 중심으로 $AB$를 반지름으로 하는 원을 유클리드 컴퍼스로 그리려면, $OD = AB$ 가 되는 점 $D$를 찾으면 된다. 그 방법으로는 $AB$를 정삼각형을 이용한 60° 회전이동으로 $OD$로 옮겨주는 방법과 $AB$를 선대칭에 의해 $OD$로 옮겨주는 방법이 가장 대표적인데, 이 중에서 후자의 대칭에 의한 방법은 고차원 작도로도 쉽게 확장이 된다.

**정리** 3.2.1 (**컴퍼스 동등정리**) *$n$차원 작도에서* **유클리드** $\mathbb{E}^n$**컴퍼스**는 (**현대**) $\mathbb{E}^n$**컴퍼스**와 *동등하다.*

[증명] $\mathbb{E}^n$컴퍼스가 유클리드 $\mathbb{E}^n$컴퍼스의 기능을 다 할 수 있음은 자명하다. 유클리드 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스의 기능을 할 수 있음을 보이면 된다. 즉, 주어진 점 $O$를 중심으로 하고 주어진 선분 $AB$를 반지름으로 하는 원을 유클리드 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도해보자. 이것은 $OD = AB$ 인 새로운 점 $D$만 찾으면 된다.

명제 2.1.1의 증명에서와 같이 $\mathbb{E}^n$구면 $O(OA)$와 $A(AO)$를 그리면, 선분 $OA$를 수직이등분하는 $\mathbb{E}^n$평면 $P$ 위에 있는 $\mathbb{E}^{n-1}$구면 $S$가 작도된다. 단, $P$는 그리지 않

는다. 명제 2.1.2와 같이, $S$ 위의 $n$개의 점을 아무렇게나 골라 $B$의 $\mathbb{E}^n$평면 $P$에 대한 대칭점 $B'$를 유클리드 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만으로 작도할 수 있다.




이제 선분 $OB'$과 $AB$는 $\mathbb{E}^n$평면 $P$에 대해 대칭이므로 그 길이가 같다. 따라서, $\mathbb{E}^n$구면 $O(OB')$을 그리면 원하는 것이 된다. □

위의 증명에서 두 컴퍼스의 동등성은 $\mathbb{E}^n$자와 같은 다른 도구의 사용가능 여부와 상관없이 확인된다는 것을 기억해두자. 이것은 5장에서 다룰 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만으로 하는 작도와 연관이 된다.

# 4. $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스에 의한 작도

3차원 작도의 경우, $\mathbb{E}^3$자는 책받침과 같은 것에서 물리적인 모델을 찾을 수 있다. 평면을 그리는 것은 세 점에 책받침을 대고 붓으로 면을 칠하는 것이다. $\mathbb{E}^3$컴퍼스는 적당한 반지름의 구면을 대고 붓으로 칠하는 게 되겠는데, 이것은 그럼 우산처럼 생긴 것일까? $\mathbb{E}^3$컴퍼스의 물리적인 모델을 찾기는 비교적 어려워 보인다.

그럼, $\mathbb{E}^3$컴퍼스를 사용하지 않고, 대신에 평면 작도에서 사용했던 컴퍼스를 사용하면 어떤 작도가 가능할까? 실은 이 작도는 원래의 $\mathbb{E}^3$컴퍼스를 쓰던 작도와 동등하다. 물론 컴퍼스로는 구면을 그릴 수 없으므로, 여기서의 동등성은 완전한 동등성은 아니다. 작도가능한 점에만 주목할 때의 동등성이다. 즉, 3차원 작도에서 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 $\mathbb{E}^3$와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스로도 작도할 수 있다. 보다 일반적으로, $n$차원 작도에서 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스로도 작도할 수 있다. 이것을 이번 장에서 다룬다.

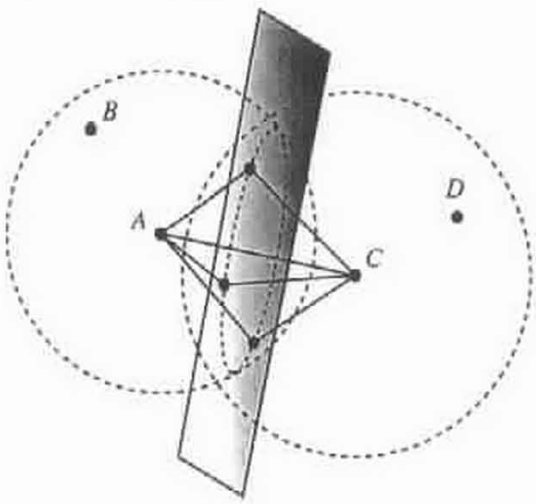
## 4.1 3차원에서의 정리



우선 3차원에서의 동등성을 확인하자.

**보조정리** 4.1.1 *3차원 작도에서, 주어진 두 구면의 교집합(원 혹은 접점)을 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스로 작도할 수 있다.*

[증명] 컴퍼스로는 구면을 그릴 수 없으므로, 여기서의 구면은 실제로 주어진 구면이 아니다. 각각 중심 $A$, $C$과 반지름 $EF$, $GH$가 주어진 것만으로, 구면이 그려져 있는 것이나 마찬가지라고 상상해야 한다.

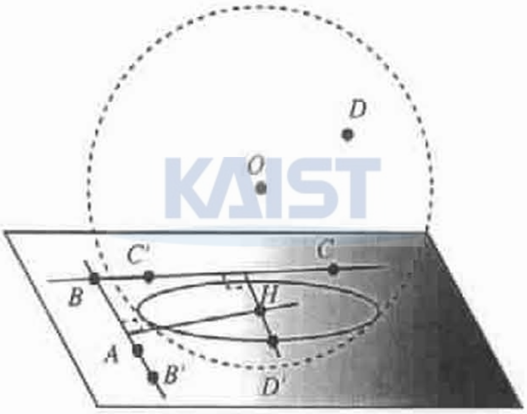


평면 $AEF$, $CGH$ 위에서 각각 $AB = EF$, $CD = GH$ 가 되는 $B$, $D$를 컴퍼스로 찾고, 다시 직선 $AC$ 위에 $AB' = AB$, $CD' = CD$ 가 되는 $B'$, $C'$을 하나씩 찾아둔다. 직선 $AC$를 포함하는 임의의 세 평면 위에서 각각 원 $A(AB')$, $C(CD')$을 그려 만나는 교점을 하나씩 찾고, 이 세 점을 지나는 평면 위에서 이 세 점의 외접원을 그리면 된다.

두 구면이 접하는 경우에는 $B'$과 $C'$이 같은 점이 되고 이 점이 원하는 교점이다. □

**보조정리** 4.1.2 *3차원 작도에서, 주어진 구면과 주어진 평면의 교집합(원 혹은 접점)을 $\mathbb{E}^3$ 자와 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스로 작도할 수 있다.*

[증명] 여기서도 구면은 실제로 그려져 있는 것은 아니고, 중심 $O$와 반지름의 될 선분 $EF$만이 주어져 있는 경우가 된다. 평면 $ABC$와 이 가상의 구면의 교집합을 구해보자. 먼저 앞의 보조정리에서처럼, 평면 $OEF$에서 $OD = EF$ 인 점 $D$를 컴퍼스로 찾아둔다. 이제 $O$에서 평면 $ABC$에 내린 수선의 발 $H$를 찾자.




평면 $OAB$ 위에서 원 $O(OB)$를 그려 직선 $AB$와 만나는 새로운 교점을 $B'$이라 하고, 평면 $OBC$ 위에서 원 $O(OC)$를 그려 직선 $BC$와 만나는 새로운 교점을 $C'$이라 하자. 평면 $ABC$ 위에서 선분 $BB'$, $CC'$의 수직이등분선을 그리면, 두 직선이 만나는 교점이 수선의 발 $H$가 된다. 이제 평면 $ODH$ 위에서 원 $O(OD)$를 그려 평면 $ABC$와 만나는 점 하나를 $D'$이라 하고, 평면 $ABC$ 위에서 원 $O(OD')$을 그리면 된다.

접하는 경우에는 $H = D'$ 이 되므로 마찬가지이다. □

**정리** 4.1.3 *3차원 작도에서, $\mathbb{E}^3$ 자와 $\mathbb{E}^3$ 컴퍼스로 작도가능한 점은 $\mathbb{E}^3$ 자와 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스로도 작도할 수 있다.*

[증명] 3차원 작도에서 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스로 작도되는 점은

$$PPP, \quad PPS, \quad PSS, \quad SSS$$

등의 경우가 있다. 여기서 $P$는 평면, $S$는 구면을 의미하고, 예를 들어 $PPS$는 두 개의 평면과 한 구면의 교집합으로 점이 결정되는 경우이다. 접하는 경우에는 $P$접$S$, $S$접$S$ 등의 경우가 있는데, 이들은 이미 앞의 보조정리들에서 해결이 되었다.

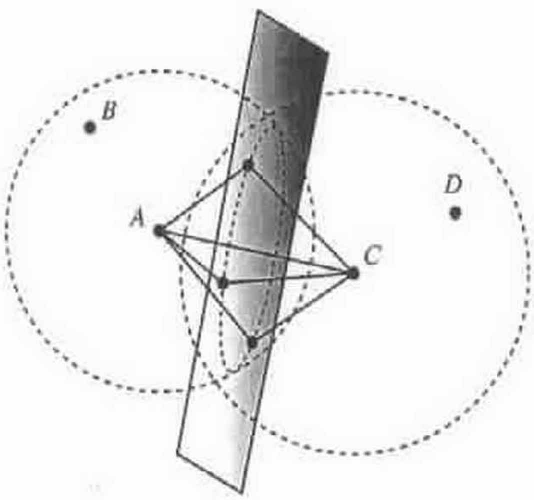
$PPP$의 경우는 $\mathbb{E}^3$자가 있으므로 자명하고, $PPS$의 경우는 보조정리 4.1.2에 의해 먼저 $PS$의 교집합을 찾고나서 $\mathbb{E}^3$자로 나머지 $P$와의 교점을 찾으면 된다. $PSS$의 경우도 보조정리 4.1.1에 의해 먼저 $SS$의 교집합을 찾고나서 다시 나머지 $P$와의 교점을 찾는다. $SSS$의 경우는 보조정리 4.1.1을 조금 변형하여 $SS$의 교집합을 지나는 $P$를 찾으면, $SS$의 교집합과 $PS$의 교집합이 같으므로 $PSS$의 경우로 바뀌어 해결이 된다. □

## 4.2 $n$차원에서의 정리

이제 $n$차원에서의 사실을 증명하자.

**보조정리** 4.2.1 *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스를 이용해, 주어진 두 $\mathbb{E}^n$ 구면의 교집합을 $\mathbb{E}^n$ 구면과 $\mathbb{E}^n$ 평면의 교집합으로 나타낼 수 있다. 즉, $S \cap S'$ 꼴을 $S \cap P$ 꼴로 바꾸어 나타낼 수 있다.*

[증명] 여기서도 주어진 $\mathbb{E}^n$구면은 물론 실제로 그려진 것이 아닌 그 중심과 반지름의 길이만이 제시된 가상의 것이다. 3차원에서와 마찬가지로 하자. $\mathbb{E}^n$자가 있으므로 내포 정리에 의해 $\mathbb{E}^k$자들은 모두 있는 것이나 다름없다($k = 2, \ldots, n-1$). 주어진 가상의 두 $\mathbb{E}^n$구면을 $A(EF)$, $C(GH)$라 할 때, 3차원의 경우에서처럼 직선 $AC$ 위에 $AB' = EF$, $CD' = GH$ 가 되는 점 $B'$, $D'$을 찾아둔다. 그리고, $AC$를 포함하는 평면 $n$개를 적당히 잡고, 그 위에서 각각 원 $A(AB')$, $C(CD')$를 그려 교점을 하나씩 찾는다.




이 교점들을 모두 지나는 $\mathbb{E}^n$평면을 $P$라 하면,

$$A(EF) \cap C(GH) = A(EF) \cap P$$

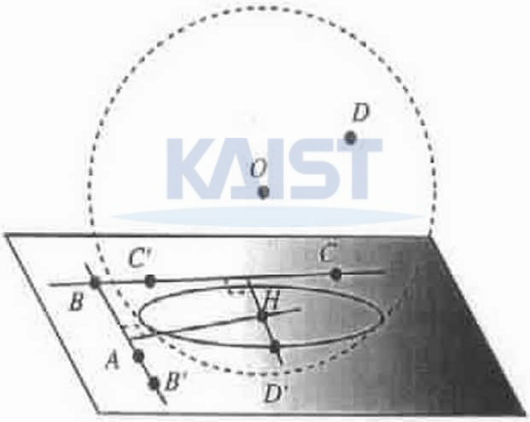
가 된다. □

**보조정리** 4.2.2 *$n$차원 작도에서, 주어진 $\mathbb{E}^n$ 구면과 주어진 $\mathbb{E}^k$ 평면의 교집합이 교점으로 나타나는 경우에, 그 교점을 $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스를 이용해 작도할 수 있다.* $(k = 2, \ldots, n)$

[증명] 주어진 가상의 $\mathbb{E}^n$구면을 $S = O(EF)$라 하고 주어진 $\mathbb{E}^k$평면을 $Q = A_1A_2 \cdots A_k$라 하자. $OD = EF$ 인 $D$를 먼저 찾아둔다. $S \cap Q$ 가 점으로 나타나는 경우는 $Q$가 직선일 때($k = 2$)가 아니라면 $S$와 $Q$가 접할 때이다.

Case 1: $Q$가 직선 $AB$일 때.
평면 $ODA$ 위에서 $OD' = OD$ 가 되는 점 $D'$을 $OA$ 위에 잡는다. 평면 $OAB$ 위에서 원 $O(OD')$을 그려 직선 $AB$와 만나는 점들을 찾으면, 이 점들이 구하는 교점이다.

Case 2: $S$와 $Q$가 접할 때.
접점은 $S$의 중심 $O$에서 $Q$에 내린 수선의 발이므로, 이 수선의 발 $H$를 구하자.




평면 $OA_1A_i$ 위에서 원 $OA_i$을 그려 직선 $A_1A_i$와 만나는 새로운 점을 $A_i'$이라 하자($i = 2, \ldots, k$). 앞의 보조정리에 의해, $A_i(A_iA_i') \cap A_i'(A_i'A_i) = A_i(A_iA_i') \cap P_i$ 인 $\mathbb{E}^n$평면 $P_i$를 찾을 수 있고, 이것은 선분 $A_iA_i'$을 수직이등분하고 $O$를 지난다. 조금 더 잘 말하면, $P_i$는 $OH_i \perp A_1A_i$ 인 점 $H_i$들을 모두 모아놓은 공간이다. $H$는 모든 $i$에 대해 $OH \perp A_1A_i$ 인 $Q$ 위의 유일한 점이므로,

$$H = Q \cap \left( \bigcap_{i=2}^{k} P_i \right)$$

이 된다. 평면 $ODH$에서 원 $O(OD)$를 그려 $H$를 지나는지 확인하면, $H$가 접점임이 확인된다. □

**정리** 4.2.3 *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스로도 작도할 수 있다.*

[증명] $n$차원 작도에서 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도되는 점은 크게

$$S \cap \left(\bigcap_{i=2}^{k} T_i\right) \quad \text{꼴과} \quad \bigcap_{i=1}^{n} P_i$$

의 두 가지 꼴로 나눌 수 있다. 단, $S$는 $\mathbb{E}^n$구면이고 $P_i$들은 $\mathbb{E}^n$평면, 그리고 $T_i$들은 $\mathbb{E}^n$곡면이다. $\bigcap P_i$ 꼴은 $\mathbb{E}^n$자가 있으므로 염려하지 않아도 되고, 첫 번째 꼴만 살피면 된다. 보조정리 4.2.1에 의해, $T_i$가 만일 $\mathbb{E}^n$구면이면 $S \cap T_i = S \cap Q_i$ 인 $\mathbb{E}^n$평면 $Q_i$를 찾아줄 수 있으므로, 귀납적으로 $T_i$들이 모두 $\mathbb{E}^n$평면인 경우만 살피면 된다. 이 때 $\bigcap T_i$ 는 적당한 $r$에 대해 $\mathbb{E}^r$평면이므로, 보조정리 4.2.2에 의해 $S \cap (\bigcap T_i)$ 를 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^2$컴퍼스로 작도할 수 있다. □

이 장에 지금까지 나온 보조정리들이나 정리들을 다시 잘 살피면, $\mathbb{E}^2$컴퍼스가 유클리드 컴퍼스가 되어도 상관없음을 알 수 있을 것이다.

**따름정리** 4.2.4 *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 $\mathbb{E}^n$ 자와 유클리드 $\mathbb{E}^2$ 컴퍼스로도 작도할 수 있다.*

# 5. $\mathbb{E}^n$컴퍼스로만 하는 작도

모어(Georg Mohr, 1640–1697)는 1672년에 출간된 그의 저서 Euclides Danicus에서, 그리고 마스케로니(Lorenzo Mascheroni, 1750–1800)는 1797년에 출간된 그의 저서 Geometria del Compasso에서 각각 독립적으로, 자 없이 컴퍼스만으로 하는 작도에 대한 결과를 보여주고 있다. 자와 컴퍼스로 작도가능한 모든 점을 컴퍼스만으로도 작도할 수 있다는 것이다. 즉, 직선을 직접 그리는 것을 제외하고는 컴퍼스만으로 하는 작도가 자와 컴퍼스로 하는 작도와 동등하다.

이 결과를 알고 있다면, 고차원 작도에서도 같은 일이 성립하는가 하는 의문을 품는 것은 자연스러운 일일 것이다. 다음은 이 의문에 대한 대답이 '그렇다'라는 것을 확인하는 과정이다. 고차원에서의 컴퍼스 동등정리가 이미 정리 3.2.1에서 증명되었으므로, 여기서는 유클리드 컴퍼스와 현대 컴퍼스를 혼동해서 사용할 수 있다.

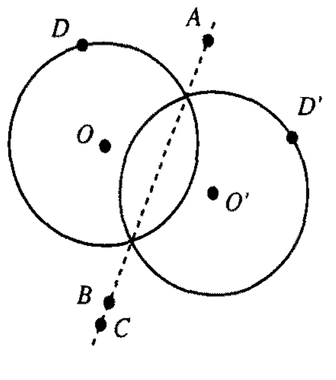
## 5.1 3차원에서의 정리

우선 3차원에서 확인하자. 이것은 2차원에서의 컴퍼스만으로 하는 작도에 관한 모어-마스케로니 정리의 내용과 증명을 큰 손질 없이 자연스럽게 확장한 것이다.

**보조정리** 5.1.1 *3차원 작도에서,* $\mathbb{E}^3$ *컴퍼스만으로, 주어진 구면과 주어진 평면의 교집합(원 혹은 접점)을 두 구면의 교집합으로 나타낼 수 있다. 즉, 작도할 수 있다.*

[증명] 물론 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만으로 하는 작도이므로, 주어진 평면은 실제로 그려진 평면이 아니라 그 평면을 이룰 세 점을 이미 평면으로 보는 가상적인 평면이다. 주어진 가상의 평면을 $ABC$라 하고 주어진 구면을 $O(OD)$라 하자. 그리고 구면의 중심 $O$와 평면의 위치 관계에 따라 경우를 나누자.

Case 1: 구면의 중심 $O$가 평면 $ABC$ 밖에 있을 경우.
먼저 명제 2.1.2에 의해, $O$의 평면 $ABC$에 대한 대칭점 $O'$을 찾는다. $O$와 $O'$이 일치하지 않는다면 지금의 경우이다. 만일 $O = O'$ 이면 Case 2로 간다.



그림은 평면이 직선처럼 보이도록 옆에서 본 모습이다. $D$의 $ABC$에 대한 대칭점 $D'$도 찾는다. 이 때,

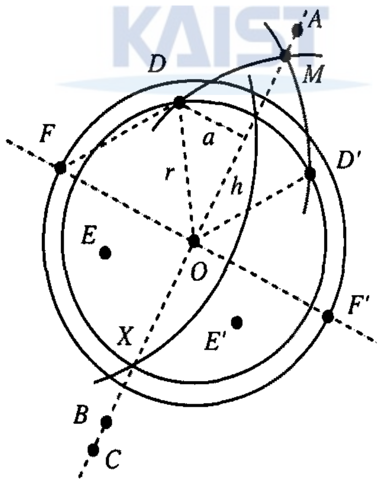
$$O(OD) \cap ABC = O(OD) \cap O'(O'D')$$

이다. 이 두 구면을 그려 교원 혹은 접점을 찾으면 작도가 완성된다.

Case 2: 구면의 중심 $O$가 평면 $ABC$ 위에 있을 경우.
$O$의 평면 $ABC$에 대한 대칭점이 $O$ 자신과 같다면 이런 경우이다. Case 1에서처럼 가상의 평면 $ABC$를 대신해 교집합을 통과하는 새로운 원을 찾는 것이 목표이다. 먼저 $D$의 대칭점 $D'$을 찾는다. 다음은 $DD'OF$가 평행사변형이 되는 점 $F$를 찾으려고 한다. 그러기 위해서 먼저 $DE$가 $ABC$에 평행한 $E$를 찾아보자. $E$를 찾는 요령은 예를 들어 다음과 같다:

> 임의의 점 $X$를 잡고 그의 대칭점 $X'$도 찾는다. 평면 $OXX'$은 $ABC$와 수직이므로, $D$를 가상의 평면 $OXX'$에 대칭이동한 점을 $E$로 한다.

이제 세 구면 $O(DD')$, $D(DO)$, $E(EO)$를 그리면 원하는 점 $F$를 얻을 수 있다. 구면 $F(FD')$과 $F'(F'D)$를 그렸을 때 나오는 교원은 평면 $ABC$ 위에 있게 되는데, 그 원 위의 임의의 한 점을 잡아 $M$이라 하자.




$$\begin{aligned} OM^2 &= FM^2 - OF^2 = FD'^2 - 4a^2 \\ &= (9a^2 + h^2) - 4a^2 = 4a^2 + r^2 \\ &= FX^2 \end{aligned}$$

위의 그림과 식에서 보듯 $OM = FX$ 이므로, 구면 $F(OM)$을 그리면

$$O(OD) \cap F(OM)$$

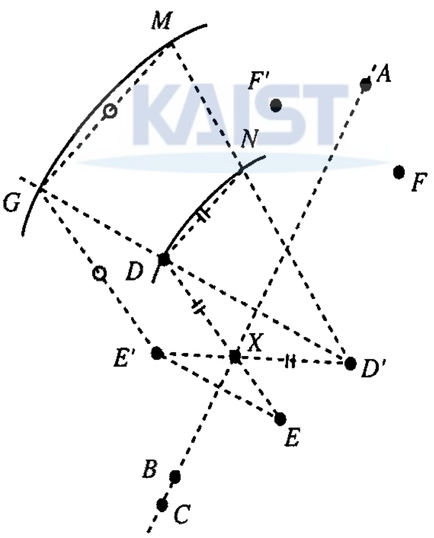
가 문제에서 원하던 교집합 $O(OD) \cap ABC$ 가 된다. □

**따름정리** 5.1.2 *3차원 작도에서,* $\mathbb{E}^3$*컴퍼스만으로 작도를 할 때, 주어진 가상의 평면에 대해 그 평면이 실제로 그려져 있는 것처럼 그 위에서 원을 그릴 수 있는 컴퍼스가 있다고 생각해도 된다.*

[증명] 임의로 주어진 가상의 평면 $P$ 위에서, $P$ 위의 점 $O$를 중심으로 하고 $P$ 위의 선분 $AB$를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있음을 확인하면 된다. 이것은 구면 $O(AB)$와 평면 $P$의 교원을 $\mathbb{E}^3$컴퍼스만으로 그릴 수 있음을 보이면 되고, 이것은 앞의 보조정리의 Case 2의 내용이다. □

**보조정리** 5.1.3 *3차원 작도에서, 주어진 평면과 주어진 직선의 교집합(점)을* $\mathbb{E}^3$ *컴퍼스만으로 작도할 수 있다.*

[증명] 여기서도 물론 주어진 평면과 직선은 가상의 평면 $ABC$와 가상의 직선 $DE$이다. 먼저 $D$와 $E$의 평면에 대한 대칭점 $D'$, $E'$을 각각 구한다. 다음은 $DEE'G$가 평행사변형이 되는 $G$를 구하려고 한다. 앞의 따름정리에 의해, 가상의 평면 $DEE'$ 위에서 원 $D(EE')$과 원 $E'(DE)$를 그릴 수 있고, 그 교점이 $G$가 된다.




이제 그림을 보았을 때, 삼각형 $D'GM$과 $D'DN$의 닮음비가 $D'GE'$과 $D'DX$의 닮음비가 같음을 이용하여 $X$를 찾을 것이다. 가상의 평면 $DEE'$ 위에서 두 원 $D'(D'G)$와 $G(GE')$을 그리고, 그 교점 하나를 $M$이라 하자. 또 역시 가상의 평면 $DEE'$ 위에서 두 원 $D'(D'D)$와 $G(DM)$을 그려 적절한 교점을 찾으면 그림의 $N$이 된다. 이제 $DN = DX$ 이므로, 원 $D(DN)$과 $D'(DN)$을 그려 얻은 교점이 문제에서 원하는 점 $X$가 된다. □

**정리** 5.1.4 (**모어-마스케로니 정리**: 3**차원에서**) *3차원 작도에서,* $\mathbb{E}^3$*자와* $\mathbb{E}^3$ *컴퍼스로 작도할 수 있는 점은* $\mathbb{E}^3$*컴퍼스만으로도 작도할 수 있다.*

[증명] 3차원에서 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 세 개 이하의 $\mathbb{E}^3$곡면의 교집합으로 나타난다. 그 곡면들 중에 구면이 하나라도 있으면(*), 보조정리 5.1.1에 의해 나머지 곡면도 다 구면으로 교환해줄 수 있다. 따라서, 이 경우는 $\mathbb{E}^3$컴퍼스만으로 잘 작도된다.

그럼 $\mathbb{E}^3$자와 $\mathbb{E}^3$컴퍼스로 작도할 수 있는 점이 세 평면 $P$, $Q$, $R$의 교집합으로 작도될 경우만을 살피면 된다. 먼저 이 중 두 평면 $P = ABC$, $Q = DEF$의 교선을 찾아보자. 두 직선 $AB$, $AC$ 중 적어도 하나는 $Q$와 평행하지 않으므로, 보조정리 5.1.3에 의해 그 직선과 $Q$의 교점 $X$를 찾을 수 있다. $X$는 구하는 교선 위의 점이다. 일반성을 잃지 않고 $D$가 $X$와 다른 점일 때, 구면 $X(XD)$와 두 평면 $P$, $Q$와의 교점은 바로 앞 (*)에서 구할 수 있음을 확인했다. 이 교점들은 $P$와 $Q$의 가상의 교선 $L$을 이룬다. 이 교선 $L$과 남아 있는 평면 $R$과의 교점을 보조정리 5.1.3에 의해 구할 수 있다. 그것이 구하는 세 평면의 교점이고, 따라서 증명이 되었다. □

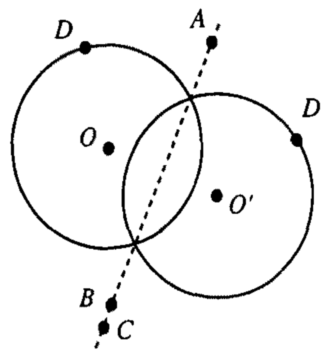
## 5.2 $n$차원에서의 정리

이제 $n$차원에서의 사실을 증명하자.

**보조정리** 5.2.1 *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스만을 이용해, 주어진 $\mathbb{E}^n$ 구면과 주어진 $\mathbb{E}^n$ 평면의 교집합을 $\mathbb{E}^n$ 구면과 $\mathbb{E}^n$ 구면의 교집합으로 나타낼 수 있다. 즉, $S \cap P$ 꼴을 $S \cap S'$ 꼴로 바꾸어 나타낼 수 있다.*

[증명] 보조정리 5.1.1의 3차원 작도에서와 같은 방법으로 한다. 주어진 $\mathbb{E}^n$구면을 $S = O(OD)$, 주어진 가상의 $\mathbb{E}^n$평면을 $P = A_1A_2 \cdots A_n$이라 하자. 중심 $O$를 $P$에 대하여 대칭이동시킨 점 $O'$을 구하고, $O = O'$이면 Case 2로, 그렇지 않으면 Case 1로 간다.

Case 1: $O$가 $P$ 밖에 있을 경우.
$S$ 위의 점 $D$ 역시 $P$에 대해 대칭이동 시켜 $D'$이라 하자.




그럼 $S'$을 구면 $O'(O'D')$이라 할 때

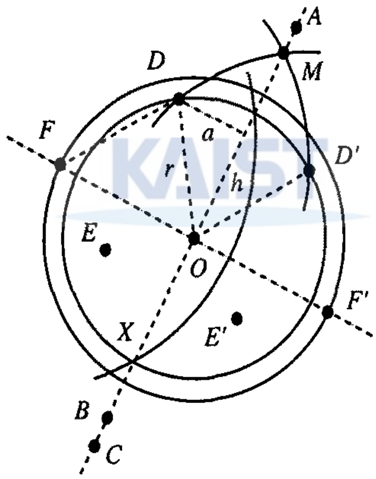
$$S \cap P = S \cap S'$$

이다.

Case 2: $O$가 $P$ 위에 있을 경우.
$P$에 대한 $D$의 대칭점을 $D'$이라 하자. $OD'DF$가 평행사변형이 되는 점 $F$를 구하고 싶다. 그러기위해 먼저 $DE_i$가 $P$와 평행하도록 $E_i$들을 찾아보자($i = 1, \ldots, n$). $E_i$를 찾는 요령은 예를 들어 다음과 같다:

> $O$나 $D$에서 좀 멀찍한 곳에 임의의 점 $X$를 잡고 그 $P$에 대한 대칭점 $X'$도 구한다. $\mathbb{E}^n$구면 $X(XC)$, $X'(X'C)$를 그려 교집합인 $\mathbb{E}^{n-1}$구면 $T$를 찾는다. $T$가 한 점으로 나온다면 $X$를 다른 점으로 바꾸어 택한다. 이제 $T$는 $P$ 위에 있다. $T$에서 $C$와 다른 한 점 $C_i$를 임의로 택하고, 두 $\mathbb{E}^n$구면 $C(CC_i)$, $C_i(C_iC)$를 그려서 선분 $CC_i$의 가상의 수직이등분$\mathbb{E}^n$평면 $Q_i$를 구한다. 이 $Q_i$는 $P$와 수직이다. 이제 $Q_i$에 대한 $D$의 대칭점을 구해 $E_i$라고 한다.

이제 $\mathbb{E}^n$구면 $E_i(E_iO)$들과 $O(DD')$의 교점을 구하면 $F$가 된다.




두 $\mathbb{E}^n$구면 $F(FD')$, $F'(F'D)$을 그려 그 교집합 그 위의 임의의 한 점을 $M$이라 하자. 이제 $\mathbb{E}^n$구면 $F(OM)$을 그리면, 보조정리 5.1.1의 증명에서처럼

$$S \cap P = S \cap F(OM)$$

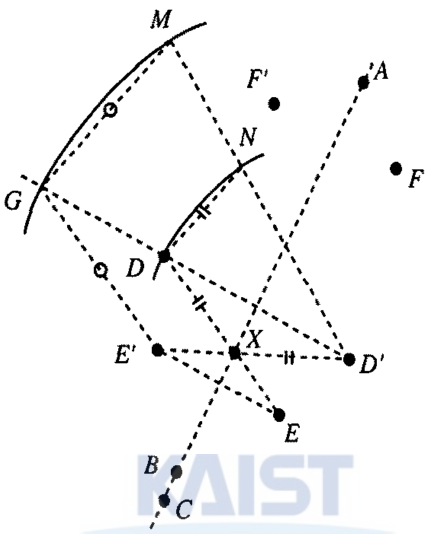
이 된다. □

**따름정리** 5.2.2 *$n$차원 작도에서, $S \cap (\bigcap T_i)$ 꼴로 나타나는 교점은 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스만을 이용하여 작도할 수 있다. 단, $S$는 $\mathbb{E}^n$ 구면이고 $T_i$들은 $\mathbb{E}^n$ 곡면이다.*

[증명] $T_i$가 $\mathbb{E}^n$구면이면 그대로 $S_i = T_i$로 두고, $\mathbb{E}^n$평면이면 앞의 보조정리에 의해 $S \cap T_i = S \cap S_i$ 인 $S_i$를 찾을 수 있으므로 이것으로 대체한다. 그럼 $S \cap (\bigcap T_i) = S \cap (\bigcap S_i)$ 이므로 이것은 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만으로 작도할 수 있다. □

**보조정리** 5.2.3 *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스만을 사용하여, 주어진 $\mathbb{E}^n$ 평면과 주어진 직선의 교점을 작도할 수 있다.*

[증명] 주어진 가상의 $\mathbb{E}^n$평면을 $P = A_1A_2 \cdots A_n$ 이라 하고, 주어진 가상의 직선을 $L = DE$ 라고 하자. 먼저 $D$, $E$의 $P$에 대한 대칭점 $D'$, $E'$을 구한다. 앞의 따름정리에 의하면, $S \cap (\bigcap T_i)$ 꼴의 점은 모두 작도할 수 있다. $DEE'G$가 평행사변형이 되는 $G$는 $\mathbb{E}^n$구면 $D(EE')$와 직선 $DD'$의 교점인데, 직선 $DD'$를 그것을 포함하는 가상의 $\mathbb{E}^n$평면 $n-1$개로 대체하면 $G$를 작도할 수 있다.




$\mathbb{E}^n$구면 $D'(D'G)$와 $G(GE')$을 그려 얻은 교집합 위에서 한 점을 택해 $M$이라 하자. $N$은 $\mathbb{E}^n$구면 $D'(D'D)$와 $G(DM)$, 그리고 평면 $GDE$의 교점인데, 평면 $GDE$를 그것을 포함하는 가상의 $\mathbb{E}^n$평면 $n-2$개로 대체하면 $N$을 작도할 수 있다. 마지막으로 $\mathbb{E}^n$구면 $D(DN)$과 $D'(DN)$, 평면 $DEE'$의 교점을 구하면 된다. □

**따름정리** 5.2.4 *$n$차원 작도에서, 주어진 $\mathbb{E}^n$ 평면과 주어진 $\mathbb{E}^k$ 평면의 교집합($\mathbb{E}^{k-1}$ 평면)을 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스만으로 구할 수 있다.* $(k = 2, \ldots, n)$

[증명] 주어진 가상의 $\mathbb{E}^n$평면을 $P = A_1A_2 \cdots A_n$, 주어진 가상의 $\mathbb{E}^k$평면을 $Q = B_1 \cdots B_k$, 그리고 구하는 가상의 $\mathbb{E}^{k-1}$평면을 $R$ 이라 하자. $k = 2$ 는 바로 앞의 보조정리의 경우이므로 $k \geq 3$ 일 때에만 보자.

$Q$ 위의 직선 $B_1B_i$ 들 중에 $P$와 평행하지 않은 것이 있으므로, 앞의 보조정리에 의해 그 직선과 $P$의 교점 $X$를 구할 수 있다. 일반성을 잃지 않고 $A_1$이 $X$와 다른 점이라고 할 때, 문제에서 구하는 교집합 $R$은 $\mathbb{E}^n$구면 $X(XA_1)$과 $P$와 $Q$ 등의 교집합 $S$를 포함하는 유일한 $\mathbb{E}^{k-1}$평면이다. 즉, $\mathbb{E}^{k-2}$구면 $S$에서 적당히 $k-1$개의 점 $X_1, \ldots, X_{k-1}$을 골라 $R = X_1 \cdots X_{k-1}$ 라고 하면 된다. □

**정리** 5.2.5 (**모어-마스케로니 정리**: $n$**차원에서**) *$n$차원 작도에서, $\mathbb{E}^n$ 자와 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스로 작도할 수 있는 점은 $\mathbb{E}^n$ 컴퍼스만으로도 작도할 수 있다.*

[증명] $n$차원 작도에서 $\mathbb{E}^n$자와 $\mathbb{E}^n$컴퍼스로 작도되는 점은 크게

$$S \cap \left( \bigcap_{i=2}^{k} T_i \right) \quad \text{꼴과} \quad \bigcap_{i=1}^{n} P_i$$

의 두 가지 꼴로 나눌 수 있다. 단, $S$는 $\mathbb{E}^n$구면이고 $P_i$들은 $\mathbb{E}^n$평면, 그리고 $T_i$들은 $\mathbb{E}^n$곡면이다. 첫 번째 꼴은 따름정리 5.2.2에 의해 해결됨을 확인했으므로, 두 번째의 $\bigcap P_i$ 꼴만 살피면 된다. 그리고 이 때에는, 바로 앞의 따름정리 5.2.4에 의해, $P_{n-1} \cap P_n = Q_{n-1}$ 인 가상의 $\mathbb{E}^{n-1}$평면 $Q_{n-1}$을 구할 수 있고, 또 $P_{n-2} \cap Q_{n-1} = Q_{n-2}$ 인 가상의 $\mathbb{E}^{n-2}$평면 $Q_{n-2}$를 구할 수 있고, 이렇게 계속하면 귀납적으로 한 점($\mathbb{E}^1$평면) $Q_1$만이 남는다. 이것이 구하는 교점이고 $\mathbb{E}^n$컴퍼스만으로 작도된 것이다. $\square$

# 6. 맺음말

2001년 3월 19일, KAIST 수학문제연구회[1]의 정기모임 중에 도현수가 이런 질문을 던졌다:

"왜 작도는 평면에서만 하는 거죠? 3차원에서는 못 하나요?"

대답할 수가 없었다. 왜 2차원에서만 하는 걸까? 그건 다만, 너무 우습지만, 미처 생각해보지 않았기 때문인 것 같았다. 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도할 수 없다는 문제가 있는 걸 보면 3차원에서의 작도를 아예 생각하지 않은 것은 아닐지도 모른다. 하지만, 그외에는 어디서도 3차원 작도를 본 기억이 없다.

우리는 곧바로 평면을 그리는 도구와 구면을 그리는 도구가 필요하다는 것을 생각해냈다.

"3차원 자는 책받침 같은 거네?"
"3차원 컴퍼스는 뭐지? 일단 구면컴퍼스라고 할까?"

그리고, 이것은 이희명의 말이었다:

"이건 연필로 선을 그리는 대신 붓으로 면을 칠하는 작도네요."

산만한 토론과 아하! 하는 탄성이 이어지며, 그것으로 꽤 많은 표준적이고 흥미로운 작도들을 할 수 있다는 것을 파악할 수 있었다.

그래서, 회원들의 논의는 자연스럽게 작도가능성에 대한 문제로 넘어갔다.

"그럼 작도불가능성에 관한 문제들이 새로 많이 생기겠네요?"
"2차원에서처럼 다 파악되는 것 아닐까?"
"아니, 3차원은 더 자유로워서 좀 다를 것 같은데?"

그리고, 작도 도구의 내포성에 대한 의견들도 제시되기 시작했다.

"그 구면컴퍼스는 만들기 힘들잖아. 그냥 컴퍼스를 쓰면 안 되나?"
"응 책받침이랑 컴퍼스만 써도 작도는 많이 할 수 있겠다."
"근데 컴퍼스를 쓰면 구면컴퍼스보다 할 수 있는 작도가 줄어들겠지?"
"음... 왠지 동등할 것 같은데?"
"아, 그런 문제라면 컴퍼스만 갖고 하는 작도라는 것도 있잖아. 책받침 없이 구면컴퍼스만으로도 하는 작도도 생각할 수 있겠네."
"그건 동등하기가 좀더 어려울 것 같은 걸?"

[1]KAIST 수학문제연구회는 KAIST 학생들 중 수학에 관심이 많은 학생들이 모여있는 모임.

필자와 도현수, 이희명 등이 주도한 논의였다. 논의는 이 정도까지 진행되고 정기모임의 주제는 다른 이야기로 넘어갔다.

그후 인터넷 게시판에서 각자 생각해본 의견들을 가지고 토론이 좀더 진행되었다. 정기모임에 참여하지 않았던 신회성도 이에 관심을 보이고 여러 의견을 내놓았다. 그러나 구체적인 연구 단계로 진행되지는 않았고, 누군가 벌써 연구한 것이 어딘가 있겠지라고 추측하고서는, 바쁜 학업으로 다들 한동안 잊고 지냈다. 그저 우리 모임에서 늘상 나오는 여러 재미있는 문제들 중에 하나였던 것뿐이었다.

불씨가 되살아난 것은 5월초, 필자에 의해서였다. KAIST 과학영재교육연구소에서 중고등학생들의 영재교육을 담당하고 있던 필자는 학생들에게 부여할 논문형 과제를 찾고 있었고, 그 후보의 하나로 이 주제를 기억해내게 되었다.

'아, 그때 그게 있었지!'

이미 연구된 자료들을 찾아보려고 논문이나 문헌들을 뒤졌는데, 비슷한 것을 전혀 찾아볼 수가 없었다. 처음에는 한숨이었다.

"자료 찾기가 힘들어서 과제 문제로 정리하려면 힘들겠네."

그러나 곧 열정의 동기가 되었다.

"앗, 어쩌면 이것은 우리가 처음인지도 몰라!"

그래서, 처음 주제의 제안자인 도현수를 찾았고, 좋은 결과가 나오면 논문이 될지도 모르니 같이 연구할 것을 제의했다.

도현수는 이미 작도가능성의 문제는 2차원과 마찬가지라는 걸 파악하고 있었다. 서로의 연구결과와 힌트를 나누는 두 사람만의 세미나를 두 번 가지는 동안, 구면컴퍼스 대신 보통 컴퍼스를 쓰는 작도와 구면컴퍼스 만으로 하는 작도가 필자에 의해 증명되었다. 도현수는 필자의 증명이 맞다는 것을 확인해 주었고, 다음의 관심사는 $n$차원이 되었다.

"이것들이 모두 $n$차원으로도 잘 확장이 될까?"

두 사람은 먼저 상대적으로 쉬워보이는 $n$차원 컴퍼스 대신 보통 컴퍼스를 사용할 수 있는가 하는 문제에 매달렸다. 두 번째 세미나의 끝자락에서 함께 끙끙대면서 매우 상상하기 난해한 방법으로, 작도에 필요한 컴퍼스의 차원을 한 차원 한 차원 낮추어가는 방법이 대충 성공한 것 같았다. 하지만, 이런 방법으로는 논문으로 쓰기도 어렵고 과연 맞는지도 자신이 없었다. $n$차원 컴퍼스만으로 하는 작도는 더더욱 벽이 높아 보였다. 이윽고 도현수는 포기를 선언했다.

"저는 3차원까지만 할래요. $n$차원은 아무래도 느껴지지 않으니... 제 관심 밖인 것 같아요."

그러면서 새로운 제안을 내놓았다.

> "요즘 사영기하를 혼자 공부해보고 있는데, 거기선 원이나 타원이나 마찬가지잖아요. 그럼 타원을 작도하는 도구를 생각하고 그걸로 해보는 작도는 어떨까요?"

며칠 후, 5월 16일에, 필자는 $n$차원 컴퍼스만으로 하는 작도에 대한 긍정적인 결과를 얻을 수 있었다. 그것은, 마스케로니의 방법을 3차원으로 그대로 확장할 때 나타나는 작은 갭을 적당히 메꾸었듯이, $n$차원으로 확장한 마스케로니의 방법은 어떤 의미를 갖게 되고 그래서 어떤 갭을 남기는지를 정확히 파악해본다는 아이디어에서였다. 마스케로니의 방법은, 잘 들여다보면, 점을 구하는 것이 목표이긴 하지만 주된 아이디어는 그릴 수 없는 직선을 대신할 새로운 원을 구하는 것이었다. 이것을 파악하고나자 무엇이 갭인지가 보였고, $n$차원에 대한 복잡한 상상 없이도 귀납적으로 그 갭이 쉽게 메꾸어진다는 것을 금방 확인할 수 있었다. 또한 이 방법은 컴퍼스의 차원을 낮추는 문제에도 같은 방법으로 적용된다는 것을 더 쉽게 확인할 수 있었다. 그래서, 도현수와의 지난 쎄미나에서 얻은 방법은 폐기되었다.

필자는 도현수에게 이 증명을 검증해보자고 하여 쎄미나를 한 번 더 가졌고, 부주의한 작은 비약들이 지적되어 다시 정확한 증명으로 완성시킬 수 있었다.

그리고 이때, 타원작도기에 대한 구체적인 모델이 제시되었다. 양끝에 두 개의 못이 달린 실과 같은 것인데, 한쪽 못은 고정되어 있고, 반대 쪽의 못은 실을 타며 움직이다가 필요하면 일시적으로 고정될 수 있는 것이다. 그래서, 타원의 두 초점과 타원이 지날 한 점이 주어지면, 초점에 못을 대고 그 점까지 연필로 실을 밀어붙인 후, 실을 팽팽하게 당겨 움직못을 고정한 다음 타원을 그린다. 구체적인 모델이 제시되자 재미있을 것 같다는 동기부여가 되었고, 이 타원작도기로 직선도 그릴 수 있고 원도 그릴 수 있다는 것을 확인하였다. 그 다음의 문제는 당연히 타원작도가 자와 컴퍼스의 작도와 동등한가, 혹은 그보다 얼마나 강력한가 하는 것이었다. 평면의 타원은 3차원에 그려진 원의 사영으로 볼 수 있지 않을까 하는 등의 아이디어가 있었지만, 동등함을 보이려는 시도는 모두 실패였다.

> "두 타원의 교점을 대수적으로 풀면 4차방정식이니까 아무래도 동등하지 않은, 더 강력한 작도인 것 같다."
> "작도가능한 수로 표현되지 않는 점 하나쯤 두 타원의 교점으로 얻어내는 게 가능할 것 같은데. 그런데 이렇게 대수적인 방법으로 생각하는 것은 별로 재미없게 느껴지는 걸."

이에 관한 논의는 이후 두 사람 모두 관심을 보이지 않았다. 그래서 논문은 여기까지이다.

# 참 고 문 헌

[1] George E. Martin, Geometric Constructions, Springer-Verlag, 1998